S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 300–308 (2015) УДК 517.977
DOI 10.17377/semi.2015.12.024 MSC 49J21

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ НАКЛОНА ТРЕЩИНЫ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

Н.П. ЛАЗАРЕВ, Н.В. НЕУСТРОЕВА, Н.А. НИКОЛЕВА

Abstract. We consider an equilibrium problem of an elastic plate with a flat oblique crack (cut). Nonpenetration conditions on the crack faces are given in the form of inequalities. We investigate the dependence of the solution and energy functional with respect to variations of the crack's tilt angle. The existence of the solution to the optimal control problem is proved. For that problem the cost functional is defined by derivatives of a energy functional along the crack perturbation parameter and the crack's tilt angle is chosen as the control function.

Keywords: oblique crack, optimal control, plate, variational inequality.

1. Введение

Математическая модель, описывающая равновесие пластины с условием непроникания для наклонной трещиной, была впервые предложена в работе [1]. Затем, в предположении о малом угле наклона поверхности трещины, были предложены упрощенные условия непроникания для наклонных трещин в пластинах, описываемых моделями Кирхгофа-Лява и Тимошенко [2], [3]. В указанных трех работах была обоснована корректность вариационных задач о равновесии пластин. Кроме того, в [2, 3], при условии дополнительной гладкости решения, получены формулировки задач в дифференциальном виде, которые эквивалентны исходным вариационным. Для случая пластины Кирхгофа-Лява с плоской наклонной трещиной была получена производная функционала энергии по отношению параметру, описывающему распространение трещины [4].

Lazarev, N.P., Neustroeva, N.V., Nikolaeva N.A. Optimal control of tilt angles in equilibrium problems for the Timoshenko plate with a oblique crack.

Работа поддержана РНФ (грант №15-11-10000).

Поступила 27 апреля 2015 г., опубликована 20 мая 2015 г.

Отметим, что математические модели пластин и оболочек с нелинейным условием непроникания для вертикальной трещины изучены весьма широко. В частности, вопросы дифференцирования функционалов энергии для пластин с трещинами исследованы в [5], [6], [7]; задачи оптимального управления изучены в [8], [9]; модели для пластин с жесткмим включениями изучены в [10], [11].

В настоящей работе исследована зависимость производной функционала энергии от угла наклона плоской трещины в задаче о равновесии трансверсально-изотропной пластины Тимошенко. А именно, доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционалом качества выступает значение производной функционала энергии по отношению к параметру возмущения плоской трещины. Функции управления задаются малым параметром $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, характеризующим угол наклона плоской трещины. С точки зрения критерия разрушения Гриффитса, в работе обосновано существование оптимального угла наклона плоской трещины, который представляет собой наименьшую опасность по отношению к возможному распространению трещины. Установлено, что при стремлении $\alpha_n \to \alpha^*$ решения ξ^{α_n}, соответствующие углам α_n наклона плоскости трещины, сходятся сильно к решению ξ^{α^*}.

2. Вариационная задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Для неотрицательного параметра $\delta \in [0, \delta_0]$ и постоянного числа $l > 0$ введем семейство множеств $\Gamma_\delta = \{(x_1, x_2) :\ 0 < x_1 < l + \delta,\ x_2 = 0\}$. Будем считать, что $\Gamma_{\delta_0} \subset \Omega$ (см. Рис. 1).

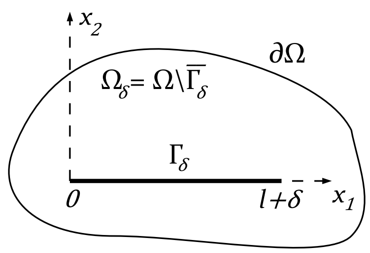

Рис.1 Схема задачи.

