S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 432–435 (2015) УДК 517.982.2
DOI 10.17377/semi.2015.12.036 MSC 46A15

О ВЕРХНЕМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ СЕМЕЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ k

К.В. СТОРОЖУК

Abstract. Let $\{L_\alpha \mid \alpha \in I\}$ be an infinite family of subspaces in a topological vector space X the codimension of each of which is at most k. We prove that there exists a subspace $L \subset X$, $\operatorname{codim} L \le k$, such that every $x \in L$ is a limit point of some family $\{l_\alpha \in L_\alpha\}$.

Keywords: upper topological limit.

1. Введение

Пусть I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подмножеств топологического пространства X.

Множество $Ls\{X_\alpha\}$, состоящее из всех точек x таких, что для каждой окрестности U точки множество $\{\alpha \in I \mid U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$ бесконечно, будем называть верхним топологическим пределом семейства $\{X_\alpha\}$ (см., например, Хаусдорф [1] или Куратовский [2], в [1, 2] такое определение дано для метрического пространства X и при $I = \mathbb{N}$. В последнем случае множество $Ls\{X_n\}$ состоит из всевозможных предельных точек последовательностей вида $\{x_n \in X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Несложно видеть, что $Ls\{X_\alