S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 292–299 (2015) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2015.12.023 MSC 60G50

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕСКОКА

В.И. ЛОТОВ

Abstract. We find asymptotic expansion in the powers of e^{-b} for the distribution of excess over boundary $b \to \infty$ under one-sided Cramér condition on the distribution of random walk summands. As a corollary, we obtain asymptotic expansion for the renewal function.

Keywords: random walk, excess over boundary, renewal function, asymptotic expansions.

Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n,\ n \geq 1\}$, и пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n \geq 1$. Для произвольного $b > 0$ введем

$$N_b = \inf\{n \geq 1 :\ S_n \geq b\}.$$

Полагаем $N_b = \infty$, если $S_n < b$ при всех $n \geq 1$.

Цель работы состоит в получении асимптотических разложений для

$$\mathbf{P}(S_{N_b} \geq b + x,\ N_b < \infty)$$

при $b \to \infty$. Отметим, что главные члены асимптотики в этой задаче хорошо известны, мы будем искать последующие члены в условиях Краме́ра на распределение X_1.

Обозначим $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1}$. Везде в работе предполагаются выполненными следующие условия:

(C_1) $\mathbf{E}e^{\lambda X_1} < \infty$ при $0 \leq \lambda \leq \beta,\ \beta > 0$.

(C_2) $\mathbf{E}|X_1| < \infty, \quad \varphi(\beta) > 1$, если $\mathbf{E}X_1 < 0$.

Пусть $z \in (1 - \delta, 1)$ при некотором малом $\delta > 0$. Функция $\varphi(\lambda)$ выпукла вниз, $\varphi(0) = 1$, поэтому нетрудно видеть, что уравнение $\varphi(\lambda) = 1/z$ всегда

Lotov, V.I., On the asymptotics of the distribution of excess.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00220).

Поступила 2 февраля 2015 г., опубликована 28 апреля 2015 г.

имеет положительное решение $\lambda = \lambda_1(z)$, если $\mathbf{E}X_1 \geq 0$ или же если $\mathbf{E}X_1 < 0$ и $\varphi(\beta) > 1$. Полагая $\lambda_1 = \lim_{z\to 1}\lambda_1(z)$, будем иметь $\lambda_1 = 0$, если $\mathbf{E}X_1 \geq 0$, и $\lambda_1 = q$ при некотором $q > 0$ в случае, когда $\mathbf{E}X_1 < 0$ и $\varphi(\beta) > 1$. В полосе $\lambda_1(z) < \mathrm{Re}\,\lambda \leq \beta$ других вещественных корней у этого уравнения быть не может, но могут быть комплексные корни с ненулевой мнимой частью. В [1] в качестве примеров рассмотрены случайные блуждания с гауссовским распределением слагаемых и случайные блуждания, скачки которого распределены одинаково со случайной величиной $C - Y$, где постоянная $C > 0$, а Y имеет экспоненциальное распределение на $[0, \infty)$. В обоих этих случаях уравнение $\varphi(\lambda) = 1$, а значит и уравнение $\varphi(\lambda) = 1/z$ при z, близких к единице, имеет бесконечно много решений в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Нетрудно видеть, что наряду с каждым комплексным корнем $\lambda = \lambda(z)$ уравнения

$$1 - z\varphi(\lambda) = 0 \tag{1}$$

решением этого уравнения будет также комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}(z)$.

Будем предполагать, что дополнительно выполнены следующие условия.

(A_1) В полосе $\lambda_1(z) < \mathrm{Re}\,\lambda < \beta$ находится еще $2k$ комплексных корней уравнения (1), $k \geq 0$. При $k \geq 1$ обозначаем эти корни через $\lambda_2(z), \ \ldots, \ \lambda_{2k+1}(z)$, здесь $\mathrm{Re}\lambda_{2j}(z) = \mathrm{Re}\bar{\lambda}_{2j+1}(z), \ j = 1, \ldots, k$.

(A_2) При $z = 1$ выполняется

$$\inf_{\mathrm{Re}\lambda=\beta} |1 - z\varphi(\lambda)| > 0. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что из условия (A_2) будет следовать неравенство (2) и для z, близких к единице.

Корень $\lambda_1(z)$ является простым, мы предположим далее, что все корни $\lambda_2(z), \ \ldots, \ \lambda_{2k+1}(z)$ в случае их наличия также являются простыми.

