S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 421–431 (2015) УДК 510.64
DOI 10.17377/semi.2015.12.035 MSC 03B44, 03B45

ПОЛИМОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА ИНДУКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ФРЕЙМОВ

В. Ф. ЮН

Abstract. Abstract. A class of frames based on a class of LTK-frames is considered. The polymodal decidable calculus in modal language with three modalities is found which is complete with respect to the class of inductive nearly LTK-frames. It is proved that it is finite approximated by the class of finite inductive nearly LTK-frames.

Keywords: polymodal logic, Kripke frames, axiomatization, completeness, finite model property.

Введение

Известно, что модальная логика отличается большим разнообразием синтаксиса и семантики. Этим можно объяснить широкое применение модальных логик, например, в информационных технологиях, области искусственного интеллекта. Одним из известных подходов к исследованию является комбинирование модальностей знания и времени. Различные логики знания и времени, в том числе линейные, рассматривались, например, в [1], [2], [3], [4].

В частности, в [2] исследуется полимодальная логика линейных временных моделей с моментами времени, которые являются кластерами состояний. Более точно, рассматриваются фреймы $\langle\bigcup_{i\in N} C(i),\ R\rangle$ с линейно упорядоченными R-кластерами состояний $C(i)$, и исследуется логика таких фреймов в языке с временными модальными операторами $\Box$, $\Box^*$ и слабыми модальностями $\Box_w$, $\Box^*_w$. Такие фреймы вполне естественно возникают в информатике и теории искуственного интеллекта: кластерами могут быть люди с их общим знанием,

Yun, V.F., Polymodal logic of the class of inductive linear time frames.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-860.2014.1).

Поступила 15 марта 2015 г., опубликована 12 июля 2015 г.

или все ресурсы в интернете и другие информационные узлы, доступные в данный момент.

При задании логики посредством моделей важнейшими проблемами является выбор модального языка и вопрос аксиоматизации данной логики. В [5] введено дополнительное отношение R_1 между элементами соседних кластеров. Если добавить к языку временные модальности $\Box_1$, $\Box_1^*$, то доказано [5], что слабые модальности выражаются через другие.

В [3] рассмотрены LTK-фреймы $\langle \bigcup_{i\in N} C(i),\ R,\ R_\sim\rangle$ с дополнительными отношениями $S_1,\ldots,S_k$, имитирующими знания агентов и $R_\sim$, описывающим общее знание. Найдена аксиоматизация полимодальной логики класса таких фреймов [3]. Мы введем дополнительное отношение R_1 между элементами соседних кластеров и рассмотрим более широкий класс фреймов вида $\langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1\rangle$, которые назовем индуктивными почти LTK-фреймами. Для простоты, кроме того, рассматривается случай $S_i = R_\sim$ $(1 \le i \le k)$.

Построено исчисление **LKInd** в языке с тремя модальностями $\Box$, $\Box_\sim$, $\Box_1$, полное относительно класса индуктивных почти LTK-фреймов. Доказано, что оно финитно аппроксимируемо и, следовательно, является разрешимым.

1. Исчисление LKInd и теорема о корректности

Рассмотрим модальный язык с модальными операторами $\Box$, $\Box_\sim$, $\Box_1$. Более точно, рассмотрим язык, состоящий из счетного множества пропозициональных переменных P, стандартных логических связок и модальных операторов $\Box$, $\Box_\sim$, $\Box_1$. Формулы определяются как обычно [6].

Будем рассматривать фреймы $\langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1\rangle$ и модели вида $\langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1,\ V\rangle$, где W — непустое множество, R, $R_\sim$, R_1 — бинарные отношения на множестве W, V — означивание переменных, то есть отображение $V : P \to \mathbb{P}(W)$. Означивание V можно расширить стандартным образом [6] на множество формул рассматриваемого языка. В частности, для любого $x \in W$: $x \models_V p \iff x \in V(p)$ для любой переменной $p \in P$ и

$x \models_V \Box A \iff \forall y(xRy \Longrightarrow y \models_V A)$,

$x \models_V \Box_\sim A \iff \forall y(xR_\sim y \Longrightarrow y \models_V A)$,

$x \models_V \Box_1 A \iff \forall y(xR_1 y \Longrightarrow y \models_V A)$.

Формула A *истинна в модели* $M = \langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1,\ V\rangle$, если $x \models_V A$ для любого $x \in W$. Говорим, что формула A *общезначима в фрейме*, если она истинна в любой модели, основанной на этом фрейме.

Определение 1.1. *Фрейм $\langle W,\ R_T,\ R_\sim\rangle$ с заданными на нем k отношениями эквивалентности S_i, называется LTK-фреймом* [3]*, если выполняются свойства:*

(a) $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C^n$ — дизъюнктное объединение непустых множеств C^n;

(b) $xRy \iff \exists n, m \in \mathbb{N}(x \in C^n,\ y \in C^m$ и $n \le m)$;

(c) $xR_\sim y \iff \exists n \in J(x \in C^n$ и $y \in C^n)$;

(d) S_i — некоторое отношение эквивалентности внутри любого C^n, $1 \le i \le k$.

Таким образом каждое множество C^n является R-сгустком (и $R_\sim$-сгустком), то есть для $x \in C^n$: $C^n = \{y \mid xRy$ и $yRx\}$.

Определим новый класс шкал, связанный с классом LTK-фреймов.

Определение 1.2. *Фрейм $\langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1\rangle$ называется индуктивным почти LTK-фреймом, если выполняются свойства:*

(1) для любых $x,\ y \in W$ верно: xRy или yRx;

(2) $R_\sim$ является рефлексивным отношением;

(3) $R_\sim$ является транзитивным отношением;

(4) $R_\sim$ является симметричным отношением;

(5) если xR_1y и xR_1z, то $yR_\sim z$;

(6) если xR_1y и $yR_\sim z$, то xR_1z;

(7) $xRy \iff (xR_\sim y$ или существуют $x_1,\dots,x_n$ такие, что $xR_\sim x_1R_1\dots R_1x_nR_1y)$.

Заметим, что если в произвольном LTK-фрейме отношение R_1 определить следующим образом:

$$xR_1y \iff \exists m\in\mathbb{N}(x\in C^m, y\in C^{m+1}),$$

то в нем будут выполняться свойства (1)–(7).

Отметим еще некоторые простые свойства индуктивных почти LTK-фреймов.

Предложение 1.1. *В индуктивных почти LTK-фреймах верно:*

(8) R — рефлексивное отношение;

(9) R — транзитивное отношение;

(10) если xR_1y, то xRy;

(11) если $xR_\sim y$, то xRy и yRx;

(12) отношение R_1 интранзитивно на $R_\sim$-сгустках. Более точно: если xR_1yR_1z и $\neg(yR_\sim z)$, то $\neg(xR_1z)$.

Доказательство. Свойства (8), (10)–(11) следуют из рефлекствности и транзитивности отношения $R_\sim$ и определения R. Пункт (12) следует из свойства (5). Докажем (9).

Пусть xRy и yRz. Тогда $xR_\sim y$ или существуют $x_1,\dots,x_n$ такие, что $xR_\sim x_1R_1\dots R_1x_nR_1y$. Кроме того, $yR_\sim z$ или существуют $y_1,\dots,y_m$ такие, что $yR_\sim y_1R_1\dots R_1y_mR_1z$.

Если $xR_\sim y$, то из транзитивности $R_\sim$ сразу получаем xRz..

Пусть существуют $x_1,\dots,x_n$ такие, что $xR_\sim x_1R_1\dots R_1x_nR_1y$. Если $yR_\sim z$, то по свойству (6) имеем: x_nR_1z. Следовательно xRz. Если существуют $y_1,\dots,y_m$ такие, что $yR_\sim y_1R_1\dots R_1y_mR_1z$, то по (6) верно: $x_nR_1y_1$. Таким образом, существуют $x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_m$ такие, что $xR_\sim x_1R_1\dots R_1x_nR_1y_1R_1\dots R_1y_mR_1z$. Следовательно xRz, и транзитивность отношения R доказана.

□

Модель, основанную на индуктивном почти LTK-фрейме, будем называть *индуктивной почти LTK-моделью.*

Предложение 1.2. *Следующие формулы общезначимы в индуктивных почти LTK-фреймах:*

(1) $\Box(\Box A_1\longrightarrow A_2)\vee\Box(\Box A_2\longrightarrow A_1)$,

(2) $\Box_\sim A\longrightarrow A$;

(3) $\Box_\sim A\longrightarrow\Box_\sim\Box_\sim A$;

(4) $\Diamond_\sim A\longrightarrow\Box_\sim\Diamond_\sim A$;

(5) $\Diamond_1 A \longrightarrow \Box_1 \Diamond_\sim A$;
(6) $\Box_1 A \longrightarrow \Box_1 \Box_\sim A$;
(7) $\Box_\sim A \& \Box(A \longrightarrow \Box_1 A) \longrightarrow \Box A$;
(8) $\Box A \longrightarrow A$;
(9) $\Box A \longrightarrow \Box\Box A$;
(10) $\Box A \longrightarrow \Box_1 A$;
(11) $\Box A \longrightarrow \Box_\sim A$.

Здесь и далее $\Diamond_S$ — сокращение для $\neg\Box_S\neg$, где $S \in \{R,\ R_1,\ R_\sim\}$.

Заметим, что аксиома (7) похожа на аксиому индукции, а свойство (7) очень похоже на свойство индуктивности [7], [8].

Доказательство. Общезначимость формул (1)–(4), (8)–(11) следует из соответствующих свойств индуктивных почти LTK-фреймов и доказывается стандартным образом.

Докажем общезначимость формулы (5). Предположим, что формула $\Diamond_1 A \longrightarrow \Box_1 \Diamond_\sim A$ не является общезначимой. Тогда она опровергается в некоторой индуктивной почти LTK–модели $\langle W,\ R_T,\ R_\sim,\ R_1, V\rangle$, то есть $x \not\models_V \Diamond_1 A \longrightarrow \Box_1 \Diamond_\sim A$ для некоторого $x \in W$. Далее для краткости будем писать $\models$ вместо $\models_V$.

