S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 328–343 (2015) УДК 512.552.4, 512.554.1
DOI 10.17377/semi.2015.12.027 MSC 16R10, 17A30

ТОЖДЕСТВА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ВЛОЖЕННЫХ В ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

И.М. ИСАЕВ, А.В. КИСЛИЦИН

Abstract. In this paper we study the identities of vector spaces embedded in linear algebras. We prove that the identities of the class of all vector spaces embedded in associative algebras do not follow from a finite set of the identities that are true in this class. Similar result is proved for the spaces embedded in Lie algebras. We constructed the example of a four-dimensional algebra over a field of characteristic zero which is a strongly not finitely based. The authors describe strongly nonfinitely based vector spaces that are finite-dimensional associative algebras with unity over a field of characteristic zero.

Keywords: Multiplicative vector pair, identity of pair, L-variety, linear algebra, associative algebras, Lie algebras, inherently nonfinitely based algebra, strongly nonfinitely based algebra.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследований авторов, опубликованных в [5].

В книге [11] Ю. П. Размыслов ввел понятие ассоциативно лиевой пары (A, L), где L – алгебра Ли, A – ее ассоциативная обертывающая. В первой части настоящей работы мы переносим введенные в [11] понятия на случай мультипликативной векторной пары (A, E), где E – векторное пространство, A – обертывающая линейная алгебра пространства E. Также мы доказываем, что

Isaev, I.M., Kislitsin, A.V. The Identities of vector spaces embedded in a linear algebra.

Работа проведена в рамках задания №2014/418 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

Поступила 19 ноября 2014 г., опубликована 27 мая 2015 г.

тождества класса векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, либо алгебры Ли, не могут быть заданы конечным набором.

Во второй части работы исследуются сильно не конечно базируемые линейные алгебры и векторные пространства, вложенные в линейные алгебры. Построен пример двумерного сильно не конечно базируемого векторного пространства над полем нулевой характеристики. Также построен пример четырехмерной сильно не конечно базируемой алгебры над полем нулевой характеристики. Описаны сильно не конечно базируемые векторные пространства, являющиеся конечномерными ассоциативными алгебрами с единицей над полем нулевой характеристики.

2. Мультипликативные векторные пространства и L-многообразия

Пусть F – некоторое поле, A – линейная (не обязательно ассоциативная) алгебра над полем F. Говорят, что алгебра A является *обертывающей* для векторного пространства E, если E – подпространство алгебры A и A как линейная F-алгебра порождается подпространством E. Два объекта: векторное пространство E и его обертывающую линейную алгебру A мы будем называть *мультипликативной векторной парой* или просто *парой* и обозначать (A, E). Пространство E в этом случае мы будем называть *мультипликативным векторным пространством* или просто *L-пространством.*

Образующие пары (A, E) (L-пространства E) по определению – это образующие пространства E.

Пара (A_2, E_2) называется *подпарой* в (A_1, E_1), если E_2 является F-подпространством пространства E_1 и A_2 – линейная F-подалгебра алгебры A_1.

Под *гомоморфизмом* ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) мы понимаем такой гомоморфизм линейных F-алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$, при котором $\zeta(E_1)$ содержится в E_2.

Категорию, объектами которой являются мультипликативные векторные пары, а морфизмами – гомоморфизмы пар, будем называть *категорией мультипликативных векторных пар.*

В категории пар естественным образом может быть определено понятие, аналогичное понятию декартова произведения. Пусть $\{(A_i, E_i) | i \in I\}$ – некоторое множество пар. Пусть $\prod\limits_{i\in I} A_i$ и $\prod\limits_{i\in I} E_i$ – полные декартовы произведения F-алгебр и векторных пространств соответственно. Ясно, что $E = \prod\limits_{i\in I} E_i$ – подпространство в линейной F-алгебре $\prod\limits_{i\in I} A_i$. Обозначим через A линейную F-подалгебру в $\prod\limits_{i\in I} A_i$, порожденную E. Пару (A, E) мы будем называть полным декартовым произведением пар (A_i, E_i), $i \in I$.

Пусть $F\langle X\rangle$ – абсолютно свободная (неассоциативная) алгебра с множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Алгебра $F\langle X\rangle$ является обертывающей для векторного пространства $L(X)$, состоящего из всех линейных комбинаций множества порождающих X. Отметим, что для любой мультипликативной векторной пары (A, E) отображение ζ свободных образующих X в E может быть продолжено до гомоморфизма F-алгебры $F\langle X\rangle$ в A, а значит до гомоморфизма пары $(F\langle X\rangle, L(X))$ в пару (A, E). Это показывает, что пара $(F\langle X\rangle, L(X))$ является свободной парой с множеством свободных порождающих X.

Как известно, *тождеством алгебры* A называется такой неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ для всех элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. В отличие от этого, *тождеством мультипликативной векторной пары* (A, E) или просто *тождеством пространства* E называется неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ для которого $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$ в алгебре A при любых $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$.

Множество всех тождеств пространства E образует идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно линейных подстановок переменных. Мы будем называть такие идеалы *L-идеалами.* Иными словами, верно следующее определение:

Идеал S алгебры $F\langle X\rangle$ называется *L-идеалом*, если для любого многочлена $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$ и любых $h_1, h_2, \ldots, h_n \in L(X)$ многочлен $g(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ лежит в S. Если G – подмножество $F\langle X\rangle$, то через $L(G)$ мы обозначим наименьший L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$, содержащий множество G. В этом случае будем говорить об $L(G)$, как об L-идеале, порожденном множеством G. Если G – конечное множество, то идеал $L(G)$ будем называть *конечно базируемым с базисом* G.

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств* G.

Нетрудно видеть, что если тождество $g = 0$ выполняется в некоторой паре (A, E), то оно выполняется в любой подпаре этой пары и любом гомоморфном образе этой пары. Более того, если тождество $g = 0$ выполняется во всех парах (A_i, E_i), $i \in I$, то оно выполняется и в полном декартовом произведении пар (A_i, E_i), $i \in I$. Это показывает, что любое многообразие пар замкнуто относительно взятия подпар, гомоморфных образов и декартовых произведений пар. Рассуждение, принадлежащее Биркгофу, показывает, что верно и обратное: любой класс мультипликативных векторных пар, замкнутый относительно этих трех операций, образует многообразие.

Любому L-многообразию пар $\mathfrak{M}$ однозначно соответствует L-идеал, состоящий из всех многочленов g, таких что тождество $g = 0$ выполняется во всех парах из $\mathfrak{M}$. Данный L-идеал мы будем обозначать $L(\mathfrak{M})$. Очевидно, что соответствие между многообразиями мультипликативных векторных пар и L-идеалами алгебры $F\langle X\rangle$ биективно.

