S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 344–353 (2015) УДК 512.54

DOI 10.17377/semi.2015.12.028 MSC 20B07, 20B30, 20B35

О НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП ОГРАНИЧЕННЫХ ПОДСТАНОВОК

Н.М. СУЧКОВ, Н.Г. СУЧКОВА

Abstract. In this paper we describe the commutator subgroups of limited permutation groups $F = \mathrm{Lim}(Z)$, $G = \mathrm{Lim}(N)$ of the sets of integers Z and natural numbers N. The connection between a complite dispersion subsets of N and local finite normal subgroups of G is investigated.

Keywords: group, limited permutation, complite dispersion set, normal subgroup, involution.

1. Введение

Пусть N, Z — множества всех натуральных и целых чисел соответственно. Если M — любое из этих множеств, то через $S(M)$ будем обозначать группу всех подстановок множества M.

Определение 1. *Подстановка $g \in S(M)$ называется ограниченной, если*

$$w(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Из ограниченности подстановок g, h следует, что таковыми являются подстановки g^{-1} и gh, так как $w(g^{-1}) = w(g)$, $w(gh) \leq w(g) + w(h)$. Поэтому множество

$$\mathrm{Lim}(M) = \{x | x \in S(M), w(x) < \infty\}$$

образует группу, которая является естественным расширением локально конечной группы $\mathrm{Fin}(M)$ всех финитарных подстановок множества M, т.е. таких подстановок $y \in S(M)$, для которых множество $\{\alpha | \alpha \in M, \alpha^y \neq \alpha\}$ конечно.

Suchkov, N.M., Suchkova, N.G., On normal subgroups of limited permutation groups.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-01-04897 А).

Поступила 13 марта 2015 г., опубликована 29 мая 2015 г.

В работе [1] одного из авторов впервые был построен пример смешанной группы $H = AB$, где A, B — периодические (и даже локально конечные) подгруппы. Затем в [2, 3] установлено, что

$$H = \langle g | g \in \mathrm{Lim}(Z), |g| < \infty \rangle,$$

любая счётная свободная группа и 2-группа Алёшина изоморфно вложимы в группу H и

$$\mathrm{Lim}(Z) = H \rightthreetimes \langle d \rangle \,,$$

где d — сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для любого $\alpha \in Z$.

Авторами [4] доказана факторизация всей группы $\mathrm{Lim}(N)$ двумя локально конечными подгруппами и показано, что группа $\mathrm{Lim}(M)$ порождается подстановками $x \in S(M)$, для которых параметр $w(x) = 1$. Эти порождающие являются либо инволюциями, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида $(\alpha\ \alpha + 1), \alpha \in M$, либо $M = Z$ и $x \in \{d, d^{-1}\}$.

В настоящей статье продолжено изучение групп ограниченных подстановок. Найдены их коммутанты, а именно, получены следующие результаты.

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{Lim}(N)$ *совпадает со своим коммутантом.*

Теорема 2. *Коммутантом группы* $\mathrm{Lim}(Z)$ *является группа* H.

Группа $\mathrm{Fin}(M)$ содержит простую подгруппу индекса 2, которую составляют все чётные подстановки, т.е. имеет такое же нормальное строение, как симметрическая группа S_n $(n \geq 5)$. Совсем другая ситуация с нормальными подгруппами группы ограниченных подстановок $\mathrm{Lim}(M)$. Нами сделан первый шаг в изучении нормального строения группы $\mathrm{Lim}(N)$. Найден метод построения в этой группе локально конечных нормальных подгрупп (теорема 3); установлено необходимое и достаточное условие локальной конечности нормального замыкания в группе $\mathrm{Lim}(N)$ её инволюции a с параметром $w(a) = 1$.

Для формулировки этого результата введём понятие вполне рассеянного множества натуральных чисел. Пусть

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\} \text{ —}$$

бесконечное подмножество множества натуральных чисел N, где $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$; m —фиксированное натуральное число. Будем говорить, что элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо при $i < j$ $(j < i)$ выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \leq m$; $i \leq k \leq j - 1$ $(j \leq k \leq i - 1)$. Нетрудно понять, что данное отношение действительно является отношением эквивалентности, а значит, оно индуцирует разбиение множества L на классы эквивалентности. Это разбиение будем называть m-разбиением.

