S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 381–393 (2015) УДК 512.554.7
DOI 10.17377/semi.2015.12.032 MSC 17D99

АЛГЕБРЫ НОВИКОВА-ПУАССОНА МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

А.С. ЗАХАРОВ

Abstract. We classify Novikov-Poisson algebras in low dimmension. Also we obtain examples of the Novikov-Poisson algebra of non vector type.

Keywords: Novikov-Poison algebra, nonassociative algebras.

1. Введение

В [1] К. Ксу ввел понятие алгебр Новикова-Пуассона. Это алгебра с двумя операциями умножения такими, что относительно первого умножения она является ассоциативной коммутативной алгеброй и относительно второго — алгеброй Новикова.

Алгебры Новикова были введены в работах И.М. Гельфанда и И.Я. Дорфмана [2] и А.А. Балинского и С.П. Новикова [3]. Изучению алгебр Новикова посвящены работы Е.И. Зельманова [4], В.Т. Филиппова [5], Д.М. Осборна [6, 7, 8]. В [9] были описаны конечномерные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем ненулевой характеристики. В [10] при некоторых ограничениях на структуру операторов правого и левого умножения, классифицированы бесконечномерные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Полученные в [9, 10] алгебры Новикова оказались алгебрами векторного типа, т.е умножение алгебры Новикова определялось с помощью некоторого дифференцирования, заданного на ассоциативной коммутативной алгебре.

Zakharov, A.S., Novikov-Poisson anlgebras in low dimension.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00014).

Поступила 17 декабря 2014 г., опубликована 10 июня 2015 г.

В.Н. Желябин и А.С. Тихов [11] изучали связь между дифференциальной простой ассоциативной коммутативной алгебры и простой алгебры Новикова для алгебр Новикова-Пуассона, ассоциативная коммутативная часть которой содержит единицу. Ими была отмечена связь между алгебрами Новикова-Пуассона и йордановыми супералгебрами. В [12] установлено, что коммутатор относительно умножения алгебры Новикова является йордановой скобкой. Там же показано, что условие простоты соответствующей йордановой супералгебры либо условие простоты алгебры Новикова влекут существование единицы в ассоциативной коммутативной алгебре. В [13] было найдено условие, при котором алгебра Новикова-Пуассона вкладывается в алгебру Новикова-Пуассона векторного типа. Как известно, йорданова супералгебра, построенная по алгебре Новикова-Пуассона векторного типа, является супералгеброй векторного типа и, следовательно, является специальной йордановой супералгеброй. В [14] была доказана специальность йордановой супералгебры, построенной по произвольной алгебре Новикова-Пуассона.

С. Бай и Д. Менг [15] классифицировали алгебры Новикова размерности 2 и 3 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В данной работе, используя классификацию С. Бая и Д. Менга, описываются алгебры Новикова-Пуассона размерности 2 и 3 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Приведены примеры алгебр Новикова-Пуассона, которые не являются алгебрами векторного типа. Приведена конструкция алгебр Новикова-Пуассона размерности 2^k3^n и некоторые свойства этих алгебр.

2. Двухмерные алгебры Новикова-Пуассона

Пусть $\mathbb{F}$ — поле. Рассмотрим алгебраическую систему $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ с двумя операциями умножения $\cdot$ и $\circ$ такую, что $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра, а $\langle A, \circ\rangle$ — алгебра Новикова, т.е. в ней верны тождества:

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y, \tag{1}$$

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z). \tag{2}$$

Если имеют место тождества:

$$xy \circ z = x(y \circ z), \tag{3}$$

$$zx \circ y - x \circ yz = zy \circ x - y \circ xz \tag{4}$$

то $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — *алгебра Новикова-Пуассона.*

Пример 1. Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная алгебра с дифференцированием ∂. Определим $\circ$ следующим образом:

$$a \circ b = a\partial(b) + qab,$$

где $q \in A$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ будет алгеброй Новикова-Пуассона, которую мы будем называть алгеброй Новикова-Пуассона векторного типа. В этом случае алгебру $\langle A, \circ\rangle$ называем алгеброй Новикова векторного типа.

[0]Здесь и далее по тексту будем считать, что операция $\cdot$ перед $\circ$ имеет приоритет. При этом символ $\cdot$ мы будем опускать.