Пусть (A, E) – некоторая пара. L-идеал S алгебры $F\langle X\rangle$ называется *идеалом тождеств пространства* E, если тождество $g = 0$ выполняется в пространстве E тогда и только тогда, когда $g \in S$. В этом случае будем записывать $S = L(E)$. Многообразие пар, заданное тождествами $L(E)$, назовем *L-многообразием, порожденным пространством* E и будем обозначать $\mathrm{Var}_L E$. Если L-идеал $L(E)$ порождается множеством $G \subseteq F\langle X\rangle$, то G называется *базисом тождеств пространства* E. В случае существования конечного множества G говорят, что пространство E имеет *конечный базис тождеств*, в противном случае пространство E называется *бесконечно базируемым* или *не конечно базируемым* (*НКБ-пространством*).

Для произвольного многообразия линейных алгебр $\mathfrak{M}$ *мультипликативной векторной $\mathfrak{M}$-парой* или просто *$\mathfrak{M}$-парой* (A, E) будем называть множество таких мультипликативных векторных пар, для которых алгебра A – обертывающая для пространства E – лежит в многообразии $\mathfrak{M}$ (например, для многообразия ассоциативных алгебр, таким образом определим понятие ассоциативной векторной пары). L-идеал тождеств такой пары будет рассматриваться в свободной алгебре многообразия $\mathfrak{M}$. Естественным образом в этом случае определяются понятия базиса тождеств внутри $\mathfrak{M}$ (по модулю тождеств $\mathfrak{M}$), L-многообразия, а также остальные понятия, сформулированные выше. Так же, как и ранее, допуская вольность речи, мы будем говорить в этом случае о тождествах векторных $\mathfrak{M}$-пространств (например, ассоциативных векторных пространств).

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры (ассоциативных векторных пространств). Ясно, что этот класс образует L-многообразие, заданное всеми тождествами вида $(uv)w = u(vw)$ для всех неассоциативных одночленов $u, v, w \in F\langle X\rangle$.

Напомним, что элементами этого L-многообразия являются все ассоциативные векторные пары. Для произвольного L-многообразия $\mathfrak{M}$ положим $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} = \mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$. Ясно, что если $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис тождеств, то эти же тождества задают конечный базис тождеств $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ внутри $\mathcal{A}$. Однако обратное утверждение неверно. В частности, все L-многообразие $\mathcal{A}$ не может быть задано конечным базисом тождеств, хотя обычное многообразие ассоциативных алгебр выделяется в классе многообразий линейных алгебр всего одним тождеством ассоциативности.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы, одна из которых анонсирована в [4].

Теорема 1. *Тождества класса $\mathcal{A}$ векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, не следуют из конечного набора тождеств, выполняющихся в этом классе.*

Доказательство. Допустим напротив, что тождества L-многообразия $\mathcal{A}$ задаются конечным набором $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Обозначим через $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ ассоциатор элементов x, y, z и рассмотрим множества $A_k = \{(u, v, w) | \deg u + \deg v + \deg w \le k\}$, где u, v, w – неассоциативные одночлены из $F\langle X\rangle$. Поскольку $L(\mathcal{A}) = L(\bigcup\limits_{k\ge 3} A_k)$, то найдется такое число m, что $H \subseteq A_m$, и, ввиду предположения, $L(\mathcal{A}) = L(A_m)$.

Пусть $S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\rangle_F$ – свободная ассоциативная алгебра от порождающих $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$. Рассмотрим в алгебре S новое умножение, заданное на множестве одночленов правилом:

$$u \times v = \begin{cases} 0, & \text{если } \deg u \ge 2,\ \deg v \ge 2,\ \deg u + \deg v > m, \\ uv & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где под uv понимается произведение элементов u и v в алгебре S.

Обозначим через $S^{\times}$ алгебру, порожденную относительно нового умножения множеством $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$. Рассмотрим мультипликативную векторную пару $(S^{\times}, L(A))$, где $L(A)$ – векторное пространство, порожденное множеством A. Ввиду определения умножения в алгебре $S^{\times}$, все элементы множества A_m являются тождествами пары $(S^{\times}, L(A))$. Так как $L(\mathcal{A}) = L(A_m)$, то все тождества L-многообразия $\mathcal{A}$ должны выполняться в паре $(S^{\times}, L(A))$. Рассмотрим слова $u = x_1 R_{x_2} \ldots R_{x_{m-1}}$, $v = x_m$, $w = x_{m+1}$ из $F\langle X\rangle$, где R_x –

оператор правого умножения на элемент x в алгебре $F\langle X\rangle$. В L-многообразии $\mathcal{A}$, а значит и в паре $(S^\times, L(A))$ должно выполняться тождество $(uv)w = u(vw)$. Сделаем подстановку переменных $x_1 \to a_1$, $x_2 \to a_2$, $\ldots$, $x_{m+1} \to a_{m+1}$ в слова u, v, w. Тогда $(uv)w = a_1 a_2 \ldots a_{m+1} \neq 0$ в алгебре $S^\times$. С другой стороны, $u(vw) = 0$ в алгебре $S^\times$. Следовательно, тождество $(uv)w = u(vw)$ не выполняется в паре $(S^\times, L(A))$.

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех векторных пространств, вложенных в алгебры Ли (лиевых векторных пространств). Этот класс образует L-многообразие, заданное всеми тождествами вида: $u^2 = 0$, $uv = -vu$, $(uv)w + (vw)u + (wu)v = 0$ для всех неассоциативных одночленов $u, v, w \in F\langle X\rangle$. Элементами этого L-многообразия являются все лиевы векторные пары.

Для тождеств класса $\mathcal{L}$ справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.

Теорема 2. *Тождества класса $\mathcal{L}$ векторных пространств, вложенных в алгебры Ли, не следуют из конечного набора тождеств, выполняющихся в этом классе.*

Доказательство. Допустим напротив, что тождества этого L-многообразия задаются конечным набором $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Обозначим через $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ якобиан элементов x, y, z и рассмотрим множество $A_k = \{u^2, uv + vu, J(u, v, w)\}$, где u, v, w – неассоциативные одночлены из $F\langle X\rangle$ и степени всех многочленов, входящих в A_k, не превосходят k. Поскольку $L(\mathcal{L}) = L(\bigcup\limits_{k\geq 3} A_k)$, то найдется такое число m, что $H \subseteq A_m$, и, ввиду предположения, $L(\mathcal{L}) = L(A_m)$.

Пусть R – свободная алгебра Ли от порождающих $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$. Рассмотрим в алгебре R новое умножение, заданное на одночленах правилом:

$$u \times v = \begin{cases} 0, & \text{если } \deg v \geq m, \\ uv & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где под uv понимается произведение одночленов u и v в алгебре R.