Обозначим через $B_m(L)$ — множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

Определение 2. *Множестов L назовем m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m-рассеянным, если*

$$C_m = \max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L будем называть (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.

Пример. *Предположим, что для элементов множества L выполняются неравенства*

$$\mu_2 - \mu_1 < \mu_3 - \mu_2 < \ldots < \mu_n - \mu_{n-1} < \mu_{n+1} - \mu_n < \ldots .$$

Ясно, что тогда для каждого $m \in N$ найдется такое наименьшее натуральное число $t = t(m)$, что $\mu_n - \mu_{n-1} > m$ при любом $n > t$. Отсюда в силу определений следует, что для таких натуральных n класс эквивалентности элементов L (элемент m-разбиения) с представителем μ_n есть одноэлементное множество $\{\mu_n\}$, а класс с представителем μ_1 суть $\{\mu_1, \ldots, \mu_t\}$. Следовательно, L — вполне рассеянное множество.

Пусть для элементов множества L выполняются неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$a = (\mu_1\ \mu_1 + 1)(\mu_2\ \mu_2 + 1) \ldots (\mu_n\ \mu_n + 1) \ldots \text{ —}$$

разложение инволюции a на независимые транспозиции. Будет доказана

Теорема 4. *Нормальное замыкание инволюции a в группе $\mathrm{Lim}(N)$ тогда и только тогда локально конечно, когда L — вполне рассеянное множество.*

По мнению авторов доказательство следующих гипотез будет существенным шагом в решении вопроса о нормальном строении групп $\mathrm{Lim}(N)$ и $\mathrm{Lim}(Z)$ (связь между этими группами установлена в лемме 6 настоящей статьи).

Гипотеза 1. *Инволюция a тогда и только тогда содержится в собственной нормальной подгруппе группы $\mathrm{Lim}(N)$, когда L — рассеянное множество.*

Гипотеза 2. *Подстановка $g \in \mathrm{Lim}(N)$ тогда и только тогда содержится в локально конечном радикале группы $\mathrm{Lim}(N)$, когда $\{\alpha | \alpha \in N, \alpha^g \neq \alpha\}$ — вполне рассеянное множество.*

Гипотеза 3. *Подстановка $g \in \mathrm{Lim}(N)$ тогда и только тогда содержится в собственной нормальной подгруппе группы $\mathrm{Lim}(N)$, когда множество $\{\alpha | \alpha \in N, \alpha^g \neq \alpha\}$ рассеянное.*

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [7].

2. Коммутанты

В этом разделе мы докажем теоремы 1, 2. При вычислении коммутаторов мы будем использовать известное и легко проверяемое

Предложение 1. *Пусть g, h — подстановки некоторого множества. Если*

$$g = \ldots (\ldots \alpha_1 \alpha_2 \ldots) \ldots \text{ —}$$

разложение g на независимые циклы, то

$$g^h = h^{-1} g h = \ldots (\ldots \alpha_1^h \alpha_2^h \ldots) \ldots .$$

Пусть $G = \mathrm{Lim}(N)$. Доказательство теоремы 1 мы разобъем на ряд последовательных лемм. Установим вначале, что верна

Лемма 1. $\mathrm{Fin}(N) < G'$.

Доказательство. Для каждого натурального $n > 1$ положим

$$H_n = \{g | g \in S(N), \alpha^g = \alpha \text{ при всех } \alpha > n\}.$$

Ясно, что H_n есть группа, изоморфная симметрической группе n-ой степени S_n, а группа $\mathrm{Fin}(N)$ является объединением возрастающей цепочки подгрупп

$$H_2 < H_3 < \ldots < H_n < \ldots.$$

Так как $\mathrm{Fin}(N) < G$, то $H'_n < G'$, а поскольку $S'_n = A_n$ — знакопеременная группа степени n и $S_n = A_n \cup (1\ 2)A_n$, то для доказательства леммы достаточно установить, что транспозиция $(1\ 2)$ содержится в G'. Рассмотрим для этого 4 подстановки

$$x = (1\ 2)(5\ 6)\ldots(1+4k\ 2+4k)\ldots,$$

$$y = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)\ldots(1+4k\ 3+4k)(2+4k\ 4+4k)\ldots,$$

$$z = (3\ 4)(7\ 8)\ldots(-1+4k\ 4k)\ldots,$$

$$t = (3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)\ldots(-1+4k\ 1+4k)(4k\ 4k+2)\ldots$$

