S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 318–327 (2015) УДК 519.17

DOI 10.17377/semi.2015.12.026 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$

А.М. КАГАЗЕЖЕВА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$. It is obtained the description of vertex-transitive distance-regular graph with intersection array $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$ and nonsovable automorphism group.

Keywords: distance-regular graph, automorphism group, antipodal cover.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован.

В [1] начато решение задачи изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 3. А именно, получена редукция задачи к изучению дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными сильно регулярными графами с неглавным собственным значением 3. В [2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением 3 и параметрами $(v', k', 5, \mu')$.

Kagazezheva, A.M., Automorphisms of a graph with intersection array $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$.

Работа выполнена при поддержке программ исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

Поступила 4 апреля 2015 г., опубликована 26 мая 2015 г.

Предложение 1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Δ — *исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением* 3 *и* $\lambda = 5$, *то* Δ *имеет параметры* $(21, 10, 5, 4)$, $(111, 30, 5, 9)$ *или* $(169, 42, 5, 12)$;

(2) *если* Γ — *дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением* 3 *и параметрами* $(v', k', 5, \mu')$, *то окрестности вершин либо изоморфны треугольному графу* $T(7)$ *и* Γ — *половинный граф* 7*-куба, либо сильно регулярны с параметрами* $(169, 42, 5, 12)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$.

В данной работе изучаются возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (169,42,5,12) и автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$.

Предложение 2. *Пусть* Δ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(169, 42, 5, 12)$, $G = \mathrm{Aut}(\Delta)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф,* $p = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 0$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $p = 7$, $n = 1$, $\alpha_1(g) = 42$, *либо* $p = 3$, $n = 1, 4$ *и* $\alpha_1(g) = 3n + 39l$, *либо* $p = 2$, $n = 1, 3, 5$ *и* $\alpha_1(g) = 3n + 26l$;

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $m \geq 2$, *либо* $p = 3$, $m = 4, 7, ..., 31$ *и* $\alpha_1(g) = 3m + 39l$, *либо* $p = 2$, $m = 3, 5, ..., 31$ *и* $\alpha_1(g) = 3m + 26l$;

(4) Ω *содержит ребро и является объединением* t *изолированных клик, либо* $p = 3$, t *сравнимо с* 1 *по модулю* 3 *и порядки клик равны* 1 *или* 4, *либо* $p = 2$, t *нечетно и порядки клик равны* $1, 3$ *или* 5;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо* $p = 5$, $|\Omega| \in \{4, 12, ..., 49\}$, *либо* $p = 3$, $|\Omega| \in \{4, 7, ..., 49, 52\}$, *либо* $p = 2$, $|\Omega| \in \{5, 7, ..., 49, 51\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$ имеет $v = 170 \cdot 4 = 680$ вершин и спектр $169^1, 13^{255}, -1^{169}, -13^{255}$. Ввиду границы Хофмана-Дельсарта максимальный порядок клики в графе Γ не больше $1 - k/\theta_3 = 14$.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит по* s *вершин в* t *антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф и либо*

(*i*) $p = 17$, $\alpha_1(g) = 16 \cdot 17$, $\alpha_2(g) = 24 \cdot 17$, *либо*

(*ii*) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 5(26m + 8)$ *и* $\alpha_2(g) = 5(128 - 26m)$, *либо*

(*iii*) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 4l$, $\alpha_1(g) = 170 + 26m + 12l$ *и* $\alpha_2(g) = 510 - 26m - 16l$;

(2) $p = 19$, *либо* Ω — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$, *либо* $t = 37$;

(3) $p = 13$, *либо* Ω — *антиподальный класс, либо* Ω — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 9, 1; 1, 3, 13\}$, *либо* $t = 27, 40$;

(4) $p = 11$ *и* Ω — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{37, 27, 1; 1, 9, 37\}$;

(5) $p = 7$ *и* $t = 2, 9, 16, 23, 30, 37$;

(6) $p = 5$, *либо* Ω — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, *либо* $t = 15, 20, 25, 30, 35, 40$;

(7) $p = 3$, *либо* $s = 4$ *и* $t = 2, 5, 8, ..., 41$, *либо* $s = 1$, Ω *является* t*-кликой и* $t = 2, 5, 8, 11, 14$;

(8) $p = 2$, t *четно и либо* $s = 4$, $t \leq 42$, *либо* $s = 2$ *и* $t \leq 86$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(169, 42, 5, 12)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* $p > 2$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *— непустой граф, содержащий по* s *вершин в* t *антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *некоторая* $\langle g\rangle$*-орбита на* $\Gamma - \Omega$ *содержит геодезический* 2*-путь, либо* $p = 7$ *и* $t = 2$, *либо* $p = 5$ *и* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;

(2) *некоторая* $\langle g\rangle$*-орбита на* $\Gamma - \Omega$ *является кликой,* $p = 3$ *и либо* $s = 4$, $t = 2, 5$ *и* Ω *является объединением четырех изолированных* t*-клик, либо* $s = 1$ *и* Ω *является* 2*-кликой;*

(3) *каждая* $\langle g\rangle$*-орбита на* $\Gamma - \Omega$ *является кокликой и либо* $p = 13$, Ω *— антиподальный класс, либо* $p = 5$ *и* $t = 40$, *либо* $p = 3$, $s = 4$ *и* $t = 14$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(169, 42, 5, 12)$. *Если* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *— неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то* $S = S(G)$ *является элементарной абелевой* 2*-группой, факторгруппа* $\bar{G} = G/S$ *изоморфна* $Sp_4(4)$, *для вершины* $a \in \Gamma$ *имеем* $G_a = 2^6 : (Z_3 \times A_5)$, S *содержит нормальную в* G *подгруппу* K *порядка* 4, *регулярную на каждом антиподальном классе,* $|S : S_{\{F\}}| = 2$ *для антиподального класса* F, S/K *является неприводимым* $F_2Sp_4(4)$*-модулем порядка* $2^8, 2^{16}$ *или* 2^{32} *и* $C_S(f) = K$ *для элемента* f *порядка* 17 *из* G.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теорем.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(v, k, 5, 12)$. *Тогда* Γ *— имеет параметры* $(169, 42, 5, 12)$ *или* $(93457, 1056, 5, 12)$.

Доказательство. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 5, 12)$. Тогда $49 + 4(k - 12) = (2u + 1)^2$, поэтому $k = u^2 + u$, Γ имеет неглавные собственные значения $u - 3$, $-(u + 4)$ и кратность $u - 3$ равна $(u + 3)(u^2 + u)(u^2 + 2u + 4)/12(2u + 1)$. Так как $(2u + 1, u + 3)$ делит 5, $(2u + 1, u + 2)$ делит 3, $(2u + 1, u^2 + 2u + 4)$ делит 13, то $2u + 1$ делит $15 \cdot 13$, 12 делит $(u + 3)(u^2 + u)(u^2 + 2u + 4)$ и $u \in \{6, 32\}$. Отсюда Γ — имеет параметры $(169, 42, 5, 12)$ или $(93457, 1056, 5, 12)$.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с собственными значениями* k, r, s, $s < 0$ *на* v *вершинах. Если* Γ *содержит индуцированный регулярный подграф степени* d *на* w *вершинах, то* $s \leq d - (k - d)w/(v - w) \leq r$.

Доказательство. Утверждение доказано в [3].

Лемма 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с* $\lambda = \mu$. *Через* n^* *обозначим часть натурального числа* n, *свободную от квадратов. Тогда*

(1) *если* $k \equiv 1 \ (mod\ 4)$ *и* r *четно, то* $p \equiv 1 \ (mod\ 4)$ *для любого нечетного простого числа* p, *делящего* k^*;

(2) *если* k *четно, то* $(-1)^{(r-1)/2}r$ *— квадрат по модулю* p *для любого нечетного простого числа* p, *делящего* k^*.

Доказательство. См. теорему 5.4 из [4]

Доказательство предложения 2 и теоремы 1 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathbf{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [5]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

2. Доказательство предложения 2

В этои параграфе Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(169, 42, 5, 12)$, $G = \mathrm{Aut}(\Delta)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Δ имеет спектр $42^1, 3^{126}, -10^{42}$ и ввиду границы Хофмана порядок клики в Δ не больше 5, порядок коклики в Δ не больше 32.

Лемма 4. *Пусть* χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 42. *Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/13 + 3$ *и* $\chi_2(g) - 42$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 126 & 9 & -4 \\ 42 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (42\alpha_0(g) - 10\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g))/169$. Учитывая равенство $\alpha_2(g) = 169 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/13 + 3$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [6].