Обозначим через $R^\times$ алгебру, порожденную относительно нового умножения множеством $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$. Рассмотрим мультипликативную векторную пару $(R^\times, L(A))$, где $L(A)$ – векторное пространство, порожденное множеством A. Ввиду определения умножения в алгебре $R^\times$, все элементы множества A_m являются тождествами пары $(R^\times, L(A))$. Так как $L(\mathcal{L}) = L(A_m)$, то все тождества L-многообразия $\mathcal{L}$ должны выполняться в паре $(R^\times, L(A))$. Рассмотрим слова $u = x_1 R_{x_2} \ldots R_{x_m}$, $v = x_{m+1}$ из $F\langle X\rangle$, где R_x – оператор правого умножения на элемент x в алгебре $F\langle X\rangle$. В L-многообразии $\mathcal{L}$, а значит и в паре $(R^\times, L(A))$ должно выполняться тождество $uv = -vu$. Сделаем подстановку переменных $x_1 \to a_1$, $x_2 \to a_2$, $\ldots$, $x_{m+1} \to a_{m+1}$ в слова u, v. Тогда $uv = ((\ldots((a_1 a_2) a_3) \ldots) a_m) a_{m+1} \neq 0$ в алгебре $R^\times$. С другой стороны, $vu = a_{m+1} \times (((\ldots((a_1 a_2) a_3) \ldots) a_{m-1}) a_m) = 0$ в алгебре $R^\times$. Следовательно, тождество $uv = -vu$ не выполняется в паре $(R^\times, L(A))$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

3. Существенно бесконечно базируемые и сильно бесконечно базируемые L-многообразия

Многообразие линейных алгебр над конечным полем называется *локально конечным*, если любая конечно порожденная алгебра из этого многообразия конечна.

L-многообразие $\mathfrak{M}$ будем называть *локально конечным*, если для любой пары $(A, E) \in \mathfrak{M}$, где E – конечномерное векторное пространство, алгебра A конечна. В частности, если G – базис тождеств L-многообразия $\mathfrak{M}$, то локальная конечность $\mathfrak{M}$ равносильна конечности линейной алгебры $F\langle X\rangle/L(G)$ для любого конечного множества порождающих X. Несложно показать, что векторное пространство E, вложенное в конечную линейную алгебру A, порождает локально конечное L-многообразие. В самом деле, $L(A) \subseteq L(E)$. Поэтому алгебра $F\langle X\rangle/L(E)$ является гомоморфным образом алгебры $F\langle X\rangle/L(A) = F\langle X\rangle/T(A)$, но алгебра $F\langle X\rangle/T(A)$ для конечного множества порождающих X является конечно порожденной свободной алгеброй в многообразии, порожденном конечной линейной алгеброй A, а значит $F\langle X\rangle/T(A)$ и $F\langle X\rangle/L(E)$ являются конечными алгебрами.

Многообразие алгебр над конечным полем называется *существенно бесконечно базируемым* (*СББ-многообразием*), если любое локально конечное многообразие алгебр, его содержащее, не имеет конечного базиса тождеств. Алгебра называется *существенно бесконечно базируемой*, если она порождает СББ-многообразие. Отметим, что любая конечная алгебра, содержащая в качестве подалгебры СББ-алгебру, сама является СББ-алгеброй, и, следовательно, не является конечно базируемой.

СББ-алгебры и СББ-многообразия изучались в классах алгебр различной сигнатуры. В. Л. Мурский изучал СББ-группоиды [9], М. В. Сапир занимался изучением СББ-полугрупп [13], И. М. Исаев построил пример СББ-алгебры в классе колец и линейных алгебр [2]. М. В. Сапир в 1987 году получил полное описание негрупповых СББ-многообразий полугрупп [14]. Подробный обзор вопросов, связанных с существенной бесконечной базируемостью можно найти в [16].

В классе линейных алгебр понятие СББ-алгебры может быть рассмотрено только для алгебр над конечным полем.

Рассмотрим множество $\{w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_k) | w \in F\langle X\rangle\}$ всех неассоциативных слов в некотором алфавите, линейных по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть

$$C_n^{(w)} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma w(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}; y_1, y_2, \ldots, y_k) = 0 \text{ –}$$

система тождеств Капелли. Обозначим через $\mathrm{Cap}(n) = \mathrm{Var}\langle C_n^{(w)} = 0\rangle$ – многообразие линейных алгебр, удовлетворяющих всевозможным тождествам Капелли для некоторого фиксированного n.

Скажем, что многообразие линейных алгебр над полем F *сильно бесконечно базируемо* или *сильно не конечно базируемо* (*СНКБ-многообразие*), если это многообразие лежит в $\mathrm{Cap}(k)$ при некотором k, и любое многообразие F-алгебр, его содержащее и лежащее в $\mathrm{Cap}(n)$ при некотором n, не имеет конечного базиса тождеств. F-алгебра называется *сильно бесконечно базируемой*, если многообразие, порожденное этой алгеброй, является СНКБ-многообразием. Отметим, что любая конечномерная F-алгебра, содержащая в качестве подалгебры СНКБ-алгебру, не является конечно базируемой.

СНКБ-многообразия алгебр являются некоторым аналогом СББ-многообразий для случая произвольного поля. Рассмотренные понятия могут быть применены к векторным пространствам и L-многообразиям.

Отметим, что в некоторых классах алгебраических систем понятие существенной бесконечной базируемости также обобщается на случай бесконечных алгебр [18].

Под тождеством векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, понимаются тождества этих пространств внутри $\mathcal{A}$. Назовем локально конечное L-многообразие $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{A}$ *существенно бесконечно базируемым внутри* $\mathcal{A}$, если $\mathfrak{M}$ не имеет конечного базиса тождеств внутри $\mathcal{A}$ и любое локально конечное L-многообразие $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{A}$, содержащее $\mathfrak{M}$ в качестве подмногообразия, не имеет конечного базиса тождеств внутри $\mathcal{A}$. Скажем, что L-многообразие $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathrm{Cap}(n)$ *сильно бесконечно базируемо внутри* $\mathcal{A}$ ($n > 0$ – фиксированное целое), если $\mathfrak{M}$ не имеет конечного базиса тождеств внутри $\mathcal{A}$ и любое L-многообразие $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{A}$, для которого $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cap}(k)$ при некотором k, не имеет конечного базиса тождеств внутри $\mathcal{A}$. Отметим, что бесконечно базируемое (существенно бесконечно базируемое, сильно бесконечно базируемое) L-многообразие векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, является бесконечно базируемым (существенно бесконечно базируемым, сильно бесконечно базируемым) в классе всех мультипликативных векторных пространств [5].