Таким образом $x \models \Diamond_1 A$ и $x \models \Diamond_1 \Box_\sim \neg A$. Следовательно, существует $y \in W$ такой, что xR_1y и $y \models A$. Кроме того, существует $z \in W$ такой, что xR_1z и $z \models \Box_\sim \neg A$.

Так как xR_1y и xR_1z, то $zR_\sim y$ по свойству (5). Следовательно, $y \models \neg A$. Но $y \models A$, таким образом, предположение не является верным и формула (5) общезначима.

Докажем общезначимость формулы (6) в индуктивных почти LTK-фреймах. Предположим, что формула $\Box_1 A \longrightarrow \Box_1 \Box_\sim A$ не является общезначимой. Тогда она опровергается в некоторой индуктивной почти LTK–модели $\langle W,\ R_T,\ R_\sim,\ R_1, V\rangle$, то есть для некоторого $x \in W$ верно: $x \not\models \Box_1 A \longrightarrow \Box_1 \Box_\sim A$.

Таким образом, $x \models \Box_1 A$ и $x \not\models \Box_1 \Box_\sim A$. Следовательно, существуют $y, z \in W$ такие, что xR_1y, $yR_\sim z$ и $z \models \neg A$. Так как xR_1y и $yR_\sim z$, то xR_1z по свойству (6). Так как $x \models \Box_1 A$, то $z \models A$. Но это противоречит тому, что $z \models \neg A$. Таким образом, предположение неверно, и формула (6) является общезначимой.

Докажем, что общезначима формула $\Box_\sim A \& \Box(A \longrightarrow \Box_1 A) \longrightarrow \Box A$. Предположим, что эта формула не является общезначимой. Тогда она опровергается в некоторой индуктивной почти LTK–модели $\langle W,\ R_T,\ R_\sim,\ R_1, V\rangle$, то есть для некоторого $x \in W$ верно: $x \models \Box_\sim A$, $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1 A)$ и $x \not\models \Box A$.

Так как $x \not\models \Box A$, то существует y такой, что xRy и $y \not\models A$. Так как xRy, то $xR_\sim y$ или существуют $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $xR_\sim x_1 R_1 \ldots R_1 x_n R_1 y$. Случай $xR_\sim y$ невозможен, так как $x \models \Box_\sim A$ и $y \not\models A$. Следовательно, существуют $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $xR_\sim x_1 R_1 \ldots R_1 x_n R_1 y$.

Заметим, что xRx_i для любого $1 \leq i \leq n$. Так как $xR_\sim x_1$ и $x \models \Box_\sim A$, то $x_1 \models A$. Так как $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1 A)$ и xRx_1, то $x_1 \models A \longrightarrow \Box_1 A$. Следовательно $x_1 \models \Box_1 A$, то есть $x_2 \models A$. Кроме того, $x_2 \models A \longrightarrow \Box_1 A$, поскольку $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1 A)$ и xRx_2. Таким образом, $x_2 \models \Box_1 A$, то есть $x_3 \models A$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что $x_n \models A$ и $x_n \models A \longrightarrow \Box_1 A$. Следовательно $x_n \models \Box_1 A$, то есть $y \models A$, что противоречит $y \not\models A$. Таким образом формула (7) является общезначимой во всех индуктивных почти LTK–фреймах.

$\square$

Пусть **LKInd** — логическое исчисление, полученное добавлением к минимальной модальной логике $K_t(R, R_\sim, R_1)$ [6] аксиом (1)–(11).

Из предложения 1.2 сразу следует корректность исчисления **LKInd** относительно класса индуктивных почти LTK-фреймов:

Теорема 1.1. *Для любой формулы A верно: если A выводима в* **LKInd**, *то A общезначима в любом индуктивном почти LTK-фрейме.*

2. Каноническая модель для $LKInd$ и порожденная подмодель

Одной из целей данной работы является доказательство полноты исчисления **LKInd** относительно класса индуктивных почти LTK-фреймов. Для этого рассмотрим каноническую модель исчисления **LKInd**.

Пусть W — множество полных **LKInd**-непротиворечивых **LKInd**-теорий [6].

Определим отношения R, $R_\sim$ и R_1 на множестве W стандартным образом:

$$x_1 R x_2 \Longleftrightarrow \{A \mid \square A \in x_1\} \subseteq x_2,$$

$$x_1 R_\sim x_2 \Longleftrightarrow \{A \mid \square_\sim A \in x_1\} \subseteq x_2,$$

$$x_1 R_1 x_2 \Longleftrightarrow \{A \mid \square_1 A \in x_1\} \subseteq x_2 \ .$$

Определение 2.1 ([6])**.** *Рассмотрим модель $M^c = \langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1,\ V^c \rangle$, где полагаем $(x \in V^c(p) \iff p \in x)$ для любой переменной $p \in P$ и любого элемента $x \in W$. Назовем M^c канонической моделью исчисления* **LKInd**.