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то* $p = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$*,* $p = 7$*,* $\alpha_1(g) = 42$ *или* $p = 3$*,* $\alpha_1(g) = 39l+3$*, или* $p = 2$*,* $\alpha_1(g) = 26l+16$*, либо* $p = 3$*,* $n = 4$ *и* $\alpha_1(g) = 39l+12$*, либо* $p = 2$*,* $n = 3$*,* $\alpha_1(g) = 26l - 4$ *или* $n = 5$*,* $\alpha_1(g) = 26l + 2$*;*

(3) *если* Ω *является* m*-кликой, то* $p = 3$*,* $m = 3s + 1$ *и* $\alpha_1(g) = 39l + 9s + 3$ *или* $p = 2$*,* $m = 2t + 1$ *и* $\alpha_1(g) = 26l + 6t + 16$*;*

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением не менее двух изолированных клик, то* $p = 3$*, порядки максимальных клик из* Ω *равны* $1, 4$ *и число максимальных клике в* Ω *сравнимо с* 1 *по модулю* 3 *или* $p = 2$*, порядки максимальных клик из* Ω *равны* $1, 3, 5$ *и число максимальных клике в* Ω *нечетно.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Тогда $p = 13$. Далее, $\chi_2(g) = \alpha_1(g)/13+3$ и $\chi_2(g)-42$ делится на 13, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 169 и $\alpha_1(g) = 0$ или $\alpha_1(g) = 169$. Но в последнем случае каждая $\langle g\rangle$-орбита является 13-кликой, противоречие.

Пусть Ω является n-кликой. В случае $n = 1$ число p делит 42 и 126, поэтому $p = 2, 3, 7$ и $\chi_2(g) = (3 - \alpha_1(g))/13 + 3$. Если $p = 7$, то $\alpha_1(g) = 42$, если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 39l + 3$, и если $p = 2$, то $\alpha_1(g) = 26l + 16$. Пусть $n > 1$. Тогда p делит 36, 90 и $7 - n$, поэтому $p = 2, 3$ и $\chi_2(g) = (3n - \alpha_1(g))/13 + 3$. Если $p = 3$, то $n = 4$ и $\alpha_1(g) = 39l + 12$, а если $p = 2$, то $n = 3$, $\alpha_1(g) = 26l - 4$ или $n = 5$, $\alpha_1(g) = 26l + 2$.

Пусть Ω является m-кликой, $m > 1$. Тогда p делит 12, 30 и $97 - m$, поэтому $p = 2, 3$ и $\chi_2(g) = (3m - \alpha_1(g))/13 + 3$. Если $p = 3$, то $m = 3s + 1$ и $\alpha_1(g) = 39l + 9s + 3$, а если $p = 2$, то $m = 2t + 1$ и $\alpha_1(g) = 26l + 6t + 16$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением не менее двух изолированных клик. Если две вершины a, b принадлежат максимальной r-клике из Ω, то p делит 36, $7-r$ и $90-(|\Omega|-r)$. Если две вершины a, b не смежны и принадлежат максимальным r_1, r_2-кликам из Ω, то p делит 12, $31-r_i$ и $95-(|\Omega|-(r_1+r_2))$. Отсюда $p = 2, 3$.

Если $p = 3$, то $r_i = 1, 4$ и число максимальных клике в Ω сравнимо с 1 по модулю 3. Если $p = 2$, то $r_i = 1, 3, 5$ и число максимальных клике в Ω нечетно.

Лемма 6. *Если* Ω *содержит геодезический 2-путь* b, a, c*, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 5$*,* $|\Omega| \in \{4, 12, ..., 49\}$*;*

(2) $p = 3$*,* $|\Omega| \in \{4, 7, ..., 49, 52\}$*;*

(3) $p = 2$*,* $|\Omega| \in \{5, 7, ..., 49, 51\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $[a]$ не содержится в Ω для любой вершины $a \in \Omega$. В противном случае для любой вершины $u \in \Gamma - (\Omega \cup a^\perp)$ подграф $[u] \cap \Omega$ содержит 12 вершин из $[a]$, поэтому $\Omega = a^\perp$ и $\alpha_1(g) = 0$. Противоречие с тем, что $\chi_2(g) = 129/13 + 3$.

Если $p > 11$, то $\lambda_\Omega = 5$, $\mu_\Omega = 12$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 5, 12)$, противоречие с леммой 1.

Пусть $p = 11$. Тогда $\lambda_\Omega = 5$, $\mu_\Omega = 1, 12$, степени вершин в Ω равны 20 и $|\Omega| = 26, 37, 48$. Теперь число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $20 \cdot 14 = 12y + (27 - y)$. Отсюда $y = 23$ и для двух вершин e_1, e_2 из Ω, смежных с единственной вершиной из $\Omega(a)$ подграф $[e_1] \cap [e_2]$ содержит не менее 13 вершин из $\Omega_2(a)$, если e_1, e_2 не смежны, и не менее 11 вершин из $\Omega_2(a)$, если e_1, e_2 смежны, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\lambda_\Omega = 5$, $\mu_\Omega = 5, 12$, степени вершин в Ω равны $14, 28$ и $|\Omega| = 29, 36, 43, 50$. Если степень вершины a в Ω равна 28, то $\Omega(a)$ не содержит вершин степени 28 в Ω, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 8$, но не больше $12(|\Omega| - 29)$. Поэтому $|\Omega| = 50$, указанное число ребер равно $28 \cdot 8 = 12y + 5(21 - y)$ и $y = 17$. Если e — вершина из $\Omega - a^\perp$ степени 28 в Ω, то $[e]$ содержит 12 вершин из $\Omega(a)$ и 16 вершин из $\Omega_2(a)$. В любом случае Ω содержит не более двух вершин степени 28 в Ω и для вершины d степени 14 в Ω, несмежной с вершинами степени 28 в Ω, число ребер между $\Omega(d)$ и $\Omega_2(d)$ равно $14 \cdot 8$, но не меньше $35 \cdot 5$, противоречие.

Значит, Ω — регулярный граф степени 14 и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $14 \cdot 8 = 12y + 5(|\Omega| - 15 - y)$. Отсюда $7y = (187 - 5|\Omega|)$ и либо $|\Omega| = 29$, $y = 6$, либо $|\Omega| = 36$, $y = 1$. В любом случае имеем противоречие с леммой 2.

В оставшихся случаях $p = 2, 3, 5$ возможности для $|\Omega|$ следуют из неравенства $|\Omega| \le v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$ (в нашем случае $|\Omega| \le 169 \cdot 12/39$).

3. Доказательство теоремы 1

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам. В случае $p > 3$ имеем $\alpha_3(g) = 0$ и любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω.

Лемма 7. *Пусть χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 255 (отвечающее собственному значению θ_1), χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 169. Тогда $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 3\alpha_3(g) - 170)/26$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1$, $\chi_1(g) - 255$ и $\chi_2(g) - 169$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 255 & 255/13 & -85/13 & -85 \\ 169 & -1 & -1 & 169 \\ 255 & -255/13 & 85/13 & -85 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g)/13 - \alpha_2(g)/13 - \alpha_3(g))/8$. Учитывая равенство $\alpha_2(g) = 680 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 3\alpha_3(g))/26 - 85/13$.

Далее, $\chi_2(g) = (169(\alpha_0(g) + \alpha_3(g)) - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/680$. Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 680 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [6].

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 130l + 40$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8l$, $\alpha_1(g) = 26m - 2l - 12$ и $\alpha_2(g) = 692 - 26m - 6l$;*

(2) *если Ω — клика, то $p = 3$ и $|\Omega| \in \{2, 5, ..., 14\}$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i \geq 1$. Так как $v = 4 \cdot 170$, то p равно 2, 5 или 17.

Пусть $p = 17$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 40$, $w_3 = 0$ и $\chi_1(g) = 17(w_1 - 10)/26$. Отсюда $w_1 = 10$.

Пусть $p = 5$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 136$, $w_3 = 0$ и $\chi_1(g) = 5(w_1 - 34)/26$. Отсюда $w_1 = 26l + 8$.

Пусть $p = 2$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 340$, $\chi_2(g) = w_3/2 - 1$ и число $\chi_2(g) - 255$ четно. Отсюда $w_3 = 4l$, $\chi_1(g) = (w_1 - 12l - 85)/13$ и $w_1 = 13m - l - 6$.

Пусть Ω является l-кликой. Тогда p делит 3. Если $l = 1$, то p делит 169, противоречие. Если $l = t > 1$, то $s = 1$ и $p = 3$ делит $44 - t$, поэтому $t \in \{2, 5, ..., 14\}$.

Лемма 9. *Если $p > 7$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 19$*, либо* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$*, либо* $t = 37$*;*

(2) $p = 13$*, либо* Ω *— антиподальный класс, либо* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 9, 1; 1, 3, 13\}$*, либо* $t = 27, 40$*;*

(3) $p = 11$ *и* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{37, 27, 1; 1, 9, 37\}$.

Доказательство. Пусть $p > 3$. Если $p > 41$, то для вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leq 2$ имеем $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, 126, 1; 1, 42, t - 1\}$, поэтому $t = 170$, противоречие.

Пусть $p = 41$. Тогда $170 - t$ делится на 41 и $t \in \{6, 47, 88, 129\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 1 по модулю 41. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 6$ и Ω — реберно регулярный граф степени 5 с $\lambda_\Omega = 1$, противоречие.

Аналогичные противоречия получаются в случаях $p = 37, 31, 29, 23$. Пусть $p = 19$. Тогда $170 - t$ делится на 19 и $t \in \{18, 37, 56, ..., 151\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 4 по модулю 19. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому либо $t = 18$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$, либо $t = 37$.

Пусть $p = 17$. Тогда $170 - t$ делится на 17 и $t \in \{17, 34, 51, ..., 153\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 8 по модулю 17. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 34$. Если $b \in \Omega(a)$, F — антиподальный класс, содержащий a, то $\Omega(b)$ содержит по 8 вершин, смежных с каждой вершиной из F. Поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{33, 24, 1; 1, 8, 33\}$. По лемме 4 такой граф не существует.

Пусть $p = 13$. Тогда $170 - t$ делится на 13 и $t \in \{1, 14, 27, ..., 157\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 3 по модулю 13. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 1, 14, 27, 40$. Если $t = 14$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 9, 1; 1, 3, 13\}$.

Пусть $p = 11$. Тогда $170 - t$ делится на 11 и $t \in \{5, 16, 27, ..., 159\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 9 по модулю 11. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 16, 27, 38$.

Если $b \in \Omega(a)$, F — антиподальный класс, содержащий a, то $\Omega(b)$ содержит по 9 вершин, смежных с каждой вершиной из F. Отсюда $t = 38$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{37, 27, 1; 1, 9, 37\}$.

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p = 7$, то $t = 2, 9, 16, 23, 30, 37$;*

(2) *если $p = 5$, то либо Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, либо $t = 15, 20, 25, 30, 35, 40$;*

(3) *если $p = 3$, то либо $s = 4$ и $t = 2, 5, 8, ..., 41$, либо $s = 1$ и Ω является t-кликой;*

(4) *если $p = 2$, то t четно и либо $s = 4$, $t \leq 42$, либо $s = 2$ и $t \leq 86$.*

Доказательство. Пусть $p = 7$. Тогда $170-t$ делится на 7 и $t \in \{2, 9, 16, ..., 163\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ делится на 7. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 9, 16, 23, 30, 37$.

Пусть $p = 5$. Тогда $170 - t$ делится на 5 и $t \in \{5, 10, ..., 165\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 2 по модулю 5. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Пусть $t = 10$. Если $b \in \Omega(a)$, F — антиподальный класс, содержащий a, то $\Omega(b)$ содержит по 2 вершины, смежных с каждой вершиной из F. Отсюда Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

Пусть $p = 3$. Тогда $170 - t$ делится на 3 и $t \in \{2, 5, 8, ..., 167\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leq 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ делится на 3. Если $s = 4$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 5, 8, ..., 41$. Если $s = 1$, то Ω является t-кликой.

Пусть $p = 2$. Тогда t четно и для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ число $[u] \cap \Omega$ четно. Если $s = 4$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 4, 6, ..., 42$.

Пусть $s = 2$. Тогда для $b \in \Omega(a)$ и $a^* \in \Omega \cap \Gamma_3(a)$ имеем $|\Omega(b) \cap ([a] \cup [a^*])| = t - 2$, поэтому t — четное число, не большее 86, и в случае равенства Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{85, 42, 1; 1, 42, 85\}$. В этом случае $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами (85,42,20,21). Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

4. Доказательство теоремы 2 и следствия

Докажем теорему 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(169, 42, 5, 12)$. Тогда порядок клики в Γ не больше 6. Ввиду предложения 2 имеем $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$, $\Delta = u^{\langle g \rangle}$ и $p > 2$.

Если Δ содержит геодезический 2-путь, то u смежна не более чем с 12 вершинами из Ω, поэтому ввиду теоремы 2 либо $p = 7$ и $t = 2, 9$, либо $p = 5$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$. Ввиду предложения 2 случай $p = 7$ и $t = 9$ не возникает.

Если Δ является кликой, то $p = 3$ и либо $s = 4$ и $t = 2, 5$, либо $s = 1$ и Ω является 2-кликой. Если же каждая $\langle g \rangle$-орбита на $\Gamma - \Omega$ является кокликой, то либо $\alpha_2(g) = 680 - \alpha_0(g)$, либо $p = 3$, $s = 1$ и Ω является t-кликой, $t = 2, 5$. В случае $\alpha_2(g) = 680 - \alpha_0(g)$ имеем $\chi_1(g) = 5(\alpha_0(g) - 17)/13$ и ввиду теоремы 1 верно одно из утверждений:

а) $p = 13$, либо Ω — антиподальный класс, либо Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 9, 1; 1, 3, 13\}$, либо $t = 27, 40$,

б) $p = 5$ и $t = 40$,

в) $p = 3$, $s = 4$ и $t = 14$.

Но в случае а) либо Ω — антиподальный класс, либо $\chi_1(g) - 255$ не делится на 13. Теорема 2 доказана.

Докажем следствие. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. Ввиду теоремы 2 имеем $\{2, 5, 17\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17\}$, причем $|G|$ не делится на 49, 169 и на 17^2.

Лемма 11. *Пусть f — элемент порядка 17 из G. Тогда $C_G(f)$ состоит из элементов, действующих без неподвижных точек на Γ, $|C_G(f)|$ не делится на 8, и если V — подгруппа 4 из $C_G(f)$, то V — четверная группа.*

Доказательство. По теореме 2 подграф $\mathrm{Fix}(f)$ является пустым.

Пусть g — элемент простого порядка $p \neq 17$ из $C_G(f)$. Из действия f на Ω следует, что подграф Ω является пустым и $p = 2, 5$. В случае $p = 2$ по теореме 1 имеем $\alpha_3(g) = 4l$ и $\alpha_1(g) = 170 + 26m + 12l$, где либо $l = m = 0$, либо $l = 0, m = 17$, либо $m = 0$, $l = 17$, либо $m = -85$, $l = 170$.

Допустим, что $C_G(f)$ содержит подгруппу V порядка 4, $g \in V$. Тогда $\alpha_1(g)$ делится на 4, поэтому либо $l = 0, m = 17$, $\alpha_1(g) = 17 \cdot 36$ и $\alpha_2(g) = 68$, либо $\alpha_3(g) = 680$. Если $l = 0, m = 17$, то $\chi_1(g) = 17$ и $\chi_1(g) - 255$ не делится на 4. В случае $l = 170$ имеем $\chi_1(g) = -85$ и $\chi_1(g) - 255$ не делится на 4. По [5, лемма 2] в любом случае в G нет таких элементов h, что $h^2 = g$. Отсюда V — четверная группа.

Если $|C_G(f)|$ делится на 8, то $\alpha_3(g) = 680$ для любой инволюции $g \in C_G(f)$, противоречие с тем, что $r = 4$. Лемма доказана.

Пусть $S = S(G)$ — разрешимый радикал группы G, $\bar{G} = G/S$ и $\bar{T}$ — компонента группы $\bar{G}$. Ввиду леммы 11 число 17 не делит $|S|$. Если $|\bar{T}|$ не делится на 17, то получим противоречие с действием элемента порядка 17 на $\bar{T}$.

Значит, $|\bar{T}|$ делится на 17, и ввиду таблицы 1 из [7] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(17)$, $L_2(16)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$, $U_4(4)$, $L_3(16)$, $Sp_6(4)$. Так как $\bar{T}$ содержит максимальную подгруппу индекса, делящего 680, то группа $\bar{T}$ изоморфна либо

(1) $L_2(16)$, $S = 1$ и $T_a = S_3$ или $L_2(17)$, $|S| = 5$ и T_a — диэдральная группа порядка 18, либо

(2) $Sp_4(4)$, $\bar{T}_a = 2^6 : (3 \times A_5)$ и $|S : S_a|$ делит 8 или $\bar{T}_a = (A_5 \times A_5) : 2$ и $|S : S_a| = 5$, либо

(3) $\Omega_8^-(2)$, $\bar{T}_a = Sp_6(2)$ и $|S : S_a| = 5$ или $Sp_8(2)$, $\bar{T}_a = O_8^+(2)$ и $|S : S_a| = 5$.