множества N, которые являются инволюциями и при этом $w(x) = w(z) = 1$, $w(y) = w(t) = 2$, т.е. все эти инволюции содержатся в группе G. Используя предложение 1, непосредственно получаем

$$[x,y] = xx^y = x(3\ 4)(7\ 8)\ldots(3{+}4k\ 4{+}4k)\ldots = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\ldots(-1{+}2s\ 2s)\ldots,$$

$$[z,t] = zz^t = z(5\ 6)(9\ 10)\ldots(1{+}4k\ 2{+}4k)\ldots = (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\ldots(-1{+}2s\ 2s)\ldots.$$

Следовательно, $[x,y][z,t] = (1\ 2)$. Таким образом, $(1\ 2) \in G'$ и лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть n_0 — фиксированное натуральное число, $n_0 > 1$. Если*

$$a = (\alpha_1\ \alpha_1+1)(\alpha_2\ \alpha_2+1)\ldots(\alpha_{2k-1}\ \alpha_{2k-1}+1)(\alpha_{2k}\ \alpha_{2k}+1)\ldots\ -$$

разложение подстановки $a \in S(N)$ на независимые транспозиции и для каждого натурального k выполняются неравенства $2 \leq \alpha_{2k} - \alpha_{2k-1} \leq n_0$, то $a \in G'$.

Доказательство. Рассмотрим подстановки

$$b = (\alpha_1\ \alpha_1+1)\ldots(\alpha_{2k-1}\ \alpha_{2k-1}+1)\ldots,$$

$$c = (\alpha_1\ \alpha_2)(\alpha_1+1\ \alpha_2+1)\ldots(\alpha_{2k-1}\ \alpha_{2k})(\alpha_{2k-1}+1\ \alpha_{2k}+1)\ldots.$$

В силу предложения 1 мы имеем

$$b^c = (\alpha_2\ \alpha_2+1)\ldots(\alpha_{2k}\ \alpha_{2k}+1)\ldots.$$

Поскольку b, c — инволюции, $w(b) = 1$ и по условию леммы $w(c) \leq n_0$, то $a = bb^c = [b,c] \in G'$. Лемма доказана. □

Как отмечалось во введении, группа G порождается инволюциями, которые разлагаются на независимые транспозиции вида $(\alpha\ \alpha+1)$. Поэтому ввиду леммы 1 для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что коммутант G' содержит любую инволюцию вида

$$t = (\beta_1\ \beta_1+1)(\beta_2\ \beta_2+1)\ldots(\beta_n\ \beta_n+1)\ldots, \tag{1}$$

где $\beta_n + 1 < \beta_{n+1}$ при каждом натуральном n.

Лемма 3. *Элемент t представим в виде $t = xh$, где $x \in G'$ и либо $h \in \mathrm{Fin}(N)$, либо*

$$h = (\gamma_1\ \gamma_1 + 1)(\gamma_2\ \gamma_2 + 1) \dots (\gamma_n\ \gamma_n + 1) \dots, \tag{2}$$

где $\gamma_{n+1} - \gamma_n > 5$ при всех натуральных n.

Доказательство. Предположим вначале, что найдётся такое натуральное число m, что для всех $n \geq m$ выполняются неравенства $\beta_{n+1} - \beta_n > 5$. Полагаем тогда

$$x = (\beta_1\ \beta_1 + 1) \dots (\beta_{m-1}\ \beta_{m-1} + 1), h = (\beta_m\ \beta_m + 1)(\beta_{m+1}\ \beta_{m+1} + 1) \dots .$$

Так как $x \in \mathrm{Fin}(N)$, то $x \in G'$ согласно лемме 1. Поэтому x, h — искомые элементы (при $\gamma_1 = \beta_m, \gamma_2 = \beta_{m+1}, \dots, \gamma_n = \beta_{m+n-1}, \dots$).