Для фиксированных $\delta \in [0, \delta_0]$, $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ будем предполагать, что в исходном недеформированном состоянии пластина, содержащая наклонную трещину задается в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ множеством $\Omega \times [-h, h] \setminus \overline{\Xi}(\alpha, \delta)$, где поверхность

$$\Xi(\alpha, \delta) = \{(x_1, x_2, z) \,|\, 0 < x_1 < l + \delta,\ z = x_2 \operatorname{tg} \alpha,\ \alpha = \text{const}\}$$

является частью плоскости и соответствует трещине (разрезу) нулевой ширины. Срединная плоскость недеформированной пластины находится в плоскости $z = 0$, система координат (x_1, x_2, z) является декартовой. Толщина пластины считается постоянной и равной $2h$. В срединной плоскости рассмотрим область с разрезом $\Omega_\delta = \Omega\backslash\bar{\Gamma}_\delta$. Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $x = (x_1, x_2)$ ($W = (w_1, w_2)$ и w — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно). Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$. В соответствии с направлением оси x_2 выберем положительный Γ_δ^+, $\Xi(\alpha,\delta)^+$ и отрицательный Γ_δ^-, $\Xi(\alpha,\delta)^-$ берега кривой Γ_δ и поверхности $\Xi(\alpha,\delta)$. В случае, когда след функции v выбирается на положительном берегу, используется обозначение $v^+ = v|_{\Gamma_\delta^+}$, на отрицательном берегу — обозначение $v^- = v|_{\Gamma_\delta^-}$. Скачок функции на Γ_δ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Выпишем далее соотношения, выполненные для трансверсально-изотропной пластины Тимошенко [12]. Введем тензоры, описывающие деформацию пластины

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}),\ i,j = 1,2,\ (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\psi) = a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2}a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(W), \quad i,j,r,l = 1,2, \tag{1}$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), где ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijrl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D,\ a_{iijj} = D\text{æ},\ a_{ijij} = a_{ijji} = D(1-\text{æ})/2,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

где D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1,2, \tag{2}$$

где $\Lambda = 2k^2Gh$, k^2 — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ; k^2, G — постоянные.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\delta)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Введем пространство $H(\Omega_\delta) = H^{1,0}(\Omega_\delta)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_\delta = \|\cdot\|_{H(\Omega_\delta)}$. Для удобства положим $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_0)}$. Определим билинейную форму

$$B_\delta(\eta,\bar\eta) = \int\limits_{\Omega_\delta} b(\eta,\bar\eta)d\Omega_\delta,$$

$$b(\eta,\bar\eta) = \left\{\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar W) + m_{ij}(\psi)\,\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i)\right\}$$

для произвольных функций $\eta = (W,w,\psi) \in H(\Omega_\delta)$, $\bar\eta = (\bar W,\bar w,\bar\psi) \in H(\Omega_\delta)$. Важно отметить, что для билинейной формы справедлива следующая оценка (см. [13])

$$B_\delta(\eta,\eta) \geq c_\delta\|\eta\|_\delta^2 \quad \forall\, \eta \in H(\Omega_\delta), \quad \delta \in [0,\delta_0], \tag{3}$$

где постоянная $c_\delta > 0$ не зависит от η. Заметим, что благодаря данному неравенству, норма, определенная равенством $\|\cdot\|'_\delta = (B_\delta(\cdot,\cdot))^{\frac{1}{2}}$, эквивалентна стандартной норме $\|\cdot\|_\delta$ в пространстве $H(\Omega_\delta)$.

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω_δ, имеет вид

$$\Pi(\Omega_\delta,\eta) = \frac{1}{2}B_\delta(\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_\delta} F\eta\, d\Omega_\delta\,, \quad \eta = (W,w,\psi),$$

где вектор $F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)\in C^1(\overline{\Omega})^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [12]. На внешней границе $\partial\Omega$ зададим условия жесткого защемления

$$w=0,\quad \psi=W=(0,0).$$

Зафиксируем параметры $\delta\in[0,\delta_0]$, $\alpha\in[-\alpha_0,\alpha_0]$. На Γ_δ будем требовать выполнение условий, описывающих непроникание противоположных берегов наклонной трещины, которая задается с помощью поверхности $\Xi(\alpha,\delta)$

$$[w_2]+[w]\mathrm{tg}\alpha\geq h|[\psi_2]|\quad \text{на}\quad \Gamma_\delta\,. \tag{4}$$