Следуя [15], характеристической матрицей произвольной алгебры A с базисом $e_1, \ldots, e_n$ называем матрицу, где в i-ой строке и j-ом столбце стоит произведение e_ie_j элементов e_i и e_j.

Далее, F — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Лемма 1. *Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — двухмерная алгебра с базисом e_1, e_2 и характеристической матрицей*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 \\ \alpha e_1 & \beta e_1 + \alpha e_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой тождества ассоциативности.

В [15] получена следующая классификация алгебр Новикова размерности 2 над полем $\mathbb{C}$. В таблице 1 алгебры типа T_1, T_2, N_1, N_2 и N_3 есть ассоциативные коммутативные алгебры. Нас интересуют алгебры с характеристическими матрицами T_3, N_4, N_5 и N_6.

Тип	Хар. матрица	Ассоциативность	Коммутативность
T_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Ассоциативна	Коммутативна
T_2	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Ассоциативна	Коммутативна
T_3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e_1 & 0 \end{pmatrix}$	Неассоциативна	$[e_1, e_2] = e_1$
N_1	$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$	Ассоциативна	Коммутативна
N_2	$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Ассоциативна	Коммутативна
N_3	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}$	Ассоциативна	Коммутативна
N_4	$\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$	Ассоциативна	$[e_1, e_2] = e_1$
N_5	$\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & e_1 + e_2 \end{pmatrix}$	Неассоциативна	$[e_1, e_2] = e_1$
N_6	$\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ he_1 & e_2 \end{pmatrix}, h \notin \{0, 1\}$	Неассоциативна	$[e_1, e_2] = (1-h)e_1$

Таблица 1. Двухмерные алгебры Новикова.

Лемма 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона, и характеристическая матрица $\langle A, \circ\rangle$ есть T_3. Тогда алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ имеет характеристическую матрицу* (5)

Доказательство. Пусть

$$e_ie_j = \alpha_{ij}^1 e_1 + \alpha_{ij}^2 e_2,$$

где $i, j \in \{1, 2\}$.

Из коммутативности операции $(\cdot)$ следует $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k$. В силу тождества (3)

$$e_ie_j \circ e_k = e_i(e_j \circ e_k).$$

При $i=1, j=1, k=1$

$$e_1e_1\circ e_1=(\alpha_{11}^1e_1+\alpha_{11}^2e_2)\circ e_1=-\alpha_{11}^2e_1,$$
$$e_1(e_1\circ e_1)=e_1\cdot 0=0.$$

Таким образом, $\alpha_{11}^2=0$.
При $i=2, j=2, k=1$

$$e_2e_2\circ e_1=(\alpha_{22}^1e_1+\alpha_{22}^2e_2)\circ e_1=-\alpha_{22}^2e_1,$$
$$e_2(e_2\circ e_1)=e_2(-e_1)=-\alpha_{21}^1e_1-\alpha_{21}^2e_2.$$

Таким образом, $\alpha_{12}^1=\alpha_{21}^1=\alpha_{22}^2$ и $\alpha_{12}^2=\alpha_{21}^2=0$.
При $i=1, j=2, k=1$

$$e_1e_2\circ e_1=(\alpha_{12}^1e_1+\alpha_{12}^2e_2)\circ e_1=-\alpha_{12}^2e_1=0,$$
$$e_1(e_2\circ e_1)=e_1(-e_1)=-\alpha_{11}^1e_1-\alpha_{11}^2e_2.$$

Таким образом, $\alpha_{11}^1=0$. Положим $\alpha=\alpha_{12}^1, \beta=\alpha_{22}^1$. Ввиду полученных соотношений, имеем

$$e_1e_1=\alpha_{11}^1e_1+\alpha_{11}^2e_2=0,$$
$$e_1e_2=e_2e_1=\alpha_{12}^1e_1+\alpha_{12}^2e_2=\alpha e_1,$$
$$e_2e_2=\alpha_{22}^1e_1+\alpha_{22}^2e_2=\beta e_1+\alpha e_2.$$

□

Лемма 3. *Пусть $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — двухмерная алгебра с базисом e_1, e_2, Предположим, что характеристические матрицы алгебр $\langle A,\cdot\rangle$ и $\langle A,\circ\rangle$ имеют вид* (5) *и T_3 соответственно. Тогда $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона.*

Доказательство леммы состоит в непосредственной проверке тождеств (3) и (4).

