S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 406–420 (2015) УДК 519.21

DOI 10.17377/semi.2015.12.034 MSC 60F10

О ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ВЫШЕ НЕКОТОРОЙ ГРАНИЦЫ

А.С. ТАРАСЕНКО

Abstract. The asymptotics of the expected sojourn time of a random walk over linear and nonlinear boundaries is found. We assume that right tail distribution of random walk summands varies regularly. In the case of linear boundary the corresponding result is obtained for random walks with semi-exponential distribution of summands.

Keywords: random walk, sojourn time, asymptotic analysis.

1. Введение

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Будем полагать нулевым их математическое ожидание, если оно существует. Будем обозначать также $\sigma^2 := \mathbb{E}\xi^2$ в случае существования этого момента.

Для произвольного числа b введем время пребывания случайного блуждания $\{S_k,\ k \leqslant n\}$ на полуоси (b, ∞):

$$T_n(b) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k > b\}}. \tag{1}$$

Будем также рассматривать время пребывания случайного блуждания $\{S_k,\ k \leqslant n\}$ выше криволинейной границы, заданной последовательностью $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$T_n(\{b_m\}) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k > b_k\}}. \tag{2}$$

Tarasenko, A.S., On the sojourn time of random walk above a certain boundary.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00046).

Поступила 20 ноября 2014 г., опубликована 12 июля 2015 г.

Цель данной работы состоит в исследовании асимптотического поведения $\mathbb{E}T_n(b_n)$ и $\mathbb{E}T_n(\{b_m\})$ при $n \to \infty$ для случая, когда $b_n \to \infty$ и скорость роста границы b_n соответствует области больших уклонений для S_n.

Начиная с классического закона арксинуса, изучение времени пребывания случайного блуждания в том или ином множестве привлекает внимание многих авторов, см. библиографические ссылки в [2]. В публикациях последних лет [2]–[4] продемонстрированы новые подходы к исследованию времени пребывания случайного блуждания на полуплоскости и в полосе, основанные на применении факторизационных методов. Асимптотический анализ распределений с помощью факторизационной техники, как правило, приводит к существенным продвижениям при выполнении условия Крамера на распределение скачков блуждания. В настоящей работе условие Крамера не накладывается и факторизационная техника не применяется. Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{E}T_n(b_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > b_n\}, \tag{3}$$

поэтому асимптотическое поведение $\mathbb{E}T_n(b_n)$ будем исследовать, пользуясь известными результатами о вероятностях больших уклонений для сумм независимых слагаемых.

Этот метод применим также и в крамеровском случае (см. [1]). А именно, при $b_n/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $b_n/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ верно

$$\mathbb{E}T_n(b_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n^{5/2}\sigma^3}{b_n^3} e^{-n\Lambda(b_n/n)},$$

где $\Lambda(\alpha)$ — известная функция уклонений. Также нетрудно показать, что в этих условиях $T_n(\{b_m\})$ будет сходиться к некоторой константе.

Обозначим для $x > 0$

$$F_+(x) := \mathbb{P}\{\xi > x\}, \qquad F_-(x) := \mathbb{P}\{\xi < -x\}.$$

Мы будем писать $c_n \sim d_n$, если $d_n > 0$, $\dfrac{c_n}{d_n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Основные результаты работы содержатся в следующих пяти теоремах.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$F_+(x) = x^{-\beta} L(x)$$

— правильно меняющаяся функция (п.м.ф.) с показателем $-\beta$, $\beta > 2$. Если $\mathbb{E}(\xi^2; \xi < -x) = o(1/\ln x)$ при $x \to +\infty$, то

$$\mathbb{E}T_n(b_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma^3 n^{5/2}}{b_n^3} e^{-\frac{b_n^2}{2n\sigma^2}} + \frac{n^2}{2}F_+(b_n),$$

где b_n — последовательность положительных чисел такая, что

$$b_n/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Теорема 2. *Пусть $F_+(x) = x^{-\beta}L(x)$ — п.м.ф. с показателем $-\beta$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, $\beta \neq 2$. Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, то дополнительно предполагаем, что $\mathbb{E}\xi = 0$; если же $\mathbb{E}|\xi| = \infty$, то требуем, чтобы $F_-(x) + F_+(x)$ также была п.м.ф. с показателем $-\beta$. В случае, если $\mathbb{E}\xi^2 = \infty$, предполагаем еще*

$$F_-(x) = O\Big(F_+(x)\Big), \quad x \to \infty.$$

Тогда для $\alpha > \dfrac{1}{\min(2,\beta)}$ *имеет место*

$$\mathbb{E}T_n(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2} F_+(n^\alpha).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Если для* $\alpha > \dfrac{1}{\min(2,\beta)}$ *функция* $xF_+(x^\alpha)$ *монотонна при* $x > x_*$ *для некоторого* x_*, *то*

$$\mathbb{E}T_n(\{m^\alpha\}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2 F_+(n^\alpha)}{2-\alpha\beta}, \qquad \textit{если} \quad \alpha < \frac{2}{\beta},$$

$$\mathbb{E}T_n(\{m^\alpha\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T \equiv \mathrm{const}, \qquad \textit{если} \quad \alpha > \frac{2}{\beta}.$$