Тождества ассоциативных векторных пространств имеют тесную связь с тождествами многообразия линейных F-алгебр $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$, рассмотренного С. В. Полиным [10], И. В. Львовым [7] и одним из авторов настоящей работы [2]. А именно, если рассмотреть алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где V – векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$ и умножение элементов $\overline{V}$ определяются правилом $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = v_1 e_2$ для $v_1, v_2 \in V$ и $e_1, e_2 \in E$ (под $v_1 e_2$ понимается действие преобразования e_2 на вектор v_1), то $\overline{V} \in \mathfrak{P}$ и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лежит в идеале $L(E)$ тождеств ассоциативного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_n})$ лежит в идеале тождеств алгебры $\overline{V}$ (R_x – оператор правого умножения на элемент x в алгебре $F\langle X\rangle$) [7].

Ранее авторами настоящей работы изучались тождества ассоциативных векторных пространств. Найдены условия, влекущие бесконечную базируемость мультипликативных векторных пространств, построены примеры СББ-пространств и СНКБ-пространств [5]. Одним из следствий найденных условий является, например, бесконечная базируемость любого конечномерного мультипликативного векторного пространства, содержащего в качестве подпространства пространство верхних треугольных матриц второго порядка. Найденные условия использовались авторами для построения конечномерных линейных НКБ-алгебр. В частности, построен пример простой конечномерной центральной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств [3, 17], что дало положительное решение вопроса И. П. Шестакова, сформулированного в «Днестровской тетради» [15, вопрос 3.103].

В настоящей работе авторами доказаны теоремы, дающие некоторое описание сильно бесконечно базируемых векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры.

Теорема 3. *Пусть F – поле нулевой характеристики. Векторное L-пространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_F$ является НКБ-пространством с базисом тождеств*

$$G = \{St_3(x, y, z), [x, y][u, v], [x, y]z_1 z_2 \dots z_m[u, v] | m = 1, 2, \dots\},$$

где $St_3(x, y, z)$ – стандартный многочлен степени 3, e_{ij} – матричные единицы с обычным умножением.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что многочлены множества G являются тождествами в пространстве E_0.

Пусть далее $\phi(X) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \alpha_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ – произвольное тождество E_0. Его можно считать полилинейным, поскольку $\operatorname{char} F = 0$.

Если $n = 1$, то $\phi(X) = \phi(x_1) = ax_1$. Подставив $x_1 \to e_{22}$, получим, что $ae_{22} = 0$ и $a = 0$.

Если $n = 2$, то $\phi(X) = \phi(x_1, x_2) = ax_1x_2 + bx_2x_1$. Подставляя $x_1 \to e_{11} + e_{12}$, $x_2 \to e_{22}$, получим, что $ae_{12} = 0$ и $a = 0$. Далее из подстановки $x_1 \to e_{22}$, $x_2 \to e_{22}$ следует, что $b = 0$.

Если $n = 3$, то

$$\phi(X) = \phi(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2x_3 + bx_2x_1x_3 + cx_2x_3x_1 + dx_3x_2x_1 + ex_3x_1x_2 + fx_1x_3x_2 = 0.$$

Вначале подставим $x_1 \to e_{11} + e_{12}$, $x_2 \to e_{11} + e_{12}$, $x_3 \to e_{22}$. Получим, что $a = -b$. Затем подставим $x_1 \to e_{22}$, $x_2 \to e_{11} + e_{12}$, $x_3 \to e_{11} + e_{12}$ и увидим, что $c = -d$. Далее подставим $x_1 \to e_{11} + e_{12}$, $x_2 \to e_{22}$, $x_3 \to e_{11} + e_{12}$ и убедимся, что $e = -f$. Теперь подстановка $x_1 \to e_{11} + e_{12}$, $x_2 \to e_{22}$, $x_3 \to e_{22}$ приводит к равенству $a = -f$. Наконец, подставив $x_1 \to e_{22}$, $x_2 \to e_{11} + e_{12}$, $x_3 \to e_{22}$, получим, что $b = -c$. Объединяя полученные равенства, будем иметь: $a = -b = c = -d = e = -f$.

Таким образом,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = a(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1 - x_3x_2x_1 + x_3x_1x_2 - x_1x_3x_2) = a \cdot St_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Пусть теперь $n \geq 4$.

Для более удобной записи переобозначим переменные в многочлене $\phi(X)$ следующим образом: $\phi(X) = \phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тогда $\phi(X) = \sum a_i x_{i_1} x_{i_2} \dots z \dots x_{i_n}$.

Используя равенство $xy = yx + [x,y]$ и тождества $[x,y]z_1z_2\dots z_m[u,v] = 0$ $(m = 1,2,\dots)$, $[x,y][u,v] = 0$, перепишем $\phi(X)$:

$$\phi(X) = \phi(z,x_1,x_2,\dots,x_n) = azx_1x_2\dots x_n+$$
$$\sum_{i,j} a_{ij}[x_i,x_j]zx_1x_2\dots\widehat{x}_i\dots\widehat{x}_j\dots x_n + \sum_{k,l} b_{kl}zx_1x_2\dots\widehat{x}_k\dots\widehat{x}_l\dots x_n[x_k,x_l]+$$
$$\sum_{p,q} c_{pq}zx_{i_1}x_{i_2}\dots\ [x_p,x_q]\dots x_{i_{n-2}} + \sum_{r,s} d_{rs}x_{j_1}x_{j_2}\dots\ [x_r,x_s]z\dots x_{j_{n-2}}+$$
$$\sum_t h_tx_{k_1}x_{k_2}\dots\ [x_t,z]\dots x_{k_{n-1}},$$

где запись $x_1x_2\dots\widehat{x}_k\dots x_n$ означает отсутствие переменной x_k в данном месте слова.

Далее, из $St_3(x,y,z) = 0$ следует: $[x,y]z = [z,y]x + [x,z]y$. Подставляя в это равенство $x \to x_i$, $y \to x_j$, $z \to z$, получим: $[x_i,x_j]z = [z,x_j]x_i + [x_i,z]x_j$, т. е. можно считать, что в словах первой суммы в каждом коммутаторе встречается z.

Переписав теперь $St_3(x,y,z) = 0$ в виде $x[y,z] = y[x,z] + z[y,x]$ и подставив $x \to z$, $y \to x_k$, $z \to x_l$, получим: $z[x_k,x_l] = x_k[z,x_l] + x_l[x_k,z]$. Таким образом, можно считать, что в каждом коммутаторе второй суммы присутствует z.

Аналогично можно показать, что каждое слово третьей и четвертой сумм также содержит z в коммутаторе.

Окончательно получим:

$$\phi(X) = azx_1x_2\dots x_n+$$
$$\sum_i a_i[z,x_i]x_1x_2\dots\widehat{x}_i\dots x_n + \sum_j b_jx_1x_2\dots\widehat{x}_j\dots x_n[z,x_j]+$$
$$\sum_k c_kx_{i_1}x_{i_2}\dots\ [z,x_k]\dots x_{i_{n-1}}.$$

Пусть

$$C_3^{(x_1zx_2x_3)} = \sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}zx_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} = 0,$$
$$C_3^{(x_1x_2zx_3)} = \sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}zx_{\sigma(3)} = 0 -$$

тождества Капелли.