Лемма 4. *Пусть $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона с базисом e_1, e_2. Предположим, что характеристическая матрица алгебры $\langle A,\circ\rangle$ есть N_4, N_5 или N_6. Тогда алгебра $\langle A,\cdot\rangle$ имеет характеристическую матрицу* (5).

Доказательство. Базисные элементы алгебры $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ умножаются по правилу:

$$e_1\circ e_1=0,\ e_1\circ e_2=e_1,\ e_2\circ e_1=t_1e_1,\ e_2\circ e_2=t_2e_1+e_2 \tag{6}$$

для подходящих скаляров t_1, t_2. В случае характеристической матрицы типа N_4 $t_1=t_2=0$. В случае характеристической матрицы типа N_5 $t_1=0$, $t_2=1$. В случае характеристической матрицы типа N_6 $t_1\neq 0$, $t_2=0$. Пусть

$$e_ie_j=a_{ij}^1e_1+a_{ij}^2e_2.$$

Из коммутативности операции $(\cdot)$ следует $\alpha_{ij}^k=\alpha_{ji}^k$. В силу тождества (3)

$$e_ie_j\circ e_k=e_i(e_j\circ e_k).$$

При $i=1, j=1, k=2$

$$e_1e_1\circ e_2=(a_{11}^1e_1+a_{11}^2e_2)\circ e_2=(a_{11}^1+t_2a_{11}^2)e_1+a_{11}^2e_2,$$
$$e_1(e_1\circ e_2)=a_{11}^1e_1+a_{11}^2e_2.$$

Отсюда получаем, что $a_{11}^2t_2=0$.

По тождеству (4)

$$(e_i\circ e_j)e_k-e_i\circ e_je_k=(e_j\circ e_i)e_k-e_j\circ e_ie_k.$$

При $i = 1, j = 2, k = 1$ получим

$$(e_1 \circ e_2)e_1 - e_1 \circ e_2 e_1 = e_1 e_1 - e_1 \circ (a^1_{12} e_1 + a^2_{12} e_2) = (a^1_{11} - a^2_{12})e_1 + a^2_{11} e_2,$$

$$(e_2 \circ e_1)e_1 - e_2 \circ e_1 e_1 = t_1 e_1 e_1 - e_2(a^1_{11} e_1 + a^2_{11} e_2) =$$
$$-t_2 a^2_{11} e_1 + (t_1 a^2_{11} - a^2_{11})e_2.$$

Поэтому $(t_2 - 2)a^2_{11} = 0$. Следовательно, $a^2_{11} = 0$. Также имеет место $a^1_{11} - a^2_{12} = -t_2 a^2_{11}$. Поэтому $a^1_{11} = a^2_{12}$.

Рассмотрим (4) для элементов e_1, e_2, e_2

$$(e_1 \circ e_2)e_2 - e_1 \circ e_2 e_2 = e_1 e_2 - e_1 \circ (a^1_{22} e_1 + a^2_{22} e_2) = (a^1_{12} - a^2_{22})e_1 + a^2_{12} e_2,$$

$$(e_2 \circ e_1)e_2 - e_2 \circ e_1 e_2 = (t_1 e_1)e_2 - e_2 \circ (a^1_{12} e_1 + a^2_{12} e_2) =$$
$$-t_2 a^2_{12} e_1 + (t_1 a^2_{12} - a^2_{12})e_2.$$

Отсюда получаем

$$a^1_{12} - a^2_{22} = -t_2 a^2_{12},$$
$$a^2_{12} = t_1 a^2_{12} - a^2_{12}.$$

Рассмотрим (3) для элементов e_2, e_1, e_1

$$e_2 e_1 \circ e_1 = (a^1_{12} e_1 + a^2_{12} e_2) \circ e_1 = t_1 a^2_{12} e_1,$$

$$e_2(e_1 \circ e_1) = 0.$$

Следовательно, $t_1 a^2_{12} = 0$. Таким образом, $a^2_{12} = 0$ и $a^1_{12} = a^2_{22}$.