Теорема 4. *Предположим, что* $\mathbb{E}\xi = 0$ *и* $F_+(x) = x^{-\beta}L(x)$ *— п.м.ф. с показателем* $-\beta$, $\beta > 2$ *и* $\mathbb{E}(\xi^2; \xi < -t) = o(1/\ln t)$ *при* $t \to +\infty$. *Пусть* $W(x) = \sqrt{x}L_W(x)$, *где* $L_W(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *— медленно меняющаяся функция (м.м.ф.), а функция* $xF_+(W(x))$ *монотонна при* $x > x_*$ *для некоторого* x_*. *Тогда*

$$\mathbb{E}T_n(\{W(m)\}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)} + \frac{n^2 F_+(W(n))}{2-\frac{\beta}{2}},$$

если $\beta < 4$ *или если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)}$ *расходится;*

$$\mathbb{E}T_n(\{W(m)\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T \equiv \mathrm{const},$$

если $\beta > 4$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)}$ *сходится.*

Следующий результат получен для случайных блужданий с семиэкспоненциальным распределением приращений. Мы предполагаем здесь, что $F_+(x) = e^{-l(x)}$, где $l(x) = x^\beta L(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $0 < \beta < 1$, $L(x)$ — м.м.ф. Для формулировки результата понадобится следующая функция:

$$M(x,n) := \min_t \left(l(x-t) + n\Lambda_\kappa\left(\frac{t}{n}\right)\right),$$

где $\kappa := \left\lfloor \dfrac{1}{1-\beta} \right\rfloor + 1$, а $\Lambda_\kappa(x) := \sum\limits_{j=2}^{\kappa} a_j x^j$ — так называемый «урезанный» ряд Крамера или, что то же самое, урезанное разложение в ряд, соответствующее функции уклонений

$$\Lambda(x) := \sup_\lambda \left(x\lambda - \ln \mathbb{E}e^{\lambda\xi} \right)$$

для ξ, формально определенной лишь при выполнении условия Крамера. Коэффициенты $a_2, a_3, \ldots$ зависят только от моментов случайной величины ξ. Более подробные сведения о $\Lambda_\kappa(x)$ можно найти в [5], глава 5, где содержится приводимая ниже и используемая в нашей работе теорема C о вероятностях больших уклонений для случайных блужданий с семиэкспоненциальным распределением приращений.

Теорема 5. *Пусть* $F_+(x) = e^{-l(x)}$, *где* $l(x) = x^\beta L(x)$ — *непрерывно дифференцируемая функция,* $0 < \beta < 1$, $L(x)$ — *м.м.ф. и пусть*

$$l'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\beta l(x)}{x}. \tag{4}$$

Тогда, если $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}|\xi|^b < \infty$ *при* $b = \left\lfloor \frac{1}{1-\beta} \right\rfloor + 2$, *то для* $\alpha > \frac{1}{2-2\beta}$ *выполняется*

$$\mathbb{E}T_n(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2} F_+(n^\alpha).$$

Если дополнительно известно, что существует

$$l''(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\beta(\beta-1)l(x)}{x^2}, \tag{5}$$

то для $\alpha > \frac{1}{2-\frac{3}{2}\beta}$ *также выполняется*

$$\mathbb{E}T_n(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} F_+(n^\alpha) \sum_{k=1}^{n} k q^k(n),$$

где $q(n) = \exp\left\{ \frac{l(n^\alpha) - M(n^\alpha, n)}{n} \right\}$.

Отметим, что для нахождения среднего времени, проведенного траекторией в двусторонней области, ограниченной двумя удаляющимися друг от друга границами, достаточно вычесть из n суммарное среднее время, проведенное выше верхней границы и ниже нижней.

2. Предварительные результаты

Сформулируем сначала некоторые утверждения, которые потребуются для доказательства основных результатов. Пусть

$$\rho_\pm = \lim_{x\to\infty} \frac{F_\pm(x)}{F_+(x) + F_-(x)}, \qquad \rho = 1 - 2\rho_-.$$

Будем всюду в этом разделе считать, что в соответствии с условиями теоремы 1 $F_+(x) = x^{-\beta} L(x)$ — п.м.ф. с показателем $-\beta$, $\beta \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1, 2\}$. Положим

$$\gamma_n = F_+^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \inf\left\{ v : F_+(v) \leqslant \frac{1}{n} \right\}$$

при $\beta < 2$, и $\gamma_n = \sqrt{(\beta-2)n\ln n}$, если $\beta > 2$. Последовательность $\{\gamma_n\}$ соответствует границе между нормальными и большими уклонениями для случайного блуждания $\{S_n\}$.