Вывод и обоснование краевого условия (4) можно найти в [3]. Рассмотрим множество допустимых функций

$$K(\alpha,\delta,\Omega_\delta)=\{\eta=(W,w,\psi)\in H(\Omega_\delta)\,|\,[w_2]+[w]\mathrm{tg}\alpha\geq h|[\psi_2]|\quad \text{на}\quad \Gamma_\delta\}.$$

Задачу о равновесии пластины Тимошенко с наклонным разрезом сформулируем в виде задачи минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_\delta,\eta)$ на множестве допустимых функций $K(\alpha,\delta,\Omega_\delta)$ (см. [3]):

$$\Pi(\Omega_\delta,\xi_\delta^\alpha)=\min_{\eta\in K(\alpha,\delta,\Omega_\delta)}\Pi(\Omega_\delta,\eta). \tag{5}$$

Известно, что решение $\xi=\xi_\delta^\alpha$ задачи (5) существует и единственно [3]. Кроме того, справедливо вариационное неравенство

$$B_\delta\big(\xi_\delta^\alpha,\eta-\xi_\delta^\alpha\big)\geq\int\limits_{\Omega_\delta}F\big(\eta-\xi_\delta^\alpha\big)\,d\Omega_\delta\quad\forall\,\eta\in K(\alpha,\delta,\Omega_\delta). \tag{6}$$

Для того, чтобы сформулировать задачу оптимального управления и определить функционал качества рассмотрим следующий предел при стремлении параметра δ возмущения трещины к нулю

$$\frac{d\Pi(\alpha,\Omega_\delta,\xi_\delta^\alpha)}{d\delta}|_{\delta=0}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\delta,\xi_\delta^\alpha)-\Pi(\Omega_0,\xi_0^\alpha)}{\delta}. \tag{7}$$

Приведем рассуждения, позволяющие установить существование предела (7) и обоснуем возможность применения при вычислении предела (7) тех же методов, что и для случая вертикальной трещины (см.[7]).

Итак, введем дифференцируемое преобразование, отображающее Ω_δ биективно на Ω_0, следующим образом. Рассмотрим функцию $\theta\in C_0^\infty(\Omega)$, такую что $\theta=1$ в окрестности точки $x_l=(l,0)$, $\theta=0$ в окрестности точки $x_0=(0,0)$. Определим преобразование независимых переменных по формулам

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=x_1-\delta\theta(x_1,x_2)\,,\\ y_2=x_2\,,\end{array}\right. \tag{8}$$

где $y=(y_1,y_2)\in\Omega_0$; $(x_1,x_2)\in\Omega_\delta$. Якобиан преобразования $y=y(x,\delta)$, определенного формулами (8), равен

$$q_\delta(x)=\Big|\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}\Big|=1-\delta\theta_{,1}\,.$$

Пусть $x=x(y,\delta)$ — преобразование, обратное к преобразованию $y=y(x,\delta)$. Рассмотрим произвольную функцию $g(x)$, $x\in\Omega_\delta$ и с помощью преобразования (8) определим в области Ω_0 функцию $\hat{g}(y)$ следующим равенством: $\hat{g}(y)\equiv g(x)$. Запишем формулы для частных производных в новых переменных:

$$g_{,1}=\hat{g}_{,1}-\delta\theta_{,1}\hat{g}_{,1},\quad g_{,2}=\hat{g}_{,2}-\delta\theta_{,2}\hat{g}_{,1}.$$