Стандартным способом доказывается

Теорема 2.1. *Для любых $x \in W$ и формулы A верно:*

$$x \models^c A \iff A \in x.$$

Докажем некоторые дополнительные свойства канонической модели M^c исчисления **LKInd**.

Теорема 2.2. *Каноническая модель M^c для* **LKInd** *удовлетворяет условиям:*

(M 1) если tRx и tRy, то xRy или yRx;
(M 2) $R_\sim$ является рефлексивным отношением;
(M 3) $R_\sim$ является транзитивным отношением;
(M 4) $R_\sim$ является симметричным отношением;
(M 5) если xR_1y и xR_1z, то $yR_\sim z$;
(M 6) если xR_1y и $yR_\sim z$, то xR_1z;
(M 8) R — рефлексивное отношение;
(M 9) R — транзитивное отношение;
(M 10) если xR_1y, то xRy;
(M 11) если $xR_\sim y$, то xRy.

Доказательство. Свойства (M 1)–(M 4) и (M 8)–(M 11) доказываются стандартным образом с помощью соответствующих аксиом исчисления **LKInd** [6].

Докажем, например, свойство (M 4). Пусть $xR_\sim y$, предположим, что неверно $yR_\sim x$. Тогда существует формула α такая, что $\square_\sim\alpha \in y$ и $\neg\alpha \in x$. Тогда из рефлексивности $R_\sim$ имеем $\Diamond_\sim\neg\alpha \in x$. Так как $xR_\sim y$ и $\square_\sim\alpha \in y$, то $\Diamond_\sim\square_\sim\alpha \in x$. Таким образом $\Diamond_\sim\neg\alpha \& \Diamond_\sim\square_\sim\alpha \in x$, что противоречит аксиоме (4).

Докажем свойство (M 5). Пусть xR_1y и xR_1z. Предположим, что $\neg(yR_\sim z)$. Тогда существует формула α такая, что $\Box_\sim\alpha \in y$ и $\neg\alpha \in z$. Положим $A = \neg\alpha$.

Так как xR_1z, то $\Diamond_1 A \in x$. Так как xR_1y и $\Box_\sim\alpha \in y$, то есть $\neg\Diamond_\sim A \in y$, то $\Diamond_1\neg\Diamond_\sim A \in x$. Таким образом верно $\Diamond_1 A\&\neg\Box_1\Diamond_\sim A \in x$, что противоречит аксиоме (5).

Докажем свойство (M 6). Пусть xR_1y и $yR_\sim z$. Предположим, что $\neg(xR_1z)$. Тогда существует формула α такая, что $\Box_1\alpha \in x$ и $\neg\alpha \in z$. Так как $yR_\sim z$, то $\Diamond_\sim\neg\alpha \in y$. Поскольку xR_1y, то $\Diamond_1\Diamond_\sim\neg\alpha \in x$. Таким образом $\Box_1\alpha\&\neg\Box_1\Box_\sim\alpha \in x$, что противоречит аксиоме (6).

□

Предположим, что формула A_0 невыводима в исчислении **LKInd**. Тогда формула A_0 опровергается в некотором мире t канонической модели $M^c = \langle W,\ R,\ R_\sim,\ R_1,\ V^c\rangle$ исчисления **LKInd**, то есть существует элемент $t \in W$ такой, что $t \not\models^c A_0$. Заметим, что каноническая модель не является индуктивной почти LTK-моделью с линейным временем, поэтому для доказательства полноты необходимо сделать дальнейшие построения.

Рассмотрим порожденную элементом t подмодель канонической модели $M^t = \langle W^t,\ R^t,\ R^t_\sim,\ R^t_1,\ V^t\rangle$, где полагаем $W^t = \{x \in W \mid tRx\}$, $R^t = R|_{W^t}$, $R^t_\sim = R_\sim|_{W^t}$, $R^t_1 = R_1|_{W^t}$, и $x \in V^t(p) \iff x \models^c p$ для любой переменной $p \in P$ и любого элемента $x \in W^t$.

Предложение 2.1. *Порожденная подмодель $M^t = \langle W^t,\ R^t,\ R^t_1,\ V^t\rangle$ удовлетворяет условиям:*

(M^t 1) для любых $x, y \in W^t$ верно: xR^ty или yR^tx;
(M^t 2) $R^t_\sim$ является рефлексивным отношением;
(M^t 3) $R^t_\sim$ является транзитивным отношением;
(M^t 4) $R^t_\sim$ является симметричным отношением;
(M^t 5) если xR^t_1y и xR^t_1z, то $yR^t_\sim z$;
(M^t 6) если xR^t_1y и $yR^t_\sim z$, то xR^t_1z;
(M^t 8) R^t — рефлексивное отношение;
(M^t 9) R^t — транзитивное отношение;
(M^t 10) если xR^t_1y, то xR^ty;
(M^t 11) если $xR^t_\sim y$, то xR^ty.