Следующая теорема содержится в результатах, полученных в [5] (§2.6, §3.4, §4.4) и следствии 7 в [6].

Теорема А. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\rho > -1$ *и* $F_-(x) + F_+(x)$ — *п.м.ф. с показателем* $-\beta$, *где* $\beta < 1$.
(2) $1 < \beta < 2$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ *и* $F_-(x) \leqslant cF_+(x)$.
(3) $\beta > 2$, $\mathbb{E}\xi = 0$ *и* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$.

Тогда для $x = s\gamma_n$ *выполняется*

$$\sup_{x:s\geqslant t}\left|\frac{\mathbb{P}\{S_n > x\}}{nF_+(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если же $\mathbb{E}\xi = 0$ *и* $\mathbb{E}(\xi^2; |\xi| > x) = o(1/\ln x)$, *то для* $x = s\sqrt{n}$ *выполняется*

$$\sup_{x:s\geqslant t}\left|\frac{\mathbb{P}\{S_n > x\}}{\bar{\Phi}(x/\sigma\sqrt{n}) + nF_+(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Заметим, что условие $\rho > -1$ равнозначно условию

$$\rho_- = \lim_{x\to\infty}\frac{F_-(x)}{F_+(x) + F_-(x)} < 1,$$

что эквивалентно тому, что для любого x

$$\frac{F_-(x)}{F_+(x)} \leqslant C < \infty.$$

или же, как и в формулировке теоремы 1, $F_-(x) = O(F_+(x))$.

Ниже будет использоваться следующее утверждение, которое сразу же вытекает из приведенной теоремы.

Теорема B. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— последовательность положительных чисел,* $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— последовательность натуральных чисел, так что*

$$\frac{x_m}{\gamma_{n_m}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{S_{n_m} > x_m\} \underset{m\to\infty}{\sim} n_m F_+(x_m).$$

Если дополнительно известно, что $\mathbb{E}(\xi^2; |\xi| > x) = o(1/\ln x)$, *то для любой последовательности* $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такой, что*

$$\frac{y_m}{\sqrt{n_m}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

верно

$$\mathbb{P}\{S_{n_m} > y_m\} \underset{m\to\infty}{\sim} \bar{\Phi}(y_m/\sigma\sqrt{n_m}) + n_m F_+(y_m).$$

Заметим, что в теореме B не требуется, чтобы $n_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Нам потребуются также следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и пусть число* α *удовлетворяет условию* $n^\alpha/\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *или, что то же самое,* $\alpha > 1/\min(2, \beta)$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} kF_+(n^\alpha).$$

В случае, когда $\mathbb{E}(\xi^2; |\xi| > x) = o(1/\ln x)$, *для последовательности положительных чисел* $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такой, что*

$$\frac{b_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{S_k > b_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}(b_n/\sigma\sqrt{k}) + \sum_{k=1}^{n} kF_+(b_n).$$

Доказательство. Обозначим

$$a_{k,n} = \mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\}, \qquad b_{k,n} = kF_+(n^\alpha),$$

$$M_n = \max_{k \leqslant n} \left(\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}}\right).$$

M_n порождает последовательность $l(n) = \operatorname{argmax}\limits_{k \leqslant n} \left(\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}}\right)$. Если максимум достигается при нескольких значениях k, то можно брать любое из них — для нас важно только выполнение неравенства $l(n) \leqslant n$. Таким образом, $M_n = \frac{a_{l(n),n}}{b_{l(n),n}}$. Так как

$$\frac{n^\alpha}{\gamma_{l(n)}} \geqslant \frac{n^\alpha}{\gamma_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

то, по теореме B, имеем $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Отсюда получаем, что для любого $A > 1$ существует число N такое, что $M_n < A$ для всех $n > N$, или, что то же самое, $a_{k,n} \leqslant Ab_{k,n}$ для всех $k < n$. Следовательно,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Ab_{k,n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}} = A.$$

Аналогично показывается, что для любого $A > 1$ существует число N такое, что для всех $n > N$ выполняется

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,n}} \leqslant A.$$

Таким образом,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > b_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} kF_+(b_n).$$

Эквивалентность

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > b_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}(b_n/\sigma\sqrt{k}) + \sum_{k=1}^{n} kF_+(b_n)$$

в случае, когда $\mathbb{E}(\xi^2; |\xi| > x) = o(1/\ln x)$, доказывается совершенно аналогично. □

Лемма 2. *Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — последовательности положительных чисел такие, что $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$. Тогда ряды $\sum_{i=0}^\infty a_i$, $\sum_{i=0}^\infty b_i$ сходятся или расходятся одновременно.*

В случае, когда ряды расходятся, имеет место

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Доказательство. Положим $d_n := \dfrac{b_n}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, здесь, очевидно, $d = \max\limits_n d_n < \infty$. Пусть один из рядов сходится. Без ограничения общности можно считать, что сходится $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i \leqslant d \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Следовательно, сходится и ряд из $\{b_n\}$. Аналогично показывается и одновременная расходимость.