Легко проверить, что многочлены $C_3^{(x_1zx_2x_3)}$ и $C_3^{(x_1x_2zx_3)}$ лежат в идеале $L(St_3(x_1,x_2,x_3),[z,x_1][x_2,x_3])$.

Тогда $C_3^{(x_1zx_2x_3)} - C_3^{(x_1x_2zx_3)} \in L(St_3(x_1,x_2,x_3),[z,x_1][x_2,x_3])$. Перепишем тождество $C_3^{(x_1zx_2x_3)} - C_3^{(x_1x_2zx_3)} = 0$ в виде:

$$\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}[z,x_{\sigma(2)}]x_{\sigma(3)} = 0.$$

Раскрыв знак суммы, перепишем это тождество следующим образом:

$$x_3[z,x_2]x_1 = x_1[z,x_2]x_3 - x_2[z,x_1]x_3+$$
$$x_2[z,x_3]x_1 + x_3[z,x_1]x_2 - x_1[z,x_3]x_2.$$

Таким образом, учитывая последнее тождество, а также $[x,y][u,v]=0$, $[x,y]z_1z_2\dots z_m[u,v]=0$ $(m=1,2,\dots)$, перепишем $\phi(X)$:

$$\begin{aligned}\phi(X) = {} & azx_1x_2\dots x_n + \\ & \sum_i a_i[z,x_i]x_1x_2\dots \widehat{x}_i\dots x_n + \sum_j b_jx_1x_2\dots\widehat{x}_j\dots x_n[z,x_j] + \\ & \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_s<i_{s+1}\\ i_{s+2}<\dots<i_n}} c_{i_1\dots i_n}x_{i_1}x_{i_2}\dots\ x_{i_s}[z,x_{i_{s+1}}]x_{i_{s+2}}\dots x_{i_n} + \\ & \sum_{\substack{j_1<j_2<\dots<j_t\\ j_{t+1}<\dots<j_n}} d_{j_1\dots j_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots\ x_{j_t}[z,x_{j_{t+1}}]x_{j_{t+2}}\dots x_{j_n} = 0,\end{aligned}$$

полагая для определенности, что слова вида $x_1x_2\dots x_k[z,x_{k+1}]x_{k+2}\dots x_n$ содержатся в третьей сумме.

Подставим $z\to e_{22}$, $x_i\to e_{22}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Получим, что $ae_{22}=0$ и $a=0$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\phi(X) = {} & \sum_i a_i[z,x_i]x_1x_2\dots \widehat{x}_i\dots x_n + \sum_j b_jx_1x_2\dots\widehat{x}_j\dots x_n[z,x_j] + \\ & \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_s<i_{s+1}\\ i_{s+2}<\dots<i_n}} c_{i_1\dots i_n}x_{i_1}x_{i_2}\dots\ x_{i_s}[z,x_{i_{s+1}}]x_{i_{s+2}}\dots x_{i_n} + \\ & \sum_{\substack{j_1<j_2<\dots<j_t\\ j_{t+1}<\dots<j_n}} d_{j_1\dots j_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots\ x_{j_t}[z,x_{j_{t+1}}]x_{j_{t+2}}\dots x_{j_n} = 0.\end{aligned}$$

Зафиксируем некоторое $t\in\{1,2,\dots,n\}$ и осуществим подстановку $z\to e_{22}$, $x_t\to e_{11}+e_{12}$, $x_i\to e_{22}$ $(i=1,2,\dots,n,\ i\neq t)$.

При такой подстановке все слова второй суммы будут равны нулю, поскольку для любых $x,y\in E_0$ либо $[x,y]=0$, либо $[x,y]=\alpha e_{12}$ $(\alpha\in F)$ и $e_{22}e_{12}=0$. По этой же причине все слагаемые третьей и четвертой сумм будут нулевыми.

Получим, что $a_t[z,x_t]x_2,x_3\dots\widehat{x}_t\dots x_n$ – единственное ненулевое слово в первой сумме (а значит и в $\phi(X)$). Но тогда $a_te_{12}=0$, откуда следует, что $a_t=0$. Таким образом, коэффициенты при всех словах в первой сумме равны нулю.

Тогда

$$\begin{aligned}\phi(X) = {} & \sum_j b_jx_1x_2\dots\widehat{x}_j\dots x_n[z,x_j] + \\ & \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_s<i_{s+1}\\ i_{s+2}<\dots<i_n}} c_{i_1\dots i_n}x_{i_1}x_{i_2}\dots\ x_{i_s}[z,x_{i_{s+1}}]x_{i_{s+2}}\dots x_{i_n} + \\ & \sum_{\substack{j_1<j_2<\dots<j_t\\ j_{t+1}<\dots<j_n}} d_{j_1\dots j_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots\ x_{j_t}[z,x_{j_{t+1}}]x_{j_{t+2}}\dots x_{j_n} = 0.\end{aligned}$$

Аналогично, подставляя $z\to e_{11}+e_{12}$, $x_t\to e_{22}$, $x_i\to e_{11}+e_{12}$ $(i=1,2,\dots,n$, $i\neq t)$, можно показать, что $b_i=0$ для $i=1,2,\dots,n$.

Таким образом, в E_0 справедливо соотношение

$$\phi(X) = \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_s<i_{s+1}\\ i_{s+2}<\dots<i_n}} c_{i_1\dots i_n} x_{i_1}x_{i_2}\dots\ x_{i_s}[z,x_{i_{s+1}}]x_{i_{s+2}}\dots x_{i_n} +$$

$$\sum_{\substack{j_1<j_2<\dots<j_t\\ j_{t+1}<\dots<j_n}} d_{j_1\dots j_n} x_{j_1}x_{j_2}\dots\ x_{j_t}[z,x_{j_{t+1}}]x_{j_{t+2}}\dots x_{j_n} = 0.$$

Далее для некоторого фиксированного набора индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$ таких, что $i_1 < i_2 < \dots < i_s < i_{s+1}$, $i_{s+2} < \dots < i_n$ осуществим подстановку $z \to e_{22}$, $x_{i_k} \to e_{11} + e_{12}$ $(k = 1, 2, \dots, s+1)$, $x_{i_l} \to e_{22}$ $(l = s+2, \dots, n)$. Получим, что $c_{i_1\dots i_n} x_{i_1}x_{i_2}\dots\ x_{i_s}[z,x_{i_{s+1}}]x_{i_{s+2}}\dots x_{i_n}$ – единственное ненулевое слово $\phi(X)$ в силу неравенств $i_1 < i_2 < \dots < i_s < i_{s+1}$. Тогда $c_{i_1 i_2\dots i_n} e_{12} = 0$ и $c_{i_1 i_2\dots i_n} = 0$. Таким образом, все коэффициенты $c_{i_1 i_2\dots i_n}$ нулевые.