Преобразование $x = x(y, \delta)$ при достаточно малых δ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$ и $K(\alpha, 0, \Omega_0)$. В самом деле, $q_\delta > \frac{1}{2}$ при малых δ. Это влечет, то что области Ω_0 и Ω_δ отображаются взаимно однозначно. Отсюда, в свою очередь, следует, что пространство $H(\Omega_0)$ отображается с помощью $x = x(y, \delta)$ на $H(\Omega_\delta)$ взаимно однозначно. Более подробно о взаимной однозначности пространств $H^{1,0}(\Omega_0)$ и $H^{1,0}(\Omega_\delta)$ по отношению к преобразованию, имеющем вид (8) можно найти в [10]. Далее покажем, что образ произвольной функции из $K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$ принадлежит $K(\alpha, 0, \Omega_0)$, и наоборот. Действительно, пусть $x \in \Omega_\delta$, $y \in \Omega_0$, $\eta(x) = \hat{\eta}(y)$, где $x = x(y, \delta)$. Предположим сначала, что $\eta \in K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$. Это означает, что справедливо включение $\eta \in H(\Omega_\delta)$ и выполнено неравенство

$$[w_2] + [w]\mathrm{tg}\alpha \geq h\big|[\psi_2]\big|, \ x \in \Gamma_\delta.$$

По построению, очевидно, что $[\hat{w}_2] + [\hat{w}]\mathrm{tg}\alpha \geq h\big|[\hat{\psi}_2]\big|$, $y \in \Gamma_0$. Аналогично, можно показать обратное: из включения $\hat{\eta} \in K(\alpha, 0, \Omega_0)$ следует принадлежность η множеству $K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$.

Таким образом, при достаточно малых $\delta > 0$ решению $\xi_\delta^\alpha(x)$ задачи о равновесии можно поставить в соответствие функцию из множества $K(\alpha, 0, \Omega_0)$: $\hat{\xi}_\delta^\alpha(y) = \xi_\delta^\alpha(x)$, $y \in \Omega_0$. При $\delta = 0$ в качестве $\hat{\xi}_0^\alpha$ примем ξ_0^α. Рассуждая так же как в [7], можно показать, что с помощью замены переменных $x = x(y, \delta)$ в интегралах функционала энергии $\Pi(\Omega_\delta, \eta)$ $(\delta > 0)$ его можно представить в виде функционала $\Pi_\delta(\Omega_0, \hat{\eta})$. При этом $\Pi_\delta(\Omega_0, \hat{\eta})$ выражается суммой интегралов по области Ω_0 и имеет место следующее представление (см. [7])

$$\Pi(\Omega_\delta, \eta) = \Pi_\delta(\Omega_0, \hat{\eta}) = \Pi(\Omega_0, \hat{\eta}) + \delta \int\limits_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2}\theta_{,1} b(\hat{\eta}, \hat{\eta}) - \Big(\sigma_{ij}(\hat{W})\hat{w}_{i,1}\theta_{,j} + \right.$$
$$\left. + \ m_{ij}(\hat{\psi})\hat{\psi}_{i,1}\theta_{,j} + q_i(\hat{w}, \hat{\psi})\hat{w}_{,1}\theta_{,i} + (\theta f_i)_{,1}\, \hat{\eta}_i \Big) \right\} d\Omega_0 + r(\delta, \hat{\eta}), \tag{9}$$
$$\|r(\delta, \hat{\eta})\|_{L^1(\Omega_0)} \leq p(\delta)(\|\hat{\eta}\|^2 + \|\hat{\eta}\|), \quad 0 \leq p(\delta) = o(\delta) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Из взаимной однозначности множеств $K(\alpha, 0, \Omega_0)$ и $K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$ следует

$$\min_{\eta \in K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \eta) = \min_{\eta \in K(\alpha, 0, \Omega_0)} \Pi_\delta(\Omega_0, \eta).$$