Предположим теперь, что ряды расходятся, но

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} = A > 1.$$

Обозначим

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} a_i, \qquad T_N^M = \sum_{i=N+1}^{M} a_i,$$

$$\widetilde{T}_N = \sum_{i=1}^{N} b_i = \sum_{i=1}^{N} a_i d_i, \qquad \widetilde{T}_N^M = \sum_{i=N+1}^{M} a_i d_i.$$

Пусть число A' удовлетворяет неравенству $1 < A' < A$. Тогда существует число N такое, что $d_n < A'$ для всех $n > N$, откуда выводим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\widetilde{T}_N + \widetilde{T}_N^n}{T_N + T_N^n} < \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\widetilde{T}_N + A'T_N^n}{T_N + T_N^n} = A' < A,$$

что противоречит сделанному предположению. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant 1,$$

и по той же причине

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leqslant 1.$$

Остается заметить, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i \right)^{-1} \geqslant 1,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

$\square$

Лемма 3. *Пусть $f(t)$ — неотрицательная, ограниченная на $(1;\infty)$ функция, которая монотонно не возрастает на $(l;\infty)$ при некотором $l \geqslant 1$. Тогда*

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ *и* $\int\limits_{1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *сходятся или расходятся одновременно;*

2) *если* $\int\limits_{1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int\limits_{1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t}{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)} = 1.$

Доказательство. Первый пункт есть интегральный признак Коши. Докажем утверждение второго пункта. Выберем число $L \in \mathbb{N}$ такое, что $L > l$. Положим

$$I_0 = \int\limits_{1}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad I_n = \int\limits_{L}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$T_0 = \sum_{k=1}^{L-1} f(k), \qquad T_n = \sum_{k=L+1}^{n} f(k), \qquad s = f(L).$$

В силу ограниченности $f(t)$ все величины I_0, T_0 и s конечны. Для всех $k \geqslant L$ верно

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k),$$

откуда следует

$$\sum_{k=L+1}^{n} f(k) \leqslant \int\limits_{L}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=L}^{n} f(k).$$

Поэтому имеем $T_n \leqslant I_n \leqslant T_n + s$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = T_0 + s + T_n, \qquad \int\limits_{1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = I_0 + I_n.$$

В итоге получаем

$$\frac{I_0 + T_n}{T_0 + s + T_n} \leqslant \frac{I_0 + I_n}{T_0 + s + T_n} \leqslant \frac{I_0 + s + T_n}{T_0 + s + T_n}.$$

Правая и левая части стремятся к 1 при $n \to \infty$, так как I_0, T_0 и s — константы, а $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Поэтому

$$\frac{I_0 + I_n}{T_0 + s + T_n} = \frac{\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\sum_{k=1}^n f(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

□

В дальнейшем будет использоваться также следующая

Теорема Карамата (см. [5], §1.1). *Если п.м.ф. $V(x) = x^{-\gamma}L(x)$ имеет показатель $\gamma > 1$, то*

$$V^I(x) := \int\limits_{x}^{\infty} V(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{xV(x)}{\gamma - 1}.$$

Если $\gamma < 1$, то

$$V_I(x) := \int_0^x V(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{xV(x)}{1-\gamma}.$$

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2. Так как $\mathbb{E}I_{\{S_n>x\}} = \mathbb{P}\{S_n > x\}$, то

$$\mathbb{E}T_n(b_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > b_n\}.$$

Применяя лемму 1, получаем

$$\mathbb{E}T_n(n^\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} kF_+(n^\alpha).$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}T_n(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n(n+1)}{2}F_+(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}F_+(n^\alpha).$$

□

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbb{E}(\xi^2; \xi < -x) = o(1/\ln x)$ и $b_n/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Из свойств п.м.ф. известно, что можно выбрать фиксированное $\delta > 0$ такое, что $F_+(x) = O(x^{-2-\delta})$. Откуда имеем

$$\mathbb{E}(\xi^2; \xi > x) \leqslant C\int_0^\infty 2t\mathbb{P}\{\xi > x; \xi > t\}\,\mathrm{d}t = C\int_0^x 2tF_+(x)\,\mathrm{d}t + C\int_x^\infty 2tF_+(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C'x^2x^{-2-\delta} + C'\int_x^\infty 2tt^{-2-\delta}\,\mathrm{d}t = O(x^{-\delta}) = o(1/\ln x),$$

где C и C' — некоторые константы. А значит $\mathbb{E}(\xi^2; |\xi| > x) = o(1/\ln x)$.