Далее в работе мы будем использовать факторизацию (см., например, [2])

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_+(z,\lambda)R_-(z,\lambda), \qquad |z| < 1, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda = 0, \tag{3}$$

в которой

$$R_-(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0\right)\right\},$$

$$R_+(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n \geq 0\right)\right\}. \tag{4}$$

Известны и другие представления для введенных компонент факторизации. Пусть

$$\eta_- = \inf\{n \geq 1 : \ S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \geq 1 : \ S_n \geq 0\}, \quad \chi_\pm = S_{\eta_\pm},$$

тогда

$$R_\pm(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm}\exp\{\lambda\chi_\pm\}; \eta_\pm < \infty\right), \qquad |z| < 1. \tag{5}$$

Заметим, что в последнем соотношении можно полагать $|z| \leq 1$, то есть, к примеру,

$$R_+(1,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+\}; \eta_+ < \infty\right) = \lim_{z\to 1}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n \geq 0\right)\right\}.$$

Этим соотношением мы будем пользоваться в дальнейшем. Переменная λ везде рассматривается как основная, z можно воспринимать как параметр. Функции

$R_\pm(z,\lambda)$ в явном виде могут быть выражены через нули и полюса (по переменной λ) функции $1 - z\varphi(\lambda)$ в том случае, если хотя бы одна из функций $\mathbf{E}\big(e^{\lambda X_1};\ X_1 < 0\big)$ или $\mathbf{E}\big(e^{\lambda X_1};\ X_1 > 0\big)$ является рациональной [2].

В связи с тем, что $R_-(z,\lambda)$ в ноль не обращается в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$, все числа $\lambda_1(z),\ \ldots,\ \lambda_{2k+1}(z)$ будут нулями функции $R_+(z,\lambda)$. Следовательно, эти числа будут простыми полюсами функции $R_+^{-1}(z,\lambda)$ в полосе $0 \le \mathrm{Re}\,\lambda < \beta$.

Обозначим $F(y) = \mathbf{P}(X_1 < y)$ и пусть $F = F_a + F_d + F_s$ — разложение этой функции распределения на абсолютно непрерывную, дискретную и сингулярную компоненты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2), (A_1), (A_2) *и возможные корни уравнения* (1) *в полосе* $\lambda_1(z) < \mathrm{Re}\,\lambda < \beta$ *являются простыми. Пусть, кроме того,*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y} d(F_d + F_s)(y) < 1. \tag{6}$$

Тогда при $b \to \infty$ *для любого* $x \ge 0$

$$\mathbf{P}(S_{N_b} \ge b + x,\ N_b < \infty) = \sum_{i=1}^{2k+1} F_i(x) e^{-\lambda_i b} + \int\limits_{b+x}^{\infty} d\Delta(y),$$

где

$$\int\limits_{b+x}^{\infty} |d\Delta(y)| = o\left(e^{-(b+x)\beta}\right), \qquad \lambda_i = \lim_{z\to 1} \lambda_i(z), \qquad F_i(x) = \int\limits_{x}^{\infty} f_i(y)\,dy,$$

функции f_i *определяются соотношениями*

$$\frac{R_+(1,\lambda)}{R'_+(1,\lambda_i)(\lambda - \lambda_i)} = \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda y} f_i(y)\,dy, \qquad i = 1, \ldots, 2k+1.$$

Отметим, что ограничение типа (6) на $F_d + F_s$ является в некотором смысле неизбежным вследствие того, что сумма дискретной и сингулярной компонент распределения S_{N_b} целиком содержится в $o\left(e^{-(b+x)\beta}\right)$.

Доказательство. Обозначим через V совокупность всех функций g, представимых при $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ в виде

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \|g\| := \int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{7}$$

Функция g в этом определении может зависеть от z.

Будем писать также $g \in V(t)$, если $g(\lambda + t)$ принадлежит V как функция переменной λ. Другими словами, для функции $g \in V(t)$ выполняется

$$\|g\|_t := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ty} |dG(y)| < \infty. \tag{8}$$

Обозначим далее через $V_+(t)$ совокупность функций $g \in V(t)$, для которых все изменение функции G в представлении (8) сосредоточено на множестве $[0,\infty)$. Аналогично, пусть $V_-(t)$ соответствует тем функциям $g \in V(t)$, для которых вариация функции G на множестве $(0,\infty)$ в представлении (8) равна нулю. В силу представлений (4) компоненты факторизации $R_+^{\pm 1}(z,\lambda)$ как функции переменной λ при $|z|<1$ принадлежат $V_+(0)$, также $R_-^{\pm 1}(z,\lambda)\in V_-(0)$. Более того, $R_-^{-1}(z,\lambda)\in V_-(t)$ при всех $t\geq 0$ и из условия (C) следует, что $1-z\varphi(\lambda)\in V(t)$ при всех $t\in[0,\beta]$, поэтому

$$R_+(z,\lambda)=(1-z\varphi(\lambda))R_-^{-1}(z,\lambda)\in V(\beta)$$

и, неизбежно, $R_+(z,\lambda)\in V_+(\beta)\subset V(\beta)$. Фиксируем по-прежнему $z\in(1-\delta,1)$ при некотором малом $\delta>0$ и будем пользоваться представлениями (3)–(4). Известно [3], [4], что