Рассмотрим теперь случай, когда такого натурального m не существует. Подстановка t определяет последовательность

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots \tag{3}$$

натуральных чисел, для элементов которой выполняются неравенства $\beta_{n+1} > \beta_n + 1$ $(n \in N)$. Построим индуктивно подпоследовательность

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_k}, \dots \tag{4}$$

последовательности (3) следующим образом. Через β_{i_1} обозначим наименьший элемент последовательности (3), для которого $\beta_{i_1+1} - \beta_{i_1} \leq 5$. Пусть $\beta_{i_{k-1}}$ определено. Тогда β_{i_k} — первый элемент последовательности $\beta_{i_{k-1}+2}, \beta_{i_{k-1}+3}, \dots$ со свойством: $\beta_{i_k+1} - \beta_{i_k} \leq 5$. Таким образом, подстановка

$$x = (\beta_{i_1}\ \beta_{i_1} + 1)(\beta_{i_1+1}\ \beta_{i_1+1} + 1) \dots (\beta_{i_k}\ \beta_{i_k} + 1)(\beta_{i_k+1}\ \beta_{i_k+1} + 1) \dots$$

удовлетворяет условию леммы 2 при $n_0 = 5$ и потому $x \in G'$. Если $h = x^{-1}t$, то из построения подпоследовательности (4) выводим, что подстановка h удовлетворяет заключению леммы. Итак, лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Подстановка h вида (2) из формулировки леммы 3 содержится в G'.*

Доказательство. Из неравенства $\gamma_{n+1} - \gamma_n > 5$, которое выполняется для каждого натурального n, следует, что если

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n - 2 = 4q_n + r_n\ (0 \leq r_n < 4), \tag{5}$$

то $q_n \geq 1$. Рассмотрим инволюцию

$$z = (\gamma_1{+}2\ \gamma_1{+}3)(\gamma_1{+}4\ \gamma_1{+}5) \dots (\gamma_1{+}4q_1{-}2\ \gamma_1{+}4q_1{-}1)(\gamma_1{+}4q_1\ \gamma_1{+}4q_1{+}1) \dots$$

$$(\gamma_n{+}2\ \gamma_n{+}3)(\gamma_n{+}4\ \gamma_n{+}5) \dots (\gamma_n{+}4q_n{-}2\ \gamma_n{+}4q_n{-}1)(\gamma_n{+}4q_n\ \gamma_n{+}4q_n{+}1) \dots .$$

Непосредственно видно, что если в этом разложении z на независимые транспозиции две из них u и v стоят рядом, то либо $uv = (\mu\ \mu + 1)(\mu + 2\ \mu + 3)$ для некоторого натурального числа μ, либо

$$uv = (\gamma_n + 4q_n\ \gamma_n + 4q_n + 1)(\gamma_{n+1} + 2\ \gamma_{n+1} + 3)$$

при некотором $n \in N$. При этом в силу равенства (5) мы имеем

$$(\gamma_{n+1} + 2) - (\gamma_n + 4q_n) = 4 + r_n \leq 7.$$

Отсюда и из леммы 2 при $n_0 = 7$ выводим, что $z \in G'$. Далее, легко видеть, что если l — транспозиция из разложения подстановки h, а s — транспозиция из разложения подстановки z, то l, s — независимые транспозиции. Поэтому инволюцию $zh = hz$ можно записать в виде

$$zh = (\gamma_1\ \gamma_1+1)(\gamma_1+2\ \gamma_1+3)\dots(\gamma_1+4q_1\ \gamma_1+4q_1+1)(\gamma_2\ \gamma_2+1)(\gamma_2+2\ \gamma_2+3)\dots$$
$$(\gamma_n\ \gamma_n+1)(\gamma_n+2\ \gamma_n+3)\dots(\gamma_n+4q_n\ \gamma_n+4q_n+1)(\gamma_{n+1}\ \gamma_{n+1}+1)\dots.$$