Снова применяя лемму 1, получаем

$$\mathbb{E}T_n(b_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > b_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}(b_n/\sigma\sqrt{k}) + \sum_{k=1}^{n} kF_+(b_n).$$

Нетрудно видеть, что

$$\bar{\Phi}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Но тогда из леммы 3 ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}(b_n/\sigma\sqrt{k}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sigma}{b_n\sqrt{2\pi}}\int_1^n \sqrt{t}e^{-\frac{b_n^2}{2t\sigma^2}}\,\mathrm{d}t|s = 1/t| = \frac{\sigma}{b_n\sqrt{2\pi}}\int_{1/n}^1 \frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{b_n^2 s}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}s$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma^3 n^{5/2}}{b_n^3}e^{-\frac{b_n^2}{2n\sigma^2}} + C_1\frac{1}{b_n^3}e^{-\frac{b_n^2}{2\sigma^2}} + C_2\int_{1/n}^1 \frac{1}{b_n^3 s^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{b_n^2 s}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}s,$$

где C_1 и C_2 – некоторые константы. Так как

$$\int\limits_{1/n}^{1} \frac{1}{b_n^3 s^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{b_n^2 s}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}s \leqslant \frac{n}{b_n^2} \int\limits_{1/n}^{1} \frac{1}{b_n s^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{b_n^2 s}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}s = o\left(\int\limits_{1}^{n} \frac{\sqrt{t}}{b_n} e^{-\frac{b_n^2}{2t\sigma^2}} \,\mathrm{d}t \right),$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}(b_n/\sigma\sqrt{k}) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma^3 n^{5/2}}{b_n^3} e^{-\frac{b_n^2}{2n\sigma^2}}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}T_n(b_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma^3 n^{5/2}}{b_n^3} e^{-\frac{b_n^2}{2n\sigma^2}} + \frac{n^2}{2} F_+(b_n).$$

□

Доказательство теоремы 3. Имеем вновь

$$\mathbb{E}T_n(\{b_m\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > b_k\}.$$

Дальнейшие действия разобьем на несколько шагов.

I. Так как $\mathbb{P}\{S_n > n^\alpha\} \underset{n\to\infty}{\sim} nF_+(n^\alpha)$, то ряды $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > k^\alpha\}$ и $\sum_{k=1}^{n} kF_+(k^\alpha)$ сходятся или расходятся одновременно, причем в случае расходимости имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > k^\alpha\} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} kF_+(k^\alpha).$$

Этот факт следует из леммы 2. Функция $xF_+(x^\alpha)$ по условию монотонна с некоторого момента, а также ограничена и неотрицательна на $(1;+\infty)$. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{n} kF_+(k^\alpha)$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^n tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$. Как следует из леммы 3, в случае расходимости имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\sum_{k=1}^{n} kF_+(k^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} \int\limits_{1}^{n} tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t.$$

Основываясь на приведенных рассуждениях, можно заключить, что вместо исследования асимптотики $\mathbb{E}T_n(\{m^\alpha\})$ можно исследовать асимптотику интеграла
$\int_1^n tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$, что нетрудно сделать с помощью теоремы Карамата. Заметим, что под знаком интеграла $\int tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$ находится п.м.ф. $tF_+(t^\alpha)$ с показателем $-\gamma = 1 - \alpha\beta$.

II. На этом шаге мы рассмотрим случай $\gamma = \alpha\beta - 1 < 1$. По теореме Карамата имеем

$$\int\limits_{1}^{n} tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2 F_+(n^\alpha)}{1-\gamma} = \frac{n^2 F_+(n^\alpha)}{2-\alpha\beta}.$$

Функция $t^2F_+(t^\alpha)$ является правильно меняющейся с показателем $2-\alpha\beta > 0$, значит, $n^2F_+(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Следовательно, интеграл $\int_1^n tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$ расходится, но тогда расходится и ряд $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{S_k > k^\alpha\}$, и поэтому

$$\mathbb{E}T_n(\{m^\alpha\}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2F_+(n^\alpha)}{2-\alpha\beta}.$$

III. Рассмотрим теперь случай $\gamma = \alpha\beta - 1 > 1$. По теореме Карамата имеем

$$\int\limits_n^\infty tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2F_+(n^\alpha)}{\gamma-1}.$$