Положим $\alpha = a^1_{12} = a^2_{22}$, $\beta = a^1_{22}$. Тогда характеристическая матрица алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 \\ \alpha e_1 & \beta e_1 + \alpha e_2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Лемма 5. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — двухмерная алгебра с базисом e_1, e_2, Предположим, что характеристические матрицы алгебр $\langle A, \cdot \rangle$ и $\langle A, \circ \rangle$ имеют вид* (5) *и N_4, N_5 или N_6 соответственно. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона.*

Доказательство леммы состоит в непосредственной проверке тождеств (3) и (4).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — двухмерная алгебра Новикова-Пуассона с базисом e_1, e_2, причем $\langle A, \circ \rangle$ не является ассоциативной коммутативной алгеброй. Тогда характеристическая матрица алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ имеет вид* (5), *а характеристическая матрица алгебры $\langle A, \circ \rangle$ имеет вид T_3, N_4, N_5 или N_6.*

Все известные автору примеры алгебр Новикова-Пуассона, полученные ранее, являются алгебрами Новикова-Пуассона векторного типа. С помощью теоремы 1 могут быть получены примеры алгебр Новикова-Пуассона, не являющиеся алгебрами Новикова-Пуассона векторного типа.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — двухмерная алгебра Новикова-Пуассона. Предположим, что $\langle A, \circ \rangle$ не является ассоциативной коммутативной алгеброй. Для того, чтобы $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ была алгеброй Новикова-Пуассона векторного типа, необходимо и достаточно $\alpha \neq 0$.*

Доказательство. Алгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ является алгеброй векторного типа тогда и только тогда, когда существует дифференцирование d алгебры $\langle A, \cdot\rangle$ и элемент $q \in A$ такие, что

$$a \circ b = ad(b) + qab.$$

Тогда

$$d(e_i) = d_i^1 e_1 + d_i^2 e_2,\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 \tag{7}$$

для некоторых $d_i^j, q_i \in \mathbb{F}, i, j \in \{1, 2\}$. Так как d — дифференцирование, то $d(e_i e_j) = e_i d(e_j) + e_j d(e_i)$. Таким образом, из равенств

$$d(e_1^2) = 2e_1 d(e_1),\ d(e_1 e_2) = e_1 d(e_2) + e_2 d(e_1),\ d(e_2^2) = 2e_2 d(e_2),$$

используя таблицу (5) и равенство (7), получаем уравнения на коэффициенты d_i^j

$$\alpha d_1^2 = 0,$$
$$0 = \alpha d_2^2 + d_1^2 \beta,$$
$$\beta d_1^1 = \alpha d_2^1 + 2d_2^2 \beta,$$
$$\beta d_1^2 = d_2^2 \alpha.$$

Так как алгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ векторного типа, то

$$e_i \circ e_j = e_i d(e_j) + q e_i e_j.$$

Пусть $e_i \circ e_j = \theta_{ij}^1 e_1 + \theta_{ij}^2 e_2$. Тогда, в силу (5) и (7), получим следующие равенства

$$\theta_{12}^1 = \alpha d_2^2 + \alpha^2 q_2,$$
$$\theta_{21}^1 = \alpha d_1^1 + d_1^2 \beta + \alpha^2 q_2,$$
$$\theta_{21}^2 = \alpha d_1^2,$$
$$\theta_{22}^1 = \alpha d_2^1 + \beta d_2^2 + \alpha^2 q_1 + 2\alpha\beta q_2,$$
$$\theta_{22}^2 = \alpha d_2^2 + \alpha^2 q_2,$$
$$\theta_{11}^1 = \theta_{11}^2 = \theta_{12}^2 = 0.$$

Так как алгебра $\langle A, \circ\rangle$ имеет характеристическую матрицу T_3, N_4, N_5 или N_6, то выполнено $\theta_{21}^2 = 0$ и $\theta_{22}^2 = \theta_{12}^1$. Таким образом, получаем следующую систему уравнений относительно неизвестных $d_1^1, d_1^2, d_2^1, d_2^2, q_1, q_2$

$$\alpha d_1^2 = 0,$$
$$0 = \alpha d_2^2 + d_1^2 \beta,$$
$$\beta d_1^1 = \alpha d_2^1 + 2d_2^2 \beta,$$
$$\beta d_1^2 = d_2^2 \alpha,$$
$$\theta_{12}^1 = \alpha d_2^2 + \alpha^2 q_2,$$
$$\theta_{21}^1 = \alpha d_1^1 + d_1^2 \beta + \alpha^2 q_2,$$
$$\theta_{22}^1 = \alpha d_2^1 + \beta d_2^2 + \alpha^2 q_1 + 2\alpha\beta q_2.$$