Заметим, что лёгкая модификация приведенных выше рассуждений о применимости леммы 2 к инволюции z позволяет заключить, что инволюция zh тоже удовлетворяет условиям этой леммы (при $n_0 = 5$); следовательно, $zh \in G'$, а поскольку и $z \in G'$, то $h \in G'$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1. Как отмечалось выше, нам достаточно установить включение $t \in G'$, где t — элемент вида (1). Ввиду лемм 1, 3 для этого надо показать, что G' содержит элемент h вида (2). Но это было сделано в лемме 4. Таким образом, теорема 1 верна. $\square$

При доказательстве теоремы 2 нам потребуется понятие равномерной подстановки. Для каждых $\alpha \in Z$, $g \in S(Z)$ обозначим

$$M_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in Z, \beta \le \alpha, \beta^g > \alpha\},\ L_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in Z, \beta > \alpha, \beta^g \le \alpha\}.$$

Определение 3. *Подстановка g множества Z называется равномерной, если*

$$|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$$

при любом $\alpha \in Z$.

Предложение 2 ([5], лемма 5)**.** *Множество R всех равномерных подстановок множества Z является группой.*

Предложение 3 ([6], лемма 2)**.** *Пусть $x \in S(Z)$ и $|M_\gamma(x)| = |L_\gamma(x)| < \infty$ для некоторого $\gamma \in Z$. Тогда $x \in R$.*

Лемма 5. *Если подстановка g группы $\mathrm{Lim}(Z)$ разлагается на конечные независимые циклы, то $g \in R$.*

Доказательство. Пусть u — произвольный цикл из разложения g на независимые циклы. По условию леммы цикл u конечен, а потому $M_\gamma(u) = L_\gamma(u) = \varnothing$ для некоторого целого γ. Согласно предложению 3 $u \in R$. Пусть теперь α — любое целое число. Тогда либо $M_\alpha(g) = L_\alpha(g) = \varnothing$, либо в силу ограниченности подстановки g найдется лишь конечное число независимых циклов $u_1, \dots, u_s$ из разложения g, для которых множества $M_\alpha(u_i)$ не пусты, $1 \le i \le s$. По доказанному выше, $u_i \in R$; поэтому $|M_\alpha(u_i)| = |L_\alpha(u_i)| < \infty$. Понятно, что множества $M_\alpha(g)$ и $L_\alpha(g)$ являются объединениями попарно непересекающихся множеств $M_\alpha(u_1), \dots, M_\alpha(u_s)$ и $L_\alpha(u_1), \dots, L_\alpha(u_s)$ соответственно. Таким образом, $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$ и $g \in R$. Лемма доказана. $\square$

Найдем связь между группами $G = \mathrm{Lim}(N)$ и $H = \langle g | g \in \mathrm{Lim}(Z), |g| < \infty\rangle$. Предполагая, что подстановки группы $S(N)$ действуют тождественно на множестве $Z \setminus N$, мы получим естественное вложение $S(N) < S(Z)$. Обозначим через t инволюцию группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ $(\alpha \in Z)$ и заметим, что группа G^t изоморфна группе всех ограниченных подстановок множества отрицательных целых чисел. При этом подстановки из G^t действуют тождественно на множестве $N \cup \{0\}$. Понятно, что группы G и G^t поэлементно перестановочны и тривиально пересекаются, а значит, мы можем образовать прямое произведение $G \times G^t$. Далее, так как $\mathrm{Fin}(Z) \triangleleft S(Z)$, то

$$Q = \mathrm{Fin}(Z)(G \times G^t) -$$

подгруппа группы $\mathrm{Lim}(Z)$.