Тогда

$$\phi(X) = \sum_{\substack{j_1<j_2<\dots<j_t\\ j_{t+1}<\dots<j_n}} d_{j_1\dots j_n} x_{j_1}x_{j_2}\dots\ x_{j_t}[z,x_{j_{t+1}}]x_{j_{t+2}}\dots x_{j_n} = 0.$$

Наконец, подставим $z \to e_{11} + e_{12}$, $x_{j_k} \to e_{11} + e_{12}$ $(k = 1, 2, \dots, t)$, $x_{j_l} \to e_{22}$ $(l = s+1, \dots, n)$ для некоторого набора индексов $j_1, j_2, \dots, j_n$ таких, что $j_1 < j_2 < \dots < j_s$, $j_{s+1} < \dots < j_n$. Получим, что $d_{j_1 j_2\dots j_n} e_{12} = 0$ и $d_{j_1 j_2\dots j_n} = 0$.

Таким образом, для произвольного тождества $\phi(X)$ пространства E_0 получаем:

$$\phi(X) \equiv 0 \pmod{L(G)},$$

т. е. G – базис тождеств векторного L-пространства E_0.

Докажем, что E_0 является НКБ-пространством.

Предположим противное, т. е. что все тождества L-пространства E_0 следуют из некоторой конечной совокупности тождеств $\{f_1, f_2, \dots, f_t\}$.

Пусть $G_l = \{St_3(x,y,z), [x,y][u,v], [x,y]z_1z_2\dots z_m[u,v] | m = 1, 2, \dots, l\}$ и $g_i = [x,y]z_1z_2\dots z_i[u,v]$. Тогда $f_1 \in L(G_{k_1})$, $f_2 \in L(G_{k_2})$, $\dots$, $f_t \in L(G_{k_t})$. Пусть далее $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_t\}$. Тогда $f_1, f_2, \dots, f_t \in L(G_k)$ и, поскольку $g_{k+1} = 0$ – тождество E_0, то $g_{k+1} \in L(G_k)$. Другими словами, многочлен $g_{k+1} = 0$ следует из множества многочленов G_k. Рассмотрим векторное пространство $W = \langle a, b_1, b_2, \dots, b_{k+3}\rangle$, вложенное в алгебру $B = \langle a, b_1, b_2, \dots, b_{k+3}\rangle$ с определяющими соотношениями $b_i a b_j = b_j a b_i$, $a^2 = a b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_m} a = [b_i, b_j] = 0$, $m \leq k+2$. Легко видеть, что все многочлены из G_k являются тождествами в этом пространстве. Однако, выполнив подстановку $x \to a$, $y \to b_1$, $u \to b_2$, $v \to a$, $z_i \to b_{i+2}$, $i = 1, 2, \dots, k+1$, получим, что $g_{k+1} = a b_1 b_2 \dots b_{k+3} a \neq 0$. Значит, $g_{k+1} = 0$ не следует из тождеств множества G_k. Полученное противоречие показывает, что E_0 – НКБ-пространство.

Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы, а также из результатов работы [7] вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Четырехмерная неассоциативная алгебра $\overline{V} = V \oplus E = \langle v_1, v_2, e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_F$ над полем F нулевой характеристики, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилом $v_i \cdot e_{ij} = v_j$, не имеет конечного базиса тождеств.*

Ранее был известен пример пятимерной неассоциативной НКБ-алгебры [8].

Теорема 4. *Векторное L-пространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_F$ над полем F нулевой характеристики сильно бесконечно базируемо.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему внутри $\mathcal{A}$. По теореме 3 векторное L-пространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_F$ над полем F нулевой характеристики не имеет конечного базиса тождеств. Заметим, что L-многообразие $\mathrm{Var}_L E_0 \subseteq \mathrm{Cap}(3)$. Пусть $\mathfrak{N}$ – L-многообразие векторных пространств над полем F такое, что $\mathrm{Var}_L E_0 \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cap}(n)$. Покажем, что $\mathfrak{N}$ – не конечно базируемое L-многообразие.

Пусть это не так и $\{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ – базис тождеств $\mathfrak{N}$.

Поскольку $\mathrm{Var}_L E_0 \subseteq \mathfrak{N}$, то любое тождество L-многообразия $\mathfrak{N}$ выполняется в $\mathrm{Var}_L E_0$, а значит можно считать, что любое тождество L-многообразия $\mathfrak{N}$ следует из базиса тождеств L-многообразия $\mathrm{Var}_L E_0$.

Положив $G_l = \{St_3(x, y, z), [x, y][u, v], [x, y]z_1 z_2 \ldots z_m[u, v] | m = 1, 2, \ldots, l\}$, получим, что $f_1 \in L(G_{k_1})$, $f_2 \in L(G_{k_2})$, ..., $f_t \in L(G_{k_t})$, и $f_1, f_2, \ldots, f_t \in L(G_k)$, где $k = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_t\}$.

Рассмотрим ассоциативный многочлен

$$f = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 \ldots y_{k+3} x_{\sigma(2)} y_1 \ldots y_{k+3} x_{\sigma(3)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

По условию $f = 0$ – тождество L-многообразия $\mathfrak{N}$. Покажем, что оно не следует из множества тождеств G_k.

Рассмотрим векторное пространство $W = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{k+3}\rangle_F$, вложенное в ассоциативную алгебру $B = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{k+3}\rangle_F$ с определяющими соотношениями $b_i a_j b_k = b_k a_j b_i$, $a_i^2 = a_i b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_m} a_j = [b_i, b_j] = 0$, $m \le k + 2$. Легко видеть, что все многочлены из G_k являются тождествами в этом пространстве. Выполнив подстановку $x_i \to a_i$, $y_j \to b_j$ $(1 \le i \le n$, $1 \le j \le k + 3)$, получим, что

$$f = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} b_1 \ldots b_{k+3} a_{\sigma(2)} b_1 \ldots b_{k+3} a_{\sigma(3)} \ldots a_{\sigma(n)}.$$

Заметим, что любое следствие определяющих соотношений B представляет собой сумму выражений вида $u_t(b_i a_j b_l - b_l a_j b_i)v_t$, $u_t a_i a_j v_t$, $u_t a_i b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_s} a_j v_t$ $(1 \le s \le k+2)$, $u_t[b_i, b_j]v_t$, где u_t и v_t – произвольные слова от букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k+3}$. Поэтому f не является следствием определяющих соотношений B, а значит, $f \ne 0$ в B и тождество $f = 0$ L-многообразия $\mathfrak{N}$ не следует из тождеств множества G_k. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{N}$ – не конечно базируемое L-многообразие.