Запишем систему уравнений в матричном виде $Lx = b$, где

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -\alpha & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \alpha^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix},$$

$$x = (d_1^1, d_1^2, d_2^1, d_2^2, q_1, q_2)^T, \; b = (0, 0, 0, 0, \theta_{12}^1, \theta_{21}^1, \theta_{22}^1)^T.$$

Положим $\alpha = 0$. Для характеристических матриц N_4, N_5, N_6 выполнено $\theta_{12}^1 \neq 0$. Отсюда получаем, что система неразрешима. В случае T_3 имеем $\theta_{12}^1 = -1$. Поэтому четвертое и шестое уравнения имеют вид $\beta d_1^2 = 0$ и $\beta d_1^2 = -1$, что означает неразрешимость системы уравнений. Следовательно, алгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ не является алгеброй Новикова-Пуассона векторного типа.

Пусть $\alpha \neq 0$. Заметим, что четвертое уравнение системы есть разность первого, умноженного на $\frac{2\beta}{\alpha}$, и второго. Таким образом, получаем эквивалентную систему $L'x = b'$, где

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -\alpha & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \alpha^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix},$$

$$x = (d_1^1, d_1^2, d_2^1, d_2^2, q_1, q_2)^T, \; b' = (0, 0, 0, \theta_{12}^1, \theta_{21}^1, \theta_{22}^1)^T.$$

Вычислим определитель L'

$$\mathrm{detL'} = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -\alpha & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \alpha^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix} = -\alpha \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$= -\alpha^2 \det \begin{pmatrix} \beta & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix} = \alpha^4 \det \begin{pmatrix} \beta & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha^8 \neq 0.$$

Следовательно, система разрешима. Значит соответствующая алгебра является алгеброй векторного типа. □

3. Трехмерные алгебры Новикова-Пуассона

В [15] получена следующая классификация алгебр Новикова размерности 3 (табл. 2). Аналогично двухмерному случаю, нас будут интересовать только те алгебры Новикова, которые не являются ассоциативными коммутативными. А именно, это алгебры $A_5 - A_{13}, B_3 - B_5, C_3 - C_{10}, C_{12} - C_{19}, D_3 - D_6, E_1$.

Тип	Хар. матрица	Тип	Хар. матрица
A_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	A_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix}$
A_3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix}$	A_4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}$
A_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}$	A_6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & -e_1 & he_1 \end{pmatrix}$
A_7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \\ 0 & he_1 & e_2 \end{pmatrix}$	A_8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}$
A_9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \end{pmatrix}$	A_{10}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_1 \end{pmatrix}$
A_{11}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_1 & he_2 & 0 \end{pmatrix}, \lvert h\rvert \leq 1, h \neq 0$	A_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_1+e_2 & 0 \end{pmatrix}$
A_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & \frac{1}{2}e_2 & 0 \end{pmatrix}$		
B_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & \frac{1}{2}e_2 & 0 \end{pmatrix}$	B_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & \frac{1}{2}e_2 & 0 \end{pmatrix}$
B_3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & \frac{1}{2}e_2 & 0 \end{pmatrix}$	B_4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & \frac{1}{2}e_2 & 0 \end{pmatrix}$
B_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & \frac{1}{2}e_2 & 0 \end{pmatrix}$		
C_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$	C_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$
C_3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$	C_4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1+e_3 \end{pmatrix}$
C_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ he_1 & 0 & e_3 \end{pmatrix}, h \neq 0, 1$	C_6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$
C_7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_2+e_3 \end{pmatrix}$	C_8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$
C_9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ he_1 & 0 & e_3 \end{pmatrix}, h \neq 0, 1$	C_{10}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ he_1 & 0 & e_2+e_3 \end{pmatrix}, h \neq 1$
C_{11}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$	C_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & he_2 & e_3 \end{pmatrix}, h \neq 0, 1$
C_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ he_1 & ke_2 & e_3 \end{pmatrix}, h, k \neq 0, 1$	C_{14}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & e_1+e_2 & e_3 \end{pmatrix}$
C_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ he_1 & e_1+he_2 & e_3 \end{pmatrix}, h \neq 0, 1$	C_{16}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_3 \end{pmatrix}$