(9)

$$\mathbf{E}\big(z^{N_b}\exp\{\lambda S_{N_b}\};\ N_b<\infty\big)=R_+(z,\lambda)\big[R_+^{-1}(z,\lambda)\big]^{[b,\infty)},\qquad |z|<1,\quad \mathrm{Re}\,\lambda=0,$$

где принято обозначение

$$\big[g(\lambda)\big]^D=\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}dG(y)\Bigg]^D=\int_D e^{\lambda y}dG(y)$$

для любого измеримого $D\subset R$ и для всякой функции $g\in V$. Это соотношение лежит в основе дальнейших рассуждений. Нам придется анализировать участвующую в (9) функцию $\big[R_+^{-1}(z,\lambda)\big]^{[b,\infty)}$, поэтому сначала выделим особенности функции $R_+^{-1}(z,\lambda)$. Введем функцию

$$w_z(\lambda):=R_+^{-1}(z,\lambda)-\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{A_i(z)}{\lambda-\lambda_i(z)},\quad A_i(z)=\big(R'_+(z,\lambda_i(z))\big)^{-1}.$$

Здесь производная у $R_+(z,\lambda)$ берется по второму аргументу, существование производных этой функции обеспечивается ее аналитичностью в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda<\beta$. Функция $w_z(\lambda)$ не имеет особенностей в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda\leq\beta$. Покажем, что $w_z(\lambda)\in V_+(\beta)$ и $\|w_z(\lambda)\|_\beta\leq C$ равномерно по z в условиях теоремы 1.

Положим

$$v(z,\lambda):=\frac{\Lambda(z,\lambda)}{R_+(z,\lambda)(\lambda-\beta-1)^m},$$

где обозначено

$$\Lambda(z,\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i(z)),\qquad m=2k+1.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $v(z,\lambda)\in V_+(\beta)$ и $\|v(z,\lambda)\|_\beta\leq C$ равномерно по z.*

Доказательство. Функция $1-z\varphi(\lambda)\in V(\beta)$ в соответствии с условием (C_1). Покажем, что также $(1-z\varphi(\lambda))^{-1}\in V(\beta)$. Для этого проверим выполнение достаточных условий (их два), содержащихся в теореме 6 [5, Приложение 2]. Сделаем замену $\mu=\lambda-\beta$ и пусть $r(z,\mu)=1-z\varphi(\lambda)$. Первое из условий требует, чтобы $\inf\limits_{\mathrm{Re}\mu=0}|r(z,\mu)|>0$. Очевидно, это требование выполнено в наших условиях равномерно по $z\in(1-\delta,1)$ для некоторого малого δ. Для формулировки второго условия введем разложение $G=G_a+G_d+G_s$ на абсолютно непрерывную, дискретную и сингулярную компоненты функции G, определяемой равенством

$$r(z,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mu y}dG(y),\qquad \mathrm{Re}\ \mu=0. \tag{10}$$

Второе условие требует выполнения неравенства

$$\inf_{\mathrm{Re}\mu=0}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mu y}dG_d(y)\right| > \int\limits_{-\infty}^{\infty}|dG_s(y)|.$$

Нетрудно видеть, что

$$dG_d(y)=dE(y)-ze^{\beta y}dF_d(y),\qquad dG_s(y)=-ze^{\beta y}dF_s(y),$$

где E — функция вырожденного в нуле распределения. Тогда

$$\inf_{\mathrm{Re}\mu=0}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mu y}dG_d(y)\right| = \inf_{\mathrm{Re}\mu=0}\left|\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{\mu y}(dE(y)-ze^{\beta y}dF_d(y))\right|$$

$$=\inf_{\mathrm{Re}\mu=0}\left|1-z\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\mu+\beta)y}dF_d(y)\right| \ge 1-z\sup_{\mathrm{Re}\mu=0}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\mu+\beta)y}dF_d(y)\right|$$

$$=1-z\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y}dF_d(y) > z\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y}dF_s(y).$$

Последнее неравенство следует из (6).