Далее, применяя, по сути, те же рассуждения, которые были проведены для пластины с вертикальной трещиной [7], можно установить для фиксированного параметра $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ существование предела (7). Более того, справедлива формула

$$G(\alpha, \xi_0^\alpha) = \frac{d\Pi(\alpha, \Omega_\delta, \xi_\delta^\alpha)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} = \int\limits_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2}\theta_{,1} b(\xi_0^\alpha, \xi_0^\alpha) - \Big(\sigma_{ij}(U_0^\alpha)u_{0i,1}^\alpha\theta_{,j} + \right.$$
$$\left. + \ m_{ij}(\phi_0^\alpha)\phi_{0i,1}^\alpha\theta_{,j} + q_i(u_0^\alpha, \phi_0^\alpha)u_{0,1}^\alpha\theta_{,i} + (\theta f_i)_{,1}\, \xi_{0i}^\alpha \Big) \right\} d\Omega_0. \tag{10}$$

Пределы вида (7), в которых находится производная функционала энергии имеют важное прикладное значение в механике разрушения. Согласно хорошо известному критерию разрушения Гриффитса, разрушение тела возможно тогда, когда производная функционала энергии по длине трещины достигает некоторой критической величины, зависящей от свойств материала пластины [14], [15].

3. Задача оптимального управления

Далее, для удобства в обозначении решения задачи (5), соответствующего параметру $\delta = 0$ будем опускать далее индекс 0, т.е. положим, что $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha$. В соответствии с результатами предыдущего пункта заметим, что функция $G(\alpha, \xi^\alpha)$, определенная равенством (10), задана для всех $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$.

Сформулируем теперь задачу оптимального управления: требуется найти число $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, такое что

$$G(\alpha^*, \xi^{\alpha *}) = \sup_{\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]} G(\alpha, \xi^\alpha). \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены приведенные ранее предположения. Тогда задача оптимального управления* (11) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — минимизирующая последовательность, соответствующая задаче (11). В силу ограниченности интервала $[-\alpha_0, \alpha_0]$ из $\{\alpha_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (с прежним обозначением) $\alpha_n \to \alpha^*$, где α^* некоторое число из интервала $[-\alpha_0, \alpha_0]$. В соответствии с утверждением доказанной ниже леммы 1, можно выделить подпоследовательность такую, что $\alpha_n \to \alpha^*$ при $n \to \infty$, и для которой $\xi^{\alpha_n} \to \xi^{\alpha^*}$ при $n \to \infty$ сильно в пространстве $H(\Omega_0)$. Для этой последовательности, в силу сильной сходимости справедливо соотношение

$$G(\alpha_n, \xi^{\alpha_n}) \to G(\alpha^*, \xi^*) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит, α^* — решение задачи оптимального управления (11). Теорема доказана. □

Лемма 1. *Пусть $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ — фиксированное число, ξ^α, ξ^{α^*} — решения задачи* (5)*, соответствующие параметрам $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ и α^* ($\delta = 0$). Тогда*

$$\xi^\alpha \to \xi^{\alpha^*} \quad \textit{при} \quad \alpha \to \alpha^*$$

сильно в пространстве $H(\Omega_0)$.

Доказательство. Предположим противное. А именно, пусть существуют $\epsilon > 0$ и последовательность $\{\alpha_n\}$, такие что

$$\alpha_n \to \alpha^*; \quad \alpha_n \in [-\alpha_0, \alpha_0], \quad \|\xi^{\alpha_n} - \xi^{\alpha^*}\| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Для любого фиксированного $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ имеет место соотношение

$$B_0(\xi^\alpha, \xi^\alpha) = \int_{\Omega_0} F \xi^\alpha \, d\Omega_0.$$

Отсюда, нетрудно получить равномерную по α оценку

$$\|\xi^\alpha\| \leq C.$$

Значит, из последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выделить последовательность с прежним обозначением, для которой соответствующая последовательность функций $\{\xi^{\alpha_n}\}$ слабо сходится в $H(\Omega_0)$ к некоторой функции $\tilde{\xi}$ при $\alpha_n \to \alpha^*$. Далее докажем, что $\tilde{\xi} = \xi^{\alpha^*}$. В силу слабой сходимости $\{\xi^{\alpha_n}\}$ в $H(\Omega_0)$, по теореме вложения для пространств Соболева (см., например, [16]), имеем сильную сходимость $\xi^{\alpha_n} \to \tilde{\xi}$ в $L_2(\Gamma_0)^5$ при $\alpha_n \to \alpha^*$. Далее, выделяя при необходимости подпоследовательность, можно считать что $\xi^{\alpha_n} \to \tilde{\xi}$ п.в. на Γ_0 при $\alpha_n \to \alpha^*$. Поэтому, переходя к пределу в неравенствах