Здесь функция $t^2F_+(t^\alpha)$ правильно меняется с показателем $2-\alpha\beta < 0$, но тогда $n^2F_+(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Значит, интеграл $\int_1^n tF_+(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$ сходится, но тогда сходится и ряд $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{S_k > k^\alpha\}$, а следовательно,

$$\mathbb{E}T_n(\{b_m\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T \equiv \mathrm{const}.$$

□

Доказательство теоремы 4. Так как $L_W(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $W(x)/\sqrt{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и

$$\mathbb{P}\{S_n > W(n)\} \underset{n\to\infty}{\sim} \bar{\Phi}\left(W(n)/\sqrt{n\sigma^2}\right) + nF_+(W(n))$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)} + nF_+(W(n)).$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{S_n > W(n)\}$ сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)} + kF_+(W(k))\right).$$

Нетрудно заметить, что $xF_+(W(x))$ – также п.м.ф с показателем $1-\frac{\beta}{2}$. Поэтому, действуя аналогично нашим рассуждениям из доказательства предыдущей теоремы, получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}kF_+(W(k)) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2F_+(W(n))}{2-\frac{\beta}{2}}$ расходится при $\beta < 4$ и сходится при $\beta > 4$.

Поэтому, если $\beta < 4$ или если ряд $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)}$ расходится, то

$$\mathbb{E}T_n(\{W(m)\}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-L_W^2(k)/2\mathbb{E}\sigma^2}}{L_W(k)} + \frac{n^2F_+(W(n))}{2-\frac{\beta}{2}}.$$

Если же $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{-L_W^2(k)/2\sigma^2}}{L_W(k)}$ сходится и $\beta > 4$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{S_n > W(n)\}$ также сходится и мы имеем, что

$$\mathbb{E}T_n(\{W(n)\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T \equiv \mathrm{const}.$$

□

Доказательство теоремы 5. Мы будем использовать следующую теорему (см. результаты, приведенные в [5], §5.4).

Теорема C. *Пусть $F_+(x) = e^{-l(x)}$, где $l(x)$ — непрерывно дифференцируемая п.м.ф с показателем $0 < \beta < 1$, и выполнено условие* (4). *Пусть также*

$\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}|\xi|^b < \infty$ *при* $b = \left\lfloor \dfrac{1}{1-\beta} \right\rfloor + 2$. *Тогда равномерно по* x *и* n *таким, что* $n \to \infty$ *и* $\pi_2(x,n) := n(l'(x))^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *верно*

$$\mathbb{P}\{S_n \geqslant x\} = nF_+(x)(1+o(1)).$$

Если, к тому же, выполнено условие (5), *то*

$$\mathbb{P}\{S_n \geqslant x\} = ne^{-M(x,n)}(1+o(1))$$

равномерно в области значений x, n *такой, что*

$$n \to \infty, \qquad \pi_1(x,n) := \frac{n}{x^2} l(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Рассмотрим сначала первый случай, когда $\alpha > \dfrac{1}{2-2\beta}$. Ясно, что для любого $k \leqslant n$ верно

$$\pi_2(n^\alpha, k) = k(l'(n^\alpha))^2 \leqslant n(l'(n^\alpha))^2 = O\left(n^{1-2\alpha(\beta-1)} L^2(n^\alpha)\right) \to 0.$$

Это значит, что если $\{N_m\}_{m=1}^\infty$ — любая фиксированная монотонно растущая последовательность, то по теореме C

$$\mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} \underset{n\to\infty}{\sim} kF_+(n^\alpha)$$

для любых таких k, что $N_n \leqslant k \leqslant n$.

Оценим сумму $\sum\limits_{k=1}^{N_n} kF_+(n^\alpha) + \sum\limits_{k=1}^{N_n} \mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\}$. Известно (см. [5], §5.2), что если $\{N_m\}_{m=1}^\infty$ — достаточно медленно растущая последовательность, то для любого $k \leqslant N_n$ верно

$$\mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} \leqslant CkF_+(n^\alpha), \qquad C \equiv \text{const}.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{N_n} kF_+(n^\alpha) + \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} = O\left(N_n^2 F_+(n^\alpha)\right) = o\left(n^2 F_+(n^\alpha)\right). \tag{6}$$

Действуя по аналогии с предыдущими доказательствами, из всего сказанного легко установить, что

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} = \mathbb{E}T_n(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2} F_+(n^\alpha).$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда $\alpha > \frac{1}{2-\frac{3}{2}\beta} > \dfrac{1}{2-\beta}$. Тогда для любого $k \leqslant n$ верно

$$\pi_1(n^\alpha, k) = \frac{k}{n^{2\alpha}} l(n^\alpha) \leqslant \frac{n}{n^{2\alpha}} l(n^\alpha) = n^{1-\alpha(2-\beta)} \to 0,$$

следовательно, по теореме C, имеет место $\mathbb{P}\{S_k > n^\alpha\} \underset{n\to\infty}{\sim} ke^{-M(n^\alpha,k)}$ равномерно по всем $N_n \leqslant k \leqslant n$. Здесь опять $\{N_m\}_{m=1}^\infty$ — некоторая фиксированная монотонно растущая последовательность.