Таким образом, $(1-z\varphi(\lambda))^{-1}\in V(\beta)$ в силу упомянутой теоремы 6 из [5] и, очевидно,

$$\frac{\Lambda(z,\lambda)}{(\lambda-\beta-1)^m}\in V(\beta),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{1-z\varphi(\lambda)}\frac{\Lambda(z,\lambda)}{(\lambda-\beta-1)^m}\in V(\beta).$$

Норма $\|.\|_\beta$ этой функции конечна при $z=1$, и, следовательно, ограничена константой для z, близких к единице. Кроме того, $\|R_-(z,\lambda)\|_\beta\le C$ равномерно по z. Поэтому

$$v(z,\lambda)=\frac{1}{1-z\varphi(\lambda)}\frac{\Lambda(z,\lambda)}{(\lambda-\beta-1)^m}R_-(z,\lambda)\in V(\beta)$$

и

$$\|v(z,\lambda)\|_\beta\le\left\|\frac{1}{1-z\varphi(\lambda)}\frac{\Lambda(z,\lambda)}{(\lambda-\beta-1)^m}\right\|_\beta\Big\|R_-(z,\lambda)\Big\|_\beta\le C$$

равномерно по z.

Для произвольного $\varepsilon>0$ функция $v(z,\lambda)$ принадлежит $V_+(-\varepsilon)$, то есть является преобразованием Лапласа – Стилтьеса функции, все изменение которой сосредоточено на неотрицательной полуоси. Функция $v(z,\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda<\beta$ и непрерывна на границе. Следовательно, для функции G, введенной в (10), с необходимостью имеет место

$$\int\limits_{-\infty}^{0}|dG(y)|=0,$$

то есть $v(z,\lambda) \in V_+(\beta)$. Лемма доказана.

$\square$

Из утверждения леммы следует, что функция

$$h(z,\lambda) := \frac{\Lambda(z,\lambda)w_z(\lambda)}{(\lambda-\beta-1)^m} = \frac{\Lambda(z,\lambda)}{R_+(z,\lambda)(\lambda-\beta-1)^m} - \frac{P(z,\lambda)}{(\lambda-\beta-1)^m}$$

также принадлежит $V_+(\beta)$, где полином $P(z,\lambda)$ определяется соотношением

$$\frac{P(z,\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)} = \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{A_i(z)}{\lambda-\lambda_i(z)}.$$

Здесь также $\|h(z,\lambda)\|_\beta \le C$ равномерно по z.

Разложим на простые дроби

$$\frac{(\lambda-\beta-1)^m}{\Lambda(z,\lambda)} = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i(z)}{\lambda-\lambda_i(z)},$$

и заметим, что числа $\lambda_i(z)$ являются нулями функции $h(z,\lambda)$. Поэтому в соответствии с теоремой 2 [5, Приложение 2] функция

$$w_z(\lambda) = \frac{(\lambda-\beta-1)^m h(z,\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)} = h(z,\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i(z)h(z,\lambda)}{\lambda-\lambda_i(z)}$$

также принадлежит $V_+(\beta)$ и $\|w_z(\lambda)\|_\beta \le C$ равномерно по z.

Пусть

$$w_z(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} dL_z(y),$$

тогда при $b > 0$

$$\big[R_+^{-1}(z,\lambda)\big]^{[b,\infty)} = \sum_{i=1}^{2k+1} A_i(z)\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_i(z)}\right]^{[b,\infty)} + \big[w_z(\lambda)\big]^{[b,\infty)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} A_i(z)\frac{e^{(\lambda-\lambda_i(z))b}}{\lambda-\lambda_i(z)} + \int_b^\infty e^{\lambda y} dL_z(y).$$

Определим функцию $\Delta_z(y)$ соотношением

$$R_+(z,\lambda)\int_b^\infty e^{\lambda y} dL_z(y) = \int_b^\infty e^{\lambda y} d\Delta_z(y).$$

Здесь равномерно по z

$$\|R_+(z,\lambda)\big[w_z(\lambda)\big]^{[b,\infty)}\|_\beta \le \|R_+(z,\lambda)\|_\beta \|\big[w_z(\lambda)\big]^{[b,\infty)}\|_\beta \le C\int_b^\infty e^{\beta y}|d\Delta_z(y)|.$$

Устремляя $z \to 1$ в (9), получаем

$$\mathbf{E}(e^{\lambda S_{N_b}};\ N_b < \infty) = \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{R_+(1,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_i)b}A_i(1)}{\lambda-\lambda_i} + \int_b^\infty e^{\lambda y} d\Delta_1(y),$$

где при $x \geq 0$

$$e^{\beta(x+b)} \int\limits_{x+b}^{\infty} |d\Delta_1(y)| \leq \int\limits_{x+b}^{\infty} e^{\beta y} |d\Delta_1(y)| = o(1), \qquad b \to \infty.$$

Из этих соотношений немедленно следует утверждение теоремы 1.