Доказательство. Свойства (M^t 1)–(M^t 11) сразу следуют из определения порожденной подмодели и соответствующих утверждений теоремы 2.2. □

Лемма 2.1 (о порожденной подмодели)**.** *Для любых $x \in W^t$ и формулы A верно:*

$$x \models^t A \iff x \models^c A.$$

Доказательство. Лемма доказывается стандартным образом индукцией по длине формулы A. Базис индукции следует из определения порожденной подмодели.

Рассмотрим случаи, когда формула A построена с помощью модальных операторов.

Необходимость. Предположим, что $x \models^t A$.

Пусть $A = \Diamond B$, тогда существует $y \in W^t$ такой, что xR^ty и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models^c B$, следовательно, $x \models^c \Diamond B$.

Пусть $A = \Diamond_\sim B$. Тогда существует $y \in W^t$ такой, что $xR^t_\sim y$ и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models_L B$, следовательно, $x \models^c \Diamond_\sim B$.

Пусть $A = \Diamond_1 B$. Тогда существует $y \in W^t$ такой, что $xR^t_1 y$ и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models^c B$, следовательно, $x \models^c \Diamond_1 B$.

Достаточность. Утверждение леммы будет следовать из транзитивности R и того, что $R_\sim \subseteq R$ и $R_1 \subseteq R$. Предположим, что $x \models^c A$.

Если $A = \Diamond B$ и $x \models^c A$, то существует $y \in W$ такой, что xRy и $y \models^c B$. По индукционной гипотезе тогда $y \models^t B$. Докажем, что $y \in W^t$. Так как $x \in W^t$, то tRx. Так как xRy, то отсюда по транзитивности отношения R имеем $y \in W^t$. Таким образом, существует $y \in W^t$ такой, что $xR^t y$ и $y \models^t B$. Следовательно, $x \models^t \Diamond B$.

Пусть $A = \Diamond_\sim B$. Так как $x \models^c A$, то существует $y \in W$ такой, что $xR_\sim y$ и $y \models^c B$. По индукционной гипотезе $y \models^t B$, докажем, что $y \in W^t$. Так как $xR_\sim y$, то xRy по свойству (M 11) канонической модели. Далее, как в предыдущем случае, из транзитивности R следует, что $y \in W^t$. Таким образом, поскольку существует $y \in W^t$ такой, что $xR^t_\sim y$ и $y \models^t B$, то $x \models^t \Diamond_\sim B$.

Случай, когда $A = \Diamond_1 B$, доказывается аналогично с использованием свойства (M 10) канонической модели.

□

Из леммы 2.1 следует, что невыводимая в исчислении **LKInd** формула A_0 опровергается в порожденной подмодели M^t. Но модель M^t все еще не является индуктивной почти LTK-моделью, поэтому для доказательства полноты **LKInd** относительно класса таких моделей мы продолжим построение контрмодели для A_0.

3. Фильтрация и финитная аппроксимируемость

Цель этого раздела доказать, что исчисление **LKInd** финитно аппроксимируемо конечными индуктивными почти LTK-моделями:

Теорема 3.1. *Для любой формулы A верно: формула A выводима в* **LKInd** *тогда и только тогда, когда A истинна в любой конечной индуктивной почти LTK-модели.*

Из теоремы 3.1 сразу будет следовать полнота исчисления **LKInd** относительно индуктивных почти LTK-моделей. Кроме того заметим, что поскольку исчисление **LKInd** конечно аксиоматизируемо, то из теоремы 3.1 будет также следовать разрешимость **LKInd**.

Доказательство теоремы 3.1 Необходимость следует из теоремы 1.1 о корректности. Докажем обратное утверждение методом фильтраций.

Определение 3.1. *Пусть $M = \langle X,\ R,\ R_\sim,\ R_1,\ V\rangle$ — модель, Ψ — конечное множество формул, замкнутое относительно подформул. Определим на X отношение эквивалентности $\equiv_\Psi$: $x \equiv_\Psi y \iff \forall B \in \Psi(x \models B \iff y \models B)$. Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности, содержащий x, то есть $[x] = \{y \mid y \in X,\ x \equiv_\Psi y\}$. Пусть $X' = \{[x] \mid x \in X\}$, и $[x] \in V'(p) \iff x \in V(p)$ для любой пропозициональной переменной p.*

Пусть R', $R'_\sim$ и R'_1 — бинарные отношения на X'. Тогда модель $M' = \langle X',\ R',\ R'_\sim,\ R'_1,\ V'\rangle$ называется фильтрацией M через Ψ, если выполнено следующее:

(FRi) $xRy \Longrightarrow [x]R'[y]$;
$(FRii)$ $[x]R'[y] \Longrightarrow \forall B(\Box B \in \Psi$ *и* $x \models \Box B \Longrightarrow y \models B)$;
$(FR_{\sim}i)$ $xR_{\sim}y \Longrightarrow [x]R'_{\sim}[y]$;
$(FR_{\sim}ii)$ $[x]R'_{\sim}[y] \Longrightarrow \forall B(\Box_{\sim}B \in \Psi$ *и* $x \models \Box_{\sim}B \Longrightarrow y \models B)$;
$(FR_1 i)$ $xR_1 y \Longrightarrow [x]R'_1[y]$;
$(FR_1 ii)$ $[x]R'_1[y] \Longrightarrow \forall B(\Box_1 B \in \Psi$ *и* $x \models \Box_1 B \Longrightarrow y \models B)$.