Обозначим

$$t^* = t^*(x,k) := \operatorname*{argmin}_t \left(l(x-t) + n\Lambda_\kappa\left(\frac{t}{k}\right) \right). \tag{7}$$

Получим асимптотическое разложение этой величины. Известно (см. [5], §5.4), что для $k \geqslant N_n$

$$\frac{t^*(n^\alpha,k)}{k} = l'(n^\alpha)(1+o(1))) = O\left(n^{\alpha(\beta-1)}\right),$$

где $\alpha(\beta-1)<0$.

Далее, функция $l'(x)/x^2$ — п.м.ф., а значит существует натуральное $J \geqslant \kappa$ такое, что для всех натуральных $j > J$

$$\left(\frac{t^*(n^\alpha,k)}{k}\right)^j = o\left(\frac{l'(x)}{x^2}\right) = o(\pi_1(x,n)).$$

Представим t^*/k в следующем виде

$$\frac{t^*(x,k)}{k} = \sum_{i=1}^{J} c_i(l'(x))^i + (c_0\pi_1(x,k)+\varepsilon(x,k))\, l'(x), \tag{8}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_J$ — некоторые константы, которые мы найдем позже, а $\varepsilon = \varepsilon(x,k)$ есть некоторая функция. Так как $t^*(x,k)$ уже определено в (7), то $\varepsilon(x,k)$ задается выбором $c_0, c_1, \ldots, c_J$ и, очевидно, стремится к нулю.

Мы хотим показать, что можно выбрать эти константы так, чтобы $\varepsilon(x,k) = o(\pi_1(x,k))$ при $n\to\infty$, $k\geqslant N_n$. Из определения функции $t^*(x,k)$ понятно, что она должна удовлетворять уравнению

$$-l'(x-t^*) + \Lambda'_\kappa\left(\frac{t^*}{k}\right) = 0.$$

Используя (5), преобразуем это уравнение к

$$-l'(x) + \beta(\beta-1)\frac{t^*}{k}\pi_1\cdot(1+o(1)) + \Lambda'_\kappa\left(\frac{t^*}{k}\right) = 0.$$

Подставив сюда (8), получим

$$\beta(\beta-1)\pi_1 l'(x)\left(c_0\pi_1+\varepsilon+\sum_{i=1}^{J} c_i(l'(x))^{i-1}\right)$$

$$+l'(x)\sum_{i=1}^{\kappa J}(c_i+b_i)(l'(x))^{i-1} + 2a_2 l'(x)(c_0\pi_1+\varepsilon) + o\left((\pi_1+\varepsilon)l'(x)\right) = 0,$$

где $b_1, \ldots, b_{\kappa J}$ — некоторые константы, зависящие от $c_1, \ldots, c_J$. Причем, так как для $1 \leqslant j \leqslant J$ величина c_j есть коэффициент, стоящий перед $(l'(x))^j$, то постоянная b_j будет зависеть лишь от $c_1, \ldots, c_{j-1}$. Но тогда, подобрав соответствующим образом параметры $c_1, \ldots, c_J$, мы можем положить $b_j = 0$ для любого $1 \leqslant j \leqslant J$. А значит

$$\sum_{i=1}^{\kappa J} b_i(l'(x))^{i-1} = o(\pi(x,k)).$$

Далее, подбирая c_0, можно избавиться от всех слагаемых вида $C\pi_1 l'(x)$, где $C \equiv \mathrm{const}$.

Таким образом мы приходим к следующей форме уравнения

$$\varepsilon(x,k)l'(x) + o\left((\pi_1+\varepsilon)l'(x)\right) = 0,$$

откуда и получаем, что $\varepsilon(x,k) = o(\pi_1(x,k))$. Этим мы показали, что

$$\frac{t^*(x,k)}{k} = \sum_{i=1}^{J} c_i (l'(x))^i + c_0 \frac{kl(x)l'(x)}{x^2}(1+o(1)). \tag{9}$$