Лемма 6. *$H = Q$.*

Доказательство. Как отмечалось во введении, $G = AB$, где A, B — локально конечные подгруппы. Поэтому Q порождается своими элементами конечных порядков. Следовательно, $Q \leq H$. Установим обратное включение. Если $h \in H$, то из предложения 2 и леммы 5 вытекает включение $h \in R$. В частности, отсюда получаем, что $|M_0(h)| = |L_0(h)| < \infty$. Предположим сначала, что $M_0(h) = L_0(h) = \varnothing$. Тогда если $0^h = 0$, то $N^h = N$ и $K^h = K$ для множества всех отрицательных чисел K, а значит, $h = g_1 g_2$, где $g_1 \in G$, $g_2 \in G^t$. Таким образом, $h \in (G \times G^t) < Q$. Если же $0^h \neq 0$, то повторяя предыдущие рассуждения для подстановки $h \cdot (0 0^h)$, мы получим, что $h \in Q$.

Пусть теперь $M_0(h) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, $L_0(h) = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$. Рассмотрим финитарную подстановку

$$x = (\alpha_1^h \ \beta_1^h) \ldots (\alpha_s^h \ \beta_s^h).$$

Непосредственная проверка показывает, что $M_0(hx) = L_0(hx) = \varnothing$. Аналогично вышеизложенному отсюда выводим, что $hx \in Q$; следовательно, $h \in Q$. Лемма доказана. □

Докажем теперь теорему 2. Обозначим $F = \mathrm{Lim}(Z)$. В начале введения было отмечено, что $F = H \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $\langle d \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Поэтому $F' \leq H$ и для доказательства теоремы достаточно показать, что $H' = H$. В самом деле, согласно лемме 6 $H = Q = \mathrm{Fin}(Z)(G \times G^t)$. В силу теоремы 1 имеем $G' = G$ и $(G^t)' = G^t$, а из леммы 1 следует, что G' содержит транспозицию $\tau = (1\ 2)$. Понятно, что нормальное замыкание τ в группе H совпадает с $\mathrm{Fin}(Z)$, а потому $\mathrm{Fin}(Z) < H'$. Итак, подгруппы $\mathrm{Fin}(Z), G, G^t$ содержатся в H' и порождают H. Отсюда получаем результат $H = H'$ и теорема доказана.

3. Нормальные замыкания инволюций

Во введении было дано определение вполне рассеянного множества натуральных чисел. Используя это понятие, мы в данном разделе изложим один метод построения локально конечных нормальных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. Затем докажем теорему 4. Нам потребуется следующая

Лемма 7. *Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — подмножество множества N и $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$. Если*

$$b = (\alpha_1 \ \alpha_1 + 1)(\alpha_2 \ \alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_{k-1} \ \alpha_{k-1} + 1)(\alpha_k \ \alpha_k + 1) -$$

разложение инволютивной подстановки b на независимые транспозиции,

$$h = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1} \ \alpha_k \ \alpha_k + 1 \ \alpha_{k-1} + 1 \ldots \alpha_2 + 1 \ \alpha_1 + 1) -$$

цикл, то подстановка bb^h имеет порядок k.

Доказательство. Применяя предложение 1, получим

$$b^h = (\alpha_2\ \alpha_1)(\alpha_3\ \alpha_1+1)(\alpha_4\ \alpha_2+1)\dots(\alpha_k\ \alpha_{k-2}+1)(\alpha_k+1\ \alpha_{k-1}+1).$$

Если k — чётное число, то простые вычисления показывают, что

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5\dots\alpha_{k-1}\ \alpha_k+1\ \alpha_{k-2}+1\dots\alpha_2+1)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6\dots$$
$$\dots\alpha_k\ \alpha_{k-1}+1\ \alpha_{k-3}+1\dots\alpha_1+1).$$

При нечётном k имеем

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5\dots\alpha_k\ \alpha_{k-1}+1\ \alpha_{k-3}+1\dots\alpha_2+1)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6\dots$$
$$\dots\alpha_{k-1}\ \alpha_k+1\ \alpha_{k-2}+1\dots\alpha_1+1).$$

Итак, в любом случае подстановка bb^h представима в виде произведения двух независимых циклов длины k, следовательно, $|bb^h| = k$. Лемма доказана. □

Определение 4. *Если γ, ϵ — целые числа и $\gamma \le \epsilon$, то множество*

$$U_\gamma^\epsilon = \{\beta | \beta \in Z, \gamma \le \beta \le \epsilon\}$$

будем называть отрезком целых чисел; γ — левый конец отрезка, ϵ — правый.