Известна следующая лемма:

Лемма 3.1 (о фильтрации)**.** [6] *Пусть M' является фильтрацией M через Ψ. Тогда для любой формулы $B \in \Psi$ и любого $x \in X$ верно:*

$$[x] \models' B \Longleftrightarrow x \models B.$$

Кроме того, нетрудно доказать (см., например, [5])

Предложение 3.1. *Пусть M' является фильтрацией M через конечное множество Ψ. Тогда для любого множества $Y \subseteq X'$ существует формула F такая, что для любого $x \in X$ верно:*

$$x \models F \iff [x] \in Y.$$

Продолжим доказательство теоремы 3.1. Пусть формула A_0 невыводима в исчислении **LKInd**. Тогда она опровергается в некотором мире t_0 канонической модели для **LKInd**, следовательно, в порожденной элементом t_0 подмодели $M^{t_0} = \langle X,\ R,\ R_{\sim},\ R_1,\ V\rangle$. Через $Sub(A_0)$ обозначим множество подформул формулы A_0.

Пусть Ψ — конечное множество формул, содержащее множество $Sub(A_0)$, удовлетворяющее следующим условиям:
(1_Ψ) если $\Box_1 A \in \Psi$, то $\Box_{\sim}A \in \Psi$,
(2_Ψ) если $\Box_{\sim}A \in \Psi$, то $\Diamond_1\Box_{\sim}A \in \Psi$,
(3_Ψ) если $\Box A \in \Psi$, то $\Box_{\sim}\Box A \in \Psi$,
и замкнутое относительно подформул.

Нетрудно заметить, что условия на множество Ψ не противоречат его конечности. Построим фильтрацию модели M^t через множество Ψ.

Определим на множестве X' отношения R'_1, $R'_{\sim}$, R' и вспомогательные отношения R''_1, R'' следующим образом:

$$[x]R''_1[y] \iff (\exists x' \equiv_\Psi x)(\exists y' \equiv_\Psi y)(x'R_1y'),$$

$$[x]R''[y] \iff \forall \Box B \in \Psi(x \models \Box B \Longrightarrow y \models \Box B),$$

$$[x]R'_{\sim}[y] \iff \forall \Box_{\sim}B \in \Psi(x \models \Box_{\sim}B \iff y \models \Box_{\sim}B),$$

$$R'_1 = R''_1 \circ R'_{\sim},$$

$$[x]R'[y] \iff ([x]R'_{\sim}[y] \text{ или существуют } [x_1],\dots,[x_n] \text{ такие, что } [x]R'_{\sim}[x_1]R'_1\dots R'_1[x_n]R'_1[y]).$$

Известно, что определенное выше отношение $R'_{\sim}$ удовлетворяет $(FR_{\sim}i)$, $(FR_{\sim}ii)$. Докажем, что для отношений R'_1 и R' выполняются свойства фильтрации (FR_1i), (FR_1ii) и (FRi), $(FRii)$ соответственно.

Предложение 3.2. *Верно (FR_1i).*

Доказательство. Пусть xR_1y, тогда $[x]R_1''[y]$. Так как отношение $R_\sim$ рефлексивно, то $[y]R_\sim'[y]$, следовательно $[x]R_1''[y]R_\sim'[y]$. Таким образом $[x]R_1'[y]$.

$\square$

Предложение 3.3. *Выполняется* (FR_1ii).

Доказательство. Предположим, что $\square_1 A \in \Psi$, $[x]R_1'[y]$ и $x \models \square_1 A$. Докажем, что $y \models A$.

Так как $[x]R_1'[y]$, то $[x]R_1''[a]R_\sim'[y]$ для некоторого $[a]$. Следовательно $(\exists x' \equiv_\Psi x)(\exists a' \equiv_\Psi a)(x'R_1a')$ и $x' \models \square_1 A$. Тогда по аксиоме (6) верно: $x' \models \square_1\square_\sim A$. Следовательно $a' \models \square_\sim A$. Из условия (1_Ψ) имеем $\square_\sim A \in \Psi$. Таким образом, $y \models \square_\sim A$, следовательно по аксиоме (2) $y \models A$.

$\square$

Для доказательства (FRi), $(FRii)$ отметим сначала некоторые дополнительные свойства введенных отношений.

Предложение 3.4. *(1) R'' является рефлексивным, транзитивным отношением;*

(2) $[x]R_1'[y] \Longrightarrow [x]R''[y]$;

Доказательство. Пункт (1) следует сразу из определения отношения R''.

Докажем пункт (2).

Пусть $[x]R_1'[y]$, $\square A \in \Psi$ и $x \models \square A$. Докажем, что $y \models \square A$.