C_{17}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2+e_3 \end{pmatrix}$	C_{18}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1+e_2 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -e_2 & e_3 \end{pmatrix}$
C_{19}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1+e_2 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -e_2 & e_1+e_3 \end{pmatrix}$		
D_1	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$	D_2	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$
D_3	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1+e_2 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$	D_4	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ \frac{1}{2}e_1 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$
D_5	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ \frac{1}{2}e_1 & 0 & e_2+e_3 \end{pmatrix}$	D_6	$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ he_1 & (2h-1)e_2 & e_3 \end{pmatrix}, h \neq \frac{1}{2}, 1$
E_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$		

Таблица 2: Трехмерные алгебры Новикова.

Как и в двухмерном случае, мы из тождеств алгебр Новикова-Пуассона получаем вид характеристической матрицы ассоциативной коммутативной части. В отличие от двухмерного случая, будет несколько ассоциативных коммутативных алгебр. Ввиду большого числа вычислений, приведем лишь результат.

Теорема 3. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — трехмерная алгебра Новикова-Пуассона с базисом e_1, e_2, e_3. Предположим, что $\langle A, \circ \rangle$ не является ассоциативной коммутативной алгеброй. Тогда в таблице 3 дано полное описание таких алгебр. А именно, в первом столбце тип алгебры Новикова, во втором — характеристическая матрица соответствующего ассоциативного коммутативного умножения.*

Тип	Хар. матрица асс. комм. умн.	Тип	Хар. матрица асс. комм. умн.
A_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & be_1 \\ 0 & be_1 & ce_1 \end{pmatrix}$	A_6, A_7, A_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_1 \end{pmatrix}$
A_8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_2 \\ 0 & ae_2 & be_1+ae_2 \end{pmatrix}$	A_9	$\begin{pmatrix} ae_1 & 0 & be_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ be_1 & 0 & ce_1+de_2 \end{pmatrix}, b^2=ac$
$A_{10}, A_{11}, C_{14}, C_{15}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_1+be_2 \end{pmatrix}$	A_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & 0 \\ 0 & 0 & be_1+ce_2 \end{pmatrix}, ac=0$
B_3-B_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_2 & 0 \\ 0 & 0 & be_3 \end{pmatrix}$	C_3-C_5	$\begin{pmatrix} ae_2 & 0 & 0 \\ 0 & be_2 & 0 \\ 0 & 0 & ce_1+ae_2 \end{pmatrix}, ac=0$
C_6, C_7, C_9, C_{10}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & be_1 \\ 0 & be_1 & ce_1+de_2 \end{pmatrix}, ad=0$	C_8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ae_1+be_2 \\ 0 & ce_2 & ae_2 \\ ae_1+be_2 & ae_2 & de_1+fe_2+ae_3 \end{pmatrix},$ $fc=ab=bc=0$
$C_{11}-C_{13}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ae_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ ae_2 & 0 & be_1+ce_2 \end{pmatrix}$	C_{16}, C_{17}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_2 & 0 \\ 0 & 0 & be_1+ce_2 \end{pmatrix}, ac=0$

C_{18}	$\begin{pmatrix} ae_2 & 0 & be_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ be_2 & 0 & ce_2 \end{pmatrix}$	C_{19}	$\begin{pmatrix} ae_2 & 0 & be_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ be_2 & 0 & be_1+ce_2 \end{pmatrix}, ab=0$
D_3-D_6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ae_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ ae_3 & 0 & ae_3 \end{pmatrix}$	E_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & 0 \\ 0 & 0 & be_1 \end{pmatrix}$

Таблица 3: Трехмерные алгебры Новикова-Пуассона.