В любом случае, кроме $\bar{T} \cong Sp_4(4)$ и $\bar{T}_a = 2^6 : (3 \times A_5)$ имеем противоречие с действием G на множестве антиподальных классов.

Теперь либо $|S : S_a| = 8$, либо $\bar{G} \cong Sp_4(4).Z_2$, $\bar{G}_a = 2^6 : (3 \times A_5)$ и $|S : S_a| = 4$. В любом случае $|S : S_{\{F\}}| \leq 2$.

Допустим, что $S_{\{F\}}$ содержит нееднничную нормальную в G подгруппу K. Тогда $\alpha_3(g) = 680$ для любой инволюции $g \in K$. Если $|K| = 4$, то либо $K = S$, либо $K \neq S$ и f действует без неподвижных точек на S/K. В первом случае компьютерные вычисления в GAP показывают, что граф не существует. Во втором случае имеем $|N : N_{\{F\}}| = 2$ для минимальной нормальной подгруппы $\tilde{N}$ из $\tilde{G} = G/K$. Отсюда $N = S$ — элементарная абелева группа и ввиду [8] имеем $|N : K| = 2^8, 2^{16}, 2^{32}$.

Если $|K| = 2$, то $K \neq S$, $|N : N_{\{F\}}| = 2$ для минимальной нормальной подгруппы $\tilde{N}$ из $\tilde{G} = G/K$. Отсюда $N = S$ — элементарная абелева группа, $|C_{N/K}(f) \leq 2|$ и ввиду [8] имеем $C_N(f) = K$. Противоречие с тем, что $|S_{\{F\}} : S_a| = 4$.

Если $S_{\{F\}}$ не содержит неединичных нормальных в G подгрупп, то S — элементарная абелева группа, $|S : S_{\{F\}}| = 2$. Если N — минимальная нормальная подгруппа из G, то $|N : N_{\{F\}}| = 2$, $|C_{N/K}(f) \leq 4|$ и ввиду [8] имеем $C_N(f) = 1$, $|N| = 2^8, 2^{16}, 2^{32}$ и $S = NC_S(f)$. Так как $C_G(f)$ не пересекает $S_{\{F\}}$, то $|C_{S(G)}(f)| \leq 2$. Предположим, что $|C_G(f)|$ делится на 2 и пусть g — инволюция из $C_G(f)$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 17 \cdot 36$ и $\alpha_2(g) = 17 \cdot 4$. Положим $U_i = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = i\}$. Тогда U_2 содержит 17 антиподальных классов, переставляемых g, противоречие. Итак, $|C_G(f)| = 1$. Противоречие с тем, что $|S_{\{F\}} : S_a| = 4$. Следствие доказано.

References

[1] Махнев А.А., *О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях*, Доклады академии наук, **451**:5 (2013), 501–504. MR3155098

[2] Кагазежева А.М., Махнев А.А., *О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (111,30,5,9) или (169,42,5,12)*, Доклады академии наук, **456**:2 (2014), 135–139.

[3] Brouwer A.E., Haemers W.H. *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra*, Europ. J. Comb., **14** (1993), 397–407. MR3287539

[4] Godsil C.D., Henzel A.D., *Distance-regular covers of the complete graphs*, J. Comb. Theory, ser.:B, **56** (1992), 205–238. MR1186756

[5] Cameron P.J., *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambridge University Press, Cambridge. MR1721031

[6] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Доклады академии наук, **432**:5 (2010), 583–587. MR2766516

[7] Zavarnitsine A.V., *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

[8] Колпакова В.А., Кондратьев А.С., Храмцов И.В., *О конечных группах, имеющих несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный* $Sp_4(4)$, Межд. конф «Мальцевские чтения», Тез. докл. Новосибирск (2015), 105.

Алена Мухамедовна Кагазежева
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: fkagazezhev@mail.ru