$$[w_2^{\alpha_n}] + [w^{\alpha_n}]\mathrm{tg}\alpha_n \geq h\big|[\psi_2^{\alpha_n}]\big| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0$$

при $\alpha_n \to \alpha^*$ имеем

$$[\tilde{w}_2] + [\tilde{w}]\mathrm{tg}\alpha^* \geq h\big|[\tilde{\psi}_2]\big| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0.$$

Это означает, что $\tilde{\xi} \in K(\alpha, 0, \Omega_0)$.

Далее построим для любой пробной функции $\eta \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0)$ последовательность $\{\eta^\alpha\}$ такую, что $\eta^\alpha \in K(\alpha, 0, \Omega_0)$ и $\eta^\alpha \to \eta^{\alpha^*}$ сильно в пространстве $H(\Omega_0)$ при $\alpha \to \alpha^*$. Для этого достаточно рассмотреть функции вида

$$\eta^\alpha = (W^\alpha, w^\alpha, \psi^\alpha) = \eta^{\alpha^*} + (0, w(\mathrm{tg}\alpha^* - \mathrm{tg}\alpha), 0, 0, 0).$$

Легко проверить, что построенная функция удовлетворяет необходимым свойствам. В самом деле, включение $\eta^\alpha \in H(\Omega_0)$ очевидно. Проверим выполнение условия непроникания (4). По построению имеем

$$[w_2^\alpha] = [w_2^{\alpha^*}] + [w]\Big(\mathrm{tg}\alpha^* - \mathrm{tg}\alpha\Big), \quad [\psi_2^\alpha] = [\psi_2^{\alpha^*}], \quad [w^\alpha] = [w^{\alpha^*}] \quad \text{на} \quad \Gamma_0.$$

В силу включения $\eta \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0)$ справедливо неравенство

$$[w_2^{\alpha^*}] + [w^{\alpha^*}]\Big(\mathrm{tg}\alpha^* - \mathrm{tg}\alpha\Big) + [w^{\alpha^*}]\mathrm{tg}\alpha \geq h|[\psi_2^{\alpha^*}]| \quad \text{п.в. на} \quad \Gamma_0.$$

Следовательно, $\eta^\alpha \in K(\alpha, 0, \Omega_0)$.

Подставим теперь в вариационное неравенство соответствующее α_n, пробные функции вида η^{α_n}. В результате получим

$$B_0\big(\xi^{\alpha_n}, \eta^{\alpha_n} - \xi^{\alpha_n}\big) \geq \int\limits_{\Omega_0} F\big(\eta^{\alpha_n} - \xi^{\alpha_n}\big) d\Omega_0.$$

Перейдем к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$. В итоге находим

$$B_0(\tilde{\xi}, \eta - \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\eta - \tilde{\xi}) d\Omega_0 \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0). \tag{12}$$

Принимая во внимание единственную разрешимость задачи (12), получим $\tilde{\xi} = \xi^{\alpha^*}$. Далее, в силу слабой сходимости выведем следующее тождество

$$\lim_{n\to\infty} B_0(\xi^{\alpha_n}, \xi^{\alpha_n}) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_0} F\xi^{\alpha_n} d\Omega_0 = \int\limits_{\Omega_0} F\xi^{\alpha^*} d\Omega_0.$$