Пусть $L = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots\}$ — вполне рассеянное множество натуральных чисел; $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$. Для каждых $m \in N$, $\alpha \in L$ положим

$$V_\alpha^m = U_{\alpha-m}^{\alpha+m} \cap N,\ E_m = \bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha^m.$$

Важное для нас свойство множества E_m устанавливает следующая

Лемма 8. *E_m — вполне 1-рассеянное множество.*

Доказательство. Предположим, что 1-разбиение множества E_m содержит класс $U_\gamma = \{\beta | \beta \in N, \beta \ge \gamma\}$ для некоторого $\gamma \in N$. Тогда если $\mu_i > \gamma$, то объединение $V_{\mu_i}^m \cup V_{\mu_{i+1}}^m$ включает в себя отрезок целых чисел с концами μ_i, μ_{i+1}. Следовательно, $2m$-разбиение множества L содержит бесконечный класс эквивалентности с представителем μ_i. Получили противоречие с вполне рассеянностью множества L.

Таким образом, 1-разбиения множества E_m составляют отрезки натуральных чисел и для доказательства леммы нам надо установить, что их порядки ограничены. В самом деле, пусть U — один из этих отрезков. Если $\mu_i, \mu_{i+1} \in U$, то так же, как и выше выполняется неравенство $\mu_{i+1} - \mu_i \le 2m$. Поскольку по условию леммы множество L является, в частности, вполне $2m$-рассеянным, то $|L \cap U| \le C_{2m}$ (см. определение 2). Заметим теперь, что

$$U = \bigcup_{\alpha \in L \cap U} V_\alpha^m,$$

откуда выводим, что $|U| \le C_{2m}(2m+1)$. Итак, лемма верна. □

Определим теперь подгруппу $Q = Q(L)$ группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. В силу предыдущей леммы каждое множество E_m разбивается на отрезки

$$W_{m1}, W_{m2}, \dots, W_{mn}, \dots \tag{6}$$

натуральных чисел, порядки которых не превосходят некоторого натурального числа r_m. При этом понятно, что каждый отрезок W_{mn} содержится в некотором отрезке $W_{m+1\ s}$. Полагаем

$$Q_m = \{x | x \in G; W_{mn}^x = W_{mn}\ (n = 1, 2, \dots); \beta^x = \beta\ (\beta \in N \setminus E_m)\}.$$

Очевидно, что Q_m является подгруппой группы G и $Q_m \leq Q_{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть, наконец,

$$Q = Q(L) = \bigcup_{m \in N} Q_m.$$

При доказательстве нижеизложенной теоремы 3 нам потребуется следующий результат.

Предложение 4 ([4], лемма 1)**.** *Пусть T — декартово произведение конечных групп T_i , $i \in I$. Если существует такое натуральное число k, что $|T_i| \leq k$ при всех $i \in I$, то группа T локально конечна.*

Теорема 3. *Q — локально конечная нормальная в группе G подгруппа.*

Доказательство. Так как отрезки (6) составляют разбиение множества E_m и $|W_{mn}| \leq r_m$ при всех натуральных n, то из определения группы Q_m следует, что она изоморфна подгруппе декартова произведения счетного числа групп, изоморфных симметрической группе S_{r_m}. Поэтому в силу предложения 4 Q_m — локально конечная группа. Очевидно, что тогда локально конечной является и группа Q.