Таким образом, L-многообразие $\mathrm{Var}_L E_0$ является сильно бесконечно базируемым.

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Всякое конечномерное векторное L-пространство над полем F нулевой характеристики, содержащее $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_F$ в качестве L-подпространства, не имеет конечного базиса тождеств.*

Из доказанной теоремы, а также из результатов работы [5] вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 3. *Неассоциативная алгебра* $\overline{V} = V \oplus E = \langle v_1, v_2, e_{11}+e_{12}, e_{22}\rangle_F$ *над полем* F *нулевой характеристики, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилом* $v_i \cdot e_{ij} = v_j$*, является СНКБ-алгеброй.*

Теперь перейдем к описанию векторных L-пространств над полем нулевой характеристики, являющихся ассоциативными алгебрами с единицей.

Теорема 5. *Пусть* A *– векторное* L*-пространство над полем* F *нулевой характеристики, которое одновременно является ассоциативной* F*-алгеброй с единицей. Если* $T_2(F) \notin \mathrm{Var}_L A$ *и пространство* A *удовлетворяет тождеству* $[x_1, x_2][x_3, x_4]\dots[x_{2m-1}, x_{2m}] = 0$*, то* A *имеет конечный базис тождеств внутри* $\mathcal{A}$*.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы. Первые три леммы доказаны в [19] для линейных ассоциативных алгебр.

Лемма 1. *Всякое тождество векторного пространства* E *над полем* F *нулевой характеристики, вложенного в линейную* F*-алгебру, следует из полилинейных тождеств* L*-пространства* E*.*

Ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем называть *собственным*, если $f(1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, 1, \dots, x_n) = \dots = f(x_1, x_2, \dots, 1) = 0$.

Лемма 2. *Пусть* E *– векторное пространство над полем* F *нулевой характеристики, вложенное в ассоциативную* F*-алгебру и содержащее единицу. Всякое тождество* L*-пространства* E *следует из тождеств* E*, являющихся собственными многочленами.*

Лемма 3. *Пусть* E *– векторное пространство над полем* F *нулевой характеристики, вложенное в ассоциативную* F*-алгебру и содержащее единицу. Любой собственный многочлен, являющийся тождеством* L*-пространства* E*, может быть представлен в виде линейной комбинации произведений полилинейных коммутаторов.*

Доказательство лемм 1–3 проводится аналогично доказательству соответствующих лемм для линейных ассоциативных алгебр.

Лемма 4. *Пусть* $\operatorname{char} F = 0$ *и* A *– ассоциативная* F*-алгебра с единицей, такая, что* $T_2(F) \notin \operatorname{Var} A$*. Тогда алгебра* A *будет удовлетворять тождеству* $[x_1, x_2, \dots, x_k] = 0$*.*

Доказательство. Поскольку $T_2(F) \notin \operatorname{Var} A$, то в $\operatorname{Var} A$ (а значит и в A) выполнено тождество $y^m[x, \underbrace{y, y, \dots, y}_{n}]y^t = 0$ для некоторых целых $n > 0$, $m, t \geq 0$ [1, 12]. Заменяя в этом тождестве $y \to y + 1$ и выделяя однородную компоненту степени n по переменной y, получим, что в A выполняется тождество Энгеля $[x, \underbrace{y, y, \dots, y}_{n}] = 0$. Но тогда A удовлетворяет тождеству лиевской нильпотентности $[x_1, x_2, \dots, x_k] = 0$ для некоторого целого положительного k [6, следствие 5].

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $\operatorname{char} F = 0$ *и* A *– конечномерная ассоциативная* F*-алгебра, удовлетворяющая тождеству* $[x_1, x_2, \dots, x_k] = 0$*. Тогда алгебра* A *удовлетворяет тождеству* $[x_1, x_2][x_3, x_4]\dots[x_{2m-1}, x_{2m}] = 0$*.*

Доказательство. Поскольку алгебра A конечномерна, то по теореме Веддерберна–Артина $A/J(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{l_i}(D_i)$, где $J(A)$ – радикал Джекобсона алгебры A, D_i – тела. Тогда в $M_{l_i}(D_i)$ выполняется тождество $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$. Если предположить, что $l_i \geq 2$, то, подставляя $x_1 \to e_{12}$, $x_j \to e_{11}$ $(j = 2, 3, \ldots, k)$ в тождество $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$, получим, что $[e_{12}, e_{11}, e_{11}, \ldots, e_{11}] = \pm e_{12} \neq 0$. Таким образом, $l_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $A/J(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} D_i$.

Поскольку в D_i выполняется тождество $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$, то по теореме Капланского $[D_i : Z(D_i)] < \infty$, где $Z(D_i) = Z_i$ – центр тела D_i. Если $|Z(D_i)| < \infty$, то $|D_i| < \infty$. Тогда $|A| < \infty$, чего быть не может, поскольку $\operatorname{char} F = 0$. Пусть $|Z(D_i)| = \infty$ и K_i – максимальное подполе в теле D_i. Тогда $D_i \otimes_{Z_i Z_i^{-1}} K_i \cong M_s(K_i)$. Поскольку Z_i является полем, то $Z_i Z_i^{-1} = Z_i$ и указанное тензорное произведение можно рассматривать над Z_i, т. е. $D_i \otimes_{Z_i} K_i \cong M_s(K_i)$. Получаем, что $M_s(K_i)$ удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$, что возможно лишь при $s = 1$. Тогда $D_i = D_i \otimes_{Z_i} 1 \subseteq D_i \otimes_{Z_i} K_i \cong K_i$.

Таким образом, все D_i коммутативны и $A/J(A)$ удовлетворяет тождеству $[x, y] = 0$. Тогда $[x, y] \in J(A)$ для всех $x, y \in A$. Поскольку алгебра A конечномерна, то $(J(A))^m = (0)$ для некоторого целого положительного m. Значит $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2m-1}, x_{2m}] = 0$ для всех $x_1, x_2, \ldots, x_{2m} \in A$. □

Доказательство теоремы 5. Пусть A – L-пространство над полем F нулевой характеристики, являющееся ассоциативной F-алгеброй с единицей, причем $T_2(F) \notin \operatorname{Var}_L A$. Предположим, что $T_2(F) \in \operatorname{Var} A$. Тогда все тождества алгебры A выполняются в $T_2(F)$, откуда следует, что в $T_2(F)$ выполняются все тождества L-пространства A. Но тогда $T_2(F) \in \operatorname{Var}_L A$, что противоречит условию. Таким образом, $T_2(F) \notin \operatorname{Var} A$.

Так как L-пространство A является алгеброй, по лемме 4 оно удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$.

Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ – произвольное тождество L-пространства A. Ввиду лемм 2 и 3 можно считать, что

$$f = \sum \alpha_{(i)} [x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}][x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_s}] \ldots [x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_n}],$$

где $\alpha_{(i)} \in F$ и переменные x_i в каждом слагаемом различны.