Последнее равенство, ввиду эквивалентности в $H(\Omega_0)$ стандартной нормы и нормы $\|\cdot\|'_\delta$, введенной с помощью билинейной формы, означает сильную сходимость $\xi^{\alpha_n} \to \xi^{\alpha^*}$ в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$. Таким образом мы получили противоречие с предположением. Это означает, что для любой последовательности $\{\alpha_n\} \subset [-\alpha_0, \alpha_0]$ сходящейся к α^* выполняется

$$\|\xi^{\alpha_n} - \xi^{\alpha^*}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha_n \to \alpha^*.$$

Последнее приводит к утверждению леммы 1. □

Полученная в лемме 1 сходимость позволяет выписать следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha, \alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ *и справедливы предыдущие предположения. Тогда при* $\alpha \to \alpha^*$ *справедливо следующее соотношение*

$$\lim_{\alpha \to \alpha^*} \frac{d\Pi(\alpha, \Omega_\delta, \xi_\delta^\alpha)}{d\delta}|_{\delta=0} = \frac{d\Pi(\alpha^*, \Omega_\delta, \xi_\delta^{\alpha^*})}{d\delta}|_{\delta=0},$$

описывающее непрерывную зависимость производной функционала энергии от угла наклона плоской трещины.

References

[1] A.M. Khludnev, *Equilibrium problem of an elastic plate with an oblique crack*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **38**:5 (1997), 757–761. MR1488608

[2] V.A. Kovtunenko, A.N. Leont'ev, A.M. Khludnev, *Equilibrium problem of a plate with an oblique cut*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **39**:2 (1998), 302–311. MR1663907

[3] N.P. Lazarev, *Equilibrium problem for a Timoshenko plate with an oblique crack*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **54**:4 (2013), 662–671. MR3137143

[4] N.P. Lazarev, *Differentiation of the energy functional in the equilibrium problem for a plate with an oblique crack*, Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, **3**:2 (2003), 62–73. Zbl 1050.74041

[5] E.M. Rudoy, *Asymptotics of the energy functional for a fourth-order mixed boundary value problem in a domain with a cut*, Siberian Mathematical Journal, **50**:2 (2009), 341–354. Zbl 1224.35099

[6] E.M. Rudoy, *Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body*, Z. Angew. Math. Phys., DOI 10.1007/s00033-014-0471-0.

[7] N.P. Lazarev, *The Griffith formula for a Timoshenko-type plate with a curvilinear crack*, Sib. Zh. Ind. Mat., **16**: 2 (2013), 98–108. MR3203345

[8] V.V. Shcherbakov, *Existence of an optimal shape of the thin rigid inclusions in the Kirchhoff–Love plate*, J. Appl. Indust. Math., **8**:1 (2014), 97–105. MR3234800

[9] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Solids*, Southampton, WIT-Press, Boston, 2000.

[10] A.M. Khludnev, *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010.

[11] N.P. Lazarev, *An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **6**:(1) (2013), 53–62.

[12] B.L. Pelekh, *Theory of Shells with Finite Shear Modulus*, Nauk. Dumka, Kiev, 1973. Zbl 0273.73055

[13] N.P. Lazarev, *An equilibrium problem for a Timoshenko plate with a through crack*, Sib. Zh. Ind. Mat., **14**:4 (2011), 32–43. MR2954005

[14] G.P. Cherepanov, *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, New-York, 1979. Zbl 0442.73100

[15] V.Z. Parton, E.M. Morozov, *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, 1989. MR1088737

[16] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics*, 140, Elsevier, Academic Press, New York, 2003. MR2424078

Nyurgun Petrovich Lazarev
North-Eastern Federal University,
Belinsky, 58,
677891, Yakutsk, Russia
E-mail address: nyurgun@ngs.ru

Natalia Valerianovna Neustroeva
North-Eastern Federal University,
Belinsky, 58,
677891, Yakutsk, Russia
E-mail address: nnataliav@mail.ru

Natalia Afanasevna Nikolaeva
North-Eastern Federal University,
Belinsky, 58,
677891, Yakutsk, Russia
E-mail address: nate_77@mail.ru