Так как $[x]R_1'[y]$, то $[x]R_1''[a]R_\sim'[y]$ для некоторого $[a]$. Следовательно $(\exists x' \equiv_\Psi x)(\exists a' \equiv_\Psi a)(x'R_1a')$ и $x' \models \square A$. Тогда по аксиоме (9) верно: $x' \models \square\square A$. Следовательно по аксиоме (10) имеем $x' \models \square_1\square A$. Таким образом, из аксиомы (6) получаем

$$x' \models \square_1\square_\sim\square A.$$

Следовательно $a' \models \square_\sim\square A$. Заметим, что $\square_\sim\square A \in \Psi$ из условия (3_Ψ) на множество Ψ. Так как $[a]R_\sim'[y]$, то $y \models \square_\sim\square A$. Тогда по аксиоме (2) имеем: $y \models \square A$.

$\square$

Предложение 3.5. *Если $[x]R'[y]$, то $[x]R''[y]$, следовательно выполняется* $(FRii)$.

Доказательство. Пусть $[x]R'[y]$, $\square A \in \Psi$ и $x \models \square A$. Докажем, что верно $y \models \square A$. Так как $[x]R'[y]$, то $[x]R_\sim'[y]$ или существуют $[x_1], \dots, [x_n]$ такие, что $[x]R_\sim'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_n]R_1'[y]$. Рассмотрим эти случаи.

(a) Пусть $[x]R_\sim'[y]$. Так как $x \models \square A$, то по аксиомам $(9), (11)$ $x \models \square_\sim\square A$. Кроме того $\square_\sim\square A \in \Psi$ из условия (3_Ψ). Следовательно $y \models \square_\sim\square A$. Тогда по аксиоме (2) имеем, что $y \models \square A$.

(b) Пусть существуют $[x_1], \dots, [x_n]$ такие, что $[x]R_\sim'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_n]R_1'[y]$. Тогда как в пункте (a) доказывается, что $x_1 \models \square A$. По предложению 3.4 имеем $[x_1]R''[y]$. Следовательно $y \models \square A$.

$\square$

Предложение 3.6. *Отношение R' удовлетворяет свойству* (FRi).

Доказательство. Пусть xRy, докажем, что $[x]R'[y]$. Пусть $Y = \{[t] \mid [x]R'[t]\}$, докажем $[y] \in Y$.

По предложению 3.1 существует формула F такая, что для любого $t \in X$ верно: $t \models F \iff [t] \in Y$. Таким образом достаточно доказать, что $y \models F$.

Замечание. $x \models \Box_\sim F$ *и* $x \models \Box(F \longrightarrow \Box_1 F)$.

Доказательство. (1) Докажем, что $x \models \Box_\sim F$. Надо доказать, что если $xR_\sim v$, то $v \models F$, то есть $[v] \in Y$.

Пусть $xR_\sim v$, тогда $[x]R_\sim[v]$ по свойству $(FR_\sim i)$, следовательно по определению множества Y и отношения R' имеем: $[v] \in Y$.

(2) Докажем, что $x \models \Box(F \longrightarrow \Box_1 F)$. Пусть t такой, что xRt и $t \models F$. Требуется доказать, что $t \models \Box_1 F$. Для этого необходимо доказать, что если $u \in X$ такой, что $tR_1 u$, то $u \models F$.

Заметим, что если $tR_1 u$, то $[t]R'_1[u]$ по предложению 3.2. Так как $t \models F$, то $[t] \in Y$, то есть $[x]R'[t]$. Следовательно $[x]R'_\sim[t]$ или существуют $[x_1], \dots, [x_n]$ такие, что $[x]R'_\sim[x_1]R'_1 \dots R'_1[x_n]R'_1[t]$. Рассмотрим эти случаи.

(a) Пусть $[x]R'_\sim[t]$. Так как $[t]R'_1[u]$, то по определению отношения R' имеем: $[x]R'[u]$. Следовательно $[u] \in Y$, то есть $u \models F$.

(b) Пусть существуют $[x_1], \dots, [x_n]$ такие, что $[x]R'_\sim[x_1]R'_1 \dots R'_1[x_n]R'_1[t]$. Так как $[t]R'_1[u]$, то опять сразу из определения R' имеем: $[x]R'[u]$. Следовательно $[u] \in Y$, то есть $u \models F$. $\Box$

По замечанию имеем, что $x \models \Box_\sim F$ и $x \models \Box(F \longrightarrow \Box_1 F)$. Следовательно, по аксиоме (7) верно: $x \models \Box F$. Так как xRy, то $y \models F$, и свойство (FRi) доказано. $\Box$

Из предложений 3.2, 3.3, 3.5, 3.6 можно заключить, что построенная выше модель $M' = \langle X',\ R',\ R'_\sim,\ R'_1,\ V' \rangle$ является фильтрацией модели $M^{t_0} = \langle X,\ R,\ R_\sim,\ R_1,\ V \rangle$ через конечное множество Ψ. Следовательно, по лемме 3.1 получаем, что невыводимая в исчислении **LKInd** формула A_0 опровергается в модели M'. Для доказательства теоремы 3.1 осталось доказать, что модель M' является индуктивной почти LTK-моделью:

Теорема 3.2. *В модели* $M' = \langle X',\ R',\ R'_\sim,\ R'_1,\ V' \rangle$ *верны свойства:*

(1) для любых $[x]$, $[y] \in X'$ *верно:* $[x]R'[y]$ *или* $[y]R'[x]$;

(2) $R'_\sim$ *является рефлексивным отношением;*

(3) $R'_\sim$ *является транзитивным отношением;*

(4) $R'_\sim$ *является симметричным отношением;*

(5) если $[x]R'_1[y]$ *и* $[x]R'_1[z]$, *то* $[y]R'_\sim[z]$;

(6) если $[x]R'_1[y]$ *и* $[y]R'_\sim[z]$, *то* $[x]R'_1[z]$;

(7) $[x]R'[y] \iff ([x]R'_\sim[y]$ *или существуют* $[x_1], \dots, [x_n]$ *такие, что* $[x]R'_\sim[x_1]R'_1 \dots R'_1[x_n]R_1[y])$.

Доказательство. Свойство (1) сразу следует из предложения 2.1 и предложения 3.6. Свойства (2)–(4) легко доказываются из определения отношения $R'_\sim$. Свойство (7) сразу следует из определения R'. Докажем оставшиеся свойства.

(5) Пусть $[x]R'_1[y]$, $[x]R'_1[z]$ и $\Box_\sim A \in \Psi$. Докажем, что

$$y \models \Box_\sim A \iff z \models \Box_\sim A.$$

Предположим, что $y \models \Box_\sim A$. Так как $[x]R'_1[y]$, то $[x]R''_1[a]R'_\sim[y]$ для некоторого $[a]$. Следовательно $(\exists x' \equiv_\Psi x)(\exists a' \equiv_\Psi a)(x' R_1 a')$. Так как $[x]R'_1[z]$, то $[x]R''_1[b]R'_\sim[z]$ для некоторого $[b]$. Следовательно $(\exists x'' \equiv_\Psi x)(\exists b' \equiv_\Psi b)(x'' R_1 b')$.

Поскольку $y \models \Box_\sim A$, $\Box_\sim A \in \Psi$ и отношение $R'_\sim$ симметрично, то $a \models \Box_\sim A$. Следовательно $a' \models \Box_\sim A$. Таким образом

$$x' \models \Diamond_1 \Box_\sim A.$$

Так как $\Box_\sim A \in \Psi$, то по условию (2_Ψ) верно: $\Diamond_1\Box_\sim A \in \Psi$. Следовательно

$$x'' \models \Diamond_1\Box_\sim A.$$

По выводимой из аксиом $(5), (6)$ формуле $\Diamond_1\Box_\sim A \longrightarrow \Box_1\Box_\sim A$ тогда

$$x'' \models \Box_1\Box_\sim A.$$

Так как $x''R_1b'$, то $b' \models \Box_\sim A$. Так как $\Box_\sim A \in \Psi$, $b' \equiv_\Psi b$ и $[b]R'_\sim[z]$, то $z \models \Box_\sim A$.

Утверждение ($z \models \Box_\sim A \Longrightarrow y \models \Box_\sim A$) доказывается аналогично.

(6) Пусть $[x]R'_1[y]$ и $[y]R'_\sim[z]$, тогда $[x]R''_1 \circ R'_\sim[y]$. Следовательно, из транзитивности $R'_\sim$ имеем: $[x]R''_1 \circ R'_\sim[z]$. Таким образом $[x]R'_1[z]$ и теорема 3.2 доказана. $\Box$

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность Л.Л. Максимовой за неоценимую помощь в работе.

References

[1] J.Y. Halpern, R. Van der Meyden, M.Y. Vardi, *Complete Axiomatizations for Reasoning about Knowledge and Time*, SIAM J. on Comp. 33, (2004), 674—703. MR2066649

[2] V.Rybakov, *Discrete linear temporal logic with current time point clasters, deciding algorithms*, Logic and Logic Philosophy, **17**: 1–2, 2008. MR2446429

[3] E.Calardo, V.V. Rybakov, *An axiomatization for the multi-modal logic of knowledge and time LTK*, Logic J. IGPL, **15**:3 (2007), 239–254. MR2336910

[4] Lukyanchuk A., *Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge*, J. Sib. Federal Univ., **6**:2 (2013), 220–226. MR3184096

[5] В.Ф.Юн, *Временная логика линейных по времени фреймов с аксиомой индукции*, СЭМИ, **6** (2009), 312–325. MR2586692

[6] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal logics*, Oxford Logic Guides **35**, Oxford, Clarendon Press, 1997.

[7] D.Vakarelov, *Modal logics for Knowledge Representation Systems*, Preprint №7, Sofia Univ., 1988.

[8] D.Vakarelov, *Inductive Modal Logics*, Fundamenta Informaticae **16**(1992), 383–405. MR1176894

Вета Федоровна Юн
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: veta_v@mail.ru