Пусть $n \leq mk$. Тогда количество различных полилинейных слов от букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет конечно, а следовательно, любой L-идеал свободной ассоциативной алгебры над полем F конечно порожден, т. е. A – конечно базируемое пространство.

Предположим, что $n > mk$. Тогда, ввиду тождеств $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2m-1}, x_{2m}] = 0$, которые справедливы в A, каждое слагаемое $\alpha_i [x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}][x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_s}] \ldots [x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_n}]$ в f должно содержать не более mk различных переменных, что противоречит предположению.

Получаем, что L-пространство A, такое что $T_2(F) \notin \operatorname{Var}_L A$ и A удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2m-1}, x_{2m}] = 0$, имеет конечный базис тождеств.

Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть A – конечномерное векторное пространство над полем F нулевой характеристики, являющееся одновременно ассоциативной F-алгеброй с единицей. L-пространство A имеет конечный базис тождеств внутри $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $T_2(F) \notin \mathrm{Var}_L A$.*

Доказательство. Пусть A – конечномерное векторное пространство над полем F нулевой характеристики, являющееся ассоциативной F-алгеброй с единицей.

Пусть $T_2(F) \notin \mathrm{Var}_L A$. Тогда $T_2(F) \notin \mathrm{Var}\, A$, и, ввиду леммы 4, пространство A удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2, \dots, x_k] = 0$. Тогда по лемме 5 L-пространство A удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2m-1}, x_{2m}] = 0$. По теореме 5 L-пространство A имеет конечный базис тождеств.

Обратно, пусть L-пространство A, удовлетворяющее условиям теоремы, имеет конечный базис тождеств. Если предположить, что $T_2(F) \in \mathrm{Var}_L A$, то согласно [5, теорема 1.2] L-пространство A не имеет конечного базиса тождеств. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Теорема 7. *Пусть A – конечномерное векторное пространство над полем F нулевой характеристики, являющееся одновременно ассоциативной F-алгеброй с единицей. Векторное L-пространство A сильно бесконечно базируемо внутри $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $T_2(F) \in \mathrm{Var}_L A$.*

Доказательство. Пусть A – конечномерное векторное пространство над полем F нулевой характеристики, являющееся ассоциативной F-алгеброй с единицей, и A является СНКБ-пространством. Если $T_2(F) \notin \mathrm{Var}_L A$, то по теореме 6 L-пространство A имеет конечный базис тождеств. Полученное противоречие показывает, что $T_2(F) \in \mathrm{Var}_L A$.

Пусть теперь A – векторное пространство, удовлетворяющее условиям теоремы и $T_2(F) \in \mathrm{Var}_L A$. Тогда любое L-многообразие $\mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cap}(k)$ при некотором k и $\mathrm{Var}_L A \subseteq \mathfrak{N}$, содержит $T_2(F)$. Ввиду [5, теорема 1.2], L-многообразие $\mathfrak{N}$ не имеет конечного базиса тождеств. Тогда $\mathrm{Var}_L A$ по определению является сильно бесконечно базируемым L-многообразием.

Теорема доказана. □

Следует отметить существенность условия являться алгеброй, наложенного на векторное пространство A в условиях теорем 5–7, поскольку если A не является алгеброй, то контрпримером к теоремам будет являться пространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$.

Авторы выражают глубокую благодарность доценту кафедры алгебры и дискретной математики УрФУ О. Б. Финогеновой за полезные обсуждения при написании работы.

References

[1] И.З. Голубчик, А.В. Михалёв, *О многообразиях алгебр с полугрупповым тождеством*, Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика, **65**:2 (1982), 8–11. MR0655393

[2] И.М. Исаев, *Существенно бесконечно базируемые многообразия алгебр*, Сибирский математический журнал, **30**:1 (1989), 75–77. MR1043435

[3] И.М. Исаев, А.В. Кислицин, *Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств*, Доклады Академии наук, **447**:3 (2012), 252–253. MR3076925

[4] И.М. Исаев, А.В. Кислицин, *Тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры.* Электронный ресурс. http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/13/malmeet_2013.pdf.

[5] И.М. Исаев, А.В. Кислицин, *Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств*, Алгебра и логика, **52**:4 (2013), 435–460. MR3154363
[6] А.Р. Кемер, *О нематричных многообразиях*, Алгебра и логика, **19**:3 (1980), 255–283. MR0609015
[7] И.В. Львов, *Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств*, Сибирский математический журнал, **19**:1 (1978), 91–99. MR0506540
[8] Ю.Н. Мальцев, В.А. Парфенов, *Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств*, Сибирский математический журнал, **18**:6 (1977), 1420–1421. MR0491866
[9] В.Л. Мурский, *О числе k-элементных алгебр с одной бинарной операцией без конечного базиса тождеств*, Проблемы кибернетики, **35**:1 (1979), 5–27. MR0539884
[10] С.В. Полин, *О тождествах конечных алгебр*, Сибирский математический журнал, **17**:6 (1976), 1356–1366. MR0439715
[11] Ю.П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., Москва, 1989. MR1007304
[12] Л.М. Самойлов, *Замечание о трехчленных тождествах в ассоциативных алгебрах*, Математические заметки, **65**:2 (1999), 254–260. MR1706573
[13] М.В. Сапир, *Проблемы бернсайдовского типа и конечная базируемость в многообразиях полугрупп*, Известия АН СССР, **51**:2 (1987), 319–340. MR0897000
[14] М.В. Сапир, *Существенно бесконечно базируемые конечные полугруппы*, Математический сборник, **133**:2 (1987), 154–166. MR0905002
[15] В.Т. Филиппов, В.К. Харченко, И.П. Шестаков, *Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей*, 4-е изд, Изд-во Института математики, Новосибирск, 1993. Zbl 0868.16001
[16] Л.Н. Шеврин, М.В. Волков, *Тождества полугрупп*, Известия вузов, **282**:11 (1985), 3–47. MR0829099
[17] I.M. Isaev, A.V. Kislitsin, *Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities*, Communications in Algebra, **41**:12 (2013), 4593–4601. MR3169540
[18] M. Jackson, M. Volkov, *Relatively inherently nonfinitely Q-based semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **361**:4 (2008), 2181–2206.
[19] W. Specht, *Gesetze in Ringen, I*, Mathematische Zeitschrift, **52**:5 (1950), 557–589. MR0035274

Исмаил Мусаевич Исаев
Алтайский государственный педагогический университет,
ул. Молодежная 55,
656031, Барнаул, Россия
E-mail address: isaev@altspu.ru

Алексей Владимирович Кислицин
Алтайский государственный педагогический университет,
ул. Молодежная 55,
656031, Барнаул, Россия
E-mail address: kislitsin@altspu.ru