Теорема 4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — трехмерная алгебра Новикова-Пуассона. Предположим, что $\langle A, \circ\rangle$ имеет характеристическую матрицу типа A_5. Тогда $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ является алгеброй векторного типа тогда и только тогда, когда $b^2 \neq ac$.*

Доказательство. $\langle A, \cdot, \circ\rangle$является алгеброй векторного типа тогда и только тогда, когда существует дифференцирование d алгебры $\langle A, \cdot\rangle$ и элемент $q \in A$ такие, что

$$a \circ b = ad(b) + qab.$$

Тогда

$$d(e_i) = d_i^1 e_1 + d_i^2 e_2 + d_i^3 e_3,\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3, \tag{8}$$

для некоторых $d_i^j, q_i \in \mathbb{F}, i, j \in \{1, 2, 3\}$. Характеристические матрицы $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & be_1 \\ 0 & be_1 & ce_1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Повторяя рассуждения теоремы 2, получим систему уравнений относительно неизвестных d_i^j и q_k, где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{array}{ll}
ad_1^1 + bd_1^3 = 0, & ad_2^2 + bd_2^3 = 0, \\
ad_3^2 + bd_3^3 = 1, & bd_1^2 + cd_1^3 = 0, \\
bd_2^2 + cd_2^3 = -1, & bd_3^2 + cd_3^3 = 0, \\
ad_1^2 + bd_1^3 = 0, & bd_1^2 + cd_1^3 = 0, \\
ad_1^1 = 2ad_2^2 + 2bd_2^3, & bd_1^1 = ad_3^2 + bd_2^2 + bd_3^3 + cd_2^3, \\
cd_1^1 = 2bd_1^2 + 2cd_1^3, & ad_1^2 = ad_1^3 = bd_1^2 = bd_1^3 = cd_1^2 = cd_1^3 = 0.
\end{array}$$

От $d_1^2, d_1^3, d_2^1, d_3^1, q_1, q_2$ и q_3 ничего не зависит. Избавившись от этих переменных, получим следующую систему от переменных $d_1^1, d_2^2, d_2^3, d_3^2, d_3^3$ с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a & b & 1 \\
0 & b & c & 0 & 0 & -1 \\
-a & 2a & 2b & 0 & 0 & 0 \\
-c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\
-b & b & c & a & b & 0
\end{array}\right).$$

Четвертая строка есть сумма первой и шестой. От восьмой строки отнимем вторую и третью. Получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 1 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & -1 \\ -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

При $a = b = c = 0$ алгебра, очевидно, не векторного типа. Если хотя бы один из элементов a, b, c не нуль, то получим систему с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & a & b & 1 \\ b & c & 0 & 0 & -1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 \end{array}\right).$$

Определитель основной матрицы равен $(b^2 - ac)^2$. Поэтому при $b^2 \neq ac$ система имеет ненулевое решение. Пусть $b^2 = ac \neq 0$. Тогда разность второго и третьего уравнения, умноженного на a и b соответственно, имеют вид

$$(ac - b^2)d_2^3 = -b.$$

Следовательно, $b = 0$, то есть $a = 0$ или $c = 0$. Но тогда первое или второе уравнение неразрешимы.

Таким образом, теорема доказана. $\square$

В [10] была предложена следующая конструкция тензорного произведения алгебр Новикова-Пуассона. Пусть $\langle A_1, \cdot_1, \circ_1 \rangle$ и $\langle A_2, \cdot_2, \circ_2 \rangle$ — алгебры Новикова-Пуассона. На тензорном произведении $A_1 \otimes A_2$ определим две операции:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot_1 a_2) \otimes (b_1 \cdot_2 b_2),$$

$$(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \circ_1 a_2) \otimes (b_1 \cdot_2 b_2) + (a_1 \cdot_1 a_2) \otimes (b_1 \circ_2 b_2).$$

Тогда $\langle A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона. Эта конструкция показывает, что справедлива следующая теорема

Теорема 5. *Для любых натуральных чисел n, k существует алгебра Новикова-Пуассона размерности $2^n 3^k$.*

Приведем пример, когда тензорное произведение алгебр Новикова-Пуассона не векторного типа является алгеброй Новикова-Пуассона не векторного типа.

Предложение 1. *Пусть $\langle A_1, \cdot_1, \circ_1 \rangle$ — двухмерная алгебра Новикова-Пуассона, характеристическая матрица $\langle A_1, \cdot_1 \rangle$ имеет вид (5), а $\langle A_1, \circ_1 \rangle$ имеет вид N_5, $\langle A_2, \cdot_2, \circ_2 \rangle$ — трехмерная алгебра Новикова-Пуассона, характеристическая матрица $\langle A_2, \circ_2 \rangle$ имеет вид A_5. Положим, что $\langle A_1, \cdot_1, \circ_1 \rangle$ и $\langle A_2, \cdot_2, \circ_2 \rangle$ не алгебра Новикова-Пуассона векторного типа. Тогда $\langle A_1 \otimes A_2, \cdot, \circ \rangle$ не алгебра Новикова-Пуассона векторного типа.*

Доказательство. Характеристические матрицы $\langle A_1, \cdot_1\rangle, \langle A_1, \circ_1\rangle, \langle A_2, \cdot_2\rangle$ и $\langle A_2, \circ_2\rangle$ будут иметь вид, соответственно,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & de_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & e_1+e_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & af_1 & bf_1 \\ 0 & bf_1 & cf_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 \\ 0 & -f_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристические матрицы $\langle A_1 \otimes A_2, \cdot\rangle$ и $\langle A_1 \otimes A_2, \circ\rangle$ в базисе g_{ij}, где $g_{3(i-1)+j} = e_i \otimes f_j$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & adf_{11} & bdf_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & bdf_{11} & cdf_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11}+f_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{11}-f_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть существуют дифференцирование d алгебры $\langle A_1 \otimes A_2, \cdot\rangle$ элемент $q \in \langle A_1 \otimes A_2$ такие, что

$$g_i \circ g_j = g_i d(g_j) + q g_i g_j.$$

Положим $i = 2, j = 6$. Тогда

$$g_1 = g_2 \circ g_6 = g_2 d(g_6) + q g_2 g_6 = 0,$$

что является противоречием. Значит, $\langle A_1 \otimes A_2, \cdot, \circ\rangle$ не алгебра Новикова-Пуассона векторного типа. $\square$

References

[1] Xu, X, *Novikov-Poisson algebra*, J. Algebra, **190**:2 (1997), 253–279. MR1441950

[2] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them.*, Funktsional. Anal. i Prilozhen, **13**:4 (1979),13–30. MR0554407

[3] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, *Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283**:5 (1985),1036–1039. MR0802121

[4] E. I. Zelmanov, *A class of local translation-invariant Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**:6: (1987), 1294–1297. MR0880610

[5] V. T. Filippov, *A class of simple nonassociative algebras*, Mat. Zametki, **45**:1 (1989), 101–105. MR0987361

[6] J. M. Osborn, *Modules for Novikov algebras*, Contemp. Math., **184** (1991), 327–338.

[7] J. M. Osborn, *Novikov algebras*, Nova J. Algebra Geom., **1**:1 (1992), 1–13. MR1163779

[8] J. M. Osborn, *Simple Novikov algebra with an idempotent*, Commun. Algebra, **20**:9 (1992), 2729–2753. MR1176835

[9] X. Xu, *On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules*, J. Algebra, **185** (1996), 905–934. MR1419729

[10] Xu, X, *Classification of simple Novikov Algebra and their irreducible modules of characterestic 0*, J. Algebra, **246**:2 (2001), 673–707.

[11] В. Н. Желябин, А. С. Тихов, *Алгебры Новикова-Пуассона иассоциативные коммутативные дифференциальные алгебры*, Алгебра и логика, **47**:2 (2008), 186–202. MR2438009

[12] A. S. Zakharov, *Novikov-Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets*, Commun. Algebra , **42**:5 (2014), 2285–2298. MR3169704

[13] А. С. Захаров, *Вложение алгебр Новикова-Пуассона в алгебры Новикова-Пуассона векторного типа*, Алгебра и логика, **52**:3 (2013), 352–369. MR3137129

[14] В. Н. Желябин, А. С. Захаров, *Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова-Пуассона*, Мат. заметки, **97**:3 (2015), 359–367.

[15] C. Bai, D. Meng, *The classification of Novikov algebras in low dimensions*, J. Phys. A: Math. Gen., **34** (2001), 1581–1594. MR1818753

Антон Станиславович Захаров
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: antzakh@gmail.com