Но тогда

$$\begin{aligned}
M(n^\alpha, k) &= l(n^\alpha - t^*) + \sum_{j=2}^{\kappa} a_j \frac{(t^*)^j}{k^{j-1}} \\
&= l(n^\alpha) - t^* l'(n^\alpha) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\frac{l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}}(t^*)^2\,(1+o(1)) + \sum_{j=2}^{\kappa} a_j \frac{(t^*)^j}{k^{i-1}} \\
&= l(n^\alpha) - k(l'(n^\alpha))^2 \left(\sum_{i=1}^{J} c_i (l'(n^\alpha))^{i-1} + c_0 \frac{kl(n^\alpha)}{n^{2\alpha}}(1+o(1)) \right) \\
&\quad + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\frac{k^2(l'(n^\alpha))^2 l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}}(1+o(1)) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\kappa} \left(d_j k (l'(n^\alpha))^j + O\left(\frac{k^2 (l'(n^\alpha))^j l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}} \right) \right) \\
&= l(n^\alpha) + \sum_{j=2}^{J} \left(d'_j k (l'(n^\alpha))^j + O\left(\frac{k^2 (l'(n^\alpha))^j l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}} \right) \right),
\end{aligned}$$

где $d_2, \dots, d_\kappa, d'_2, \dots, d'_J$ — некоторые константы.

Найдем для каких α имеет место

$$\frac{k^2(l'(n^\alpha))^j l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}} \leqslant \frac{n^2(l'(n^\alpha))^2 l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Имеем

$$\frac{n^2(l'(n^\alpha))^2 l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}} = O\left(n^{2+2\alpha(\beta-1)+\alpha\beta-2\alpha}\right) \to 0$$

при $\alpha(3\beta-4) < -2$ или, что то же самое, $\alpha > \dfrac{1}{2-\frac{3}{2}\beta}$. Значит, мы можем полагать, что в наших условиях для любых $j \geqslant 2$ и $k \leqslant n$ верно

$$\frac{k^2(l'(n^\alpha))^j l(n^\alpha)}{n^{2\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначим

$$\bar q(n) := \exp\left\{ -\sum_{j=2}^{J} d'_j (l'(n^\alpha))^j \right\}.$$

Из предыдущего ясно, что $\exp\{l(n^\alpha) - M(n^\alpha,k)\} = \bar q^k(n)(1+o(1))$ равномерно по всем $k \leqslant n$ при $n \to \infty$. В частности,

$$\bar q(n) = \exp\left\{ \frac{l(n^\alpha) - M(n^\alpha, n)}{n} \right\}(1+o(1)).$$

Это позволяет нам заключить, что

$$\sum_{k=N_n}^{n} k e^{-M(n^\alpha,k)} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-l(n^\alpha)} \sum_{k=N_n}^{n} k \bar q^k(n) \underset{n\to\infty}{\sim} F_+(n^\alpha) \sum_{k=N_n}^{n} k q^k(n).$$

Так как для $2 \leqslant i < j$ верно $(l'(n^\alpha))^j = o((l'(n^\alpha))^i)$, то знак суммы $\sum_{j=2}^J d'_j (l'(n^\alpha))^j$ при достаточно больших n будет совпадать со знаком d'_2. Известно (см. [5], §5.4), что $d'_2 < 0$, а значит $\bar{q}(n) \geqslant 1$. Но тогда из соотношений

$$F_+(n^\alpha) \sum_{k=N_n}^{n} kq^k(n) \geqslant F_+(n^\alpha) q^{N_n}(n) \sum_{k=N_n}^{n} k \geqslant CF_+(n^\alpha) n^2 q^{N_n}(n), \qquad C \equiv \text{const},$$

$$F_+(n^\alpha) \sum_{k=1}^{N_n} kq^k(n) = O(F_+(n^\alpha) N_n^2 q^{N_n}(n)) = o(F_+(n^\alpha) n^2 q^{N_n}(n))$$

и (6) следует

$$\mathbb{E}T_n(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} F_+(n^\alpha) \sum_{k=1}^{n} kq^k(n).$$

Теорема 5 доказана. □

References

[1] V. I. Lotov, *On the asymptotics of the mean sojourn time of a random walk on a semi-axis*, Izvestiya: Mathematics, **79**:3 (2015), 449—466.

[2] V. I. Lotov, *Factorization identities for the sojourn time of a random walk in a strip*, Siberian Mathematical Journal, **51**:1 (2010), 119—127. MR2654528

[3] V. I. Lotov, *On the sojourn time of a random walk in a strip*, Siberian Mathematical Journal, **51**:4 (2010), 621—638. MR2732298

[4] V. I. Lotov, *Asymptotic expansions for the distribution of the sojourn time of a random walk on a half-axis*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **282** (2013), 146—156. MR3308589

[5] A. A. Borovkov, K. A. Borovkov, *Asymptotical analysis of random walks. Vol. 1. Slowly varying distributions of jumps*, Fizmatlit, 2008, 652 p. MR2424161

[6] L. V. Rozovskii, *Probabilities of Large Deviations of Sums of Independent Random Variables with Common Distribution Function in the Domain of Attraction of the Normal Law*, Theory of Probability and its Applications, **34**:4 (1989), 625—644. MR1036709

Anton Sergeevich Tarasenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dkanus@gmail.com