$\square$

Отметим, что наличие кратных корней среди $\lambda_2(z),\ \ldots,\ \lambda_{2k+1}(z)$ не приводит к существенным изменениям в доказательстве.

Предположим теперь, что $\mathbf{E}X_1 = a \geq 0$. Тогда $\mathbf{P}(N_b < \infty) = 1,\ \ \lambda_1 = 0$ и

$$\frac{R_+(1,\lambda)}{\lambda R'_+(1,0)} = \frac{\mathbf{E}e^{\lambda\chi_+} - 1}{\lambda \mathbf{E}\chi_+} = \frac{1}{\mathbf{E}\chi_+} \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\chi_+ \geq y) dy,$$

то есть в этом случае главный член асимптотики для $\mathbf{P}(S_{N_b} \geq b + x)$ равен

$$F_1(x) = \frac{1}{\mathbf{E}\chi_+} \int\limits_x^{\infty} \mathbf{P}(\chi_+ \geq y) dy.$$

Это известный факт, он справедлив в гораздо более общей ситуации, не требующей условия Крамéра и наличия абсолютно непрерывной компоненты. Если же $\mathbf{E}X_1 < 0$ и $\varphi(\beta) > 1$, то, как уже отмечалось, $\lambda_1(1) = q$ при некотором $q > 0$ и главный член асимптотики для $\mathbf{P}(S_{N_b} \geq b + x,\ N_b < \infty)$ будет равен $F_1(x)e^{-qb}$.

Воспользовавшись далее тождеством Вальда $\mathbf{E}S_{N_b} = \mathbf{E}X_1 \mathbf{E}N_b$, получаем асимптотическое разложение для $\mathbf{E}N_b$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $\mathbf{E}X_1 = a > 0$. *Тогда при* $b \to \infty$

$$a\mathbf{E}N_b = b + \frac{R''_+(1,0)}{2R'_+(1,0)} - \sum_{i=2}^{2k+1} \frac{R'_+(1,0)e^{-\lambda_i b}}{\lambda_i R'_+(1,\lambda_i)} + \int\limits_b^{\infty} d\rho(y),$$

где для всех $t \geq b$

$$\int\limits_t^{\infty} |d\rho(y)| = o(te^{-\beta t}).$$

Напомним, что здесь $R_+(1,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\,\exp\{\lambda\chi_+\}$, поэтому $R'_+(1,0) = -\mathbf{E}\,\chi_+$, $R''_+(1,0) = -\mathbf{E}\,\chi_+^2,\ \ R'_+(1,\lambda_i) = -\mathbf{E}\,(\chi_+ \exp\{\lambda_i\chi_+\})$.

Как известно, $\mathbf{E}N_b$ являет собой вариант функции восстановления (см. [2, Глава 10]. Тем самым теорема 2 дает асимптотическое разложение для функции восстановления. Этот результат уточняет и обобщает соответствующую теорему из [6], где дополнительно предполагалось, что $\mathbf{P}(X_1 \geq 0) = 1$.

Для случайных блужданий с гауссовским распределением приращений аналоги теорем 1–2 содержатся в [7].

References

[1] V.I. Lotov, *Asymptotic Expansions in a Sequential Likelihood Ratio Test*, Theory Probab. Appl., **32** (1988), 57–67.

[2] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013. MR3086572

[3] J.H.B. Kemperman, *A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary*, Annals of Mathematical Statistics, **34** (1963), 1168–1193. MR0155364

[4] V.I. Lotov, *On an approach to problems with two boundaries*, Statistics and Control of Random Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117—121. MR1079348

[5] A.A. Borovkov, *Stochastic processes in queueing theory*, Springer, New York, 1976. MR0391297

[6] V.I. Lotov, *Asymptotic behavior of the distribution of the supremum of successive sums*, Math. Notes, **38** (1985), 876–882. MR0819625

[7] V.I. Lotov, *On some boundary crossing problems for Gaussian random walks*, Annals of Probability, **24** (1996), 2154–2171. MR1415246

Vladimir Ivanovich Lotov
Novosibirsk State University,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: lotov@math.nsc.ru