Остается доказать, что $Q \triangleleft G$. Пусть $1 \neq h \in Q$, $g \in G$ и $w(g) = k$. Тогда $h \in Q_m$ для некоторого натурального m. Мы утверждаем, что $h^g \in Q_t$, где $t = m + k + 1$. Действительно, рассмотрим разложение подстановки h на независимые циклы. Если $x = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ — один из этих циклов ($s > 1$), то $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ содержится в некотором отрезке W_{mn}, который совпадает с объединением нескольких отрезков

$$V^m_{\mu_q}, V^m_{\mu_{q+1}}, \ldots, V^m_{\mu_l}.$$

Пусть теперь γ_i — любое число множества $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$. Тогда $\gamma_i \in V^m_{\mu_j}$ для некоторого индекса j, $q \leq j \leq l$; а поскольку $\gamma_i^x = \gamma_i^g$ и $|\gamma_i - \gamma_i^g| \leq w(g) = k$, то $\gamma_i^g \in V^t_{\mu_j}$. Далее, отрезок W_{mn} есть часть отрезка

$$V^t_{\mu_q} \cup V^t_{\mu_{q+1}} \cup \ldots \cup V^t_{\mu_l}.$$

В свою очередь, этот отрезок содержится в некотором отрезке W_{td}, $d \in N$. Следовательно, все элементы цикла $x^g = (\gamma_1^g \ldots \gamma_s^g)$ принадлежат W_{td}, откуда в силу определения группы Q_t выводим, что $x^g \in Q_t$ и $h^g \in Q_t$. Таким образом, $Q \triangleleft G$. Теорема доказана. □

Докажем теорему 4, которую мы сформулировали в конце введения. Предположим, что L — вполне рассеянное множество. Тогда из построения группы $Q = Q(L) = \bigcup_{m \in N} Q_m$ и теоремы 3 непосредственно следует, что $a \in Q_1 < Q \triangleleft G$, а значит, нормальное замыкание инволюции a в группе G локально конечно.

Обратно. Пусть подгруппа $X = X(a) = \langle a^g | g \in G \rangle$ локально конечна. Допустим, что множество L не является вполне рассеянным. Это означает, что для некоторого натурального числа m_0 найдутся такие попарно непересекающиеся подмножества

$$L_n = \{\mu_{\alpha_n}, \mu_{\alpha_n+1}, \ldots, \mu_{\beta_n}\},$$

$n = 1, 2, \ldots$ множества L, что $|L_n| > n$ и $\mu_{i+1} - \mu_i \leq m_0$ ($\alpha_n \leq i \leq \beta_n - 1$). Определим подстановку h множества N её разложением на независимые циклы

h_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Полагаем

$$h_n = (\mu_{\alpha_n}\ \mu_{\alpha_n+1} \ldots \mu_{\beta_n}\ \mu_{\beta_n} + 1\ \mu_{\beta_n-1} + 1 \ldots \mu_{\alpha_n+1} + 1\ \mu_{\alpha_n} + 1).$$

В силу вышеизложенного $w(h) \leq m_0$. Поэтому выполняются включения $h \in G$ и $aa^h \in X$. С другой стороны, согласно леммы 7 элемент aa^h разлагается на независимые циклы, длины которых неограничены, т.е. $|aa^h| = \infty$. Но это противоречит локальной конечности подгруппы X. Итак, L — вполне рассеянное множество и теорема доказана.

References

[1] Н.М. Сучков, *Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами*, Алгебра и логика, **23**:5 (1984), 573–577. MR0817031

[2] Н.М. Сучков, *О подгруппах произведения локально конечных групп*, Алгебра и логика, **24**:4 (1985), 408–413. MR0830009

[3] Н.М. Сучков, *О группе ограниченных перестановок*, «Сборник научных трудов Конструкции в алгебре и логике», Тверь (1990), 84–89. MR1222914

[4] Н.М. Сучков, Н.Г. Сучкова, *О группах ограниченных подстановок*, Журнал СФУ, Математика и физика, **3**:2 (2010), 262–266.

[5] Н.М. Сучков, А.А. Маньков, Ю.С. Тарасов, *Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания*, Журнал СФУ, Математика и физика, **5**:1 (2012), 116–121.

[6] Н.М. Сучков, Ю.С. Тарасов, *О равномерных подстановках с конечными параметрами рассеивания*, Тр. ИММ УрО РАН, **19**:3 (2013), 284–289.

[7] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Изд. Лань, (2009).

Nikolai Mihailovich Suchkov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041 Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: ns7654321@mail.ru

Nadejda Georgievna Suchkova
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041 Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: ns7654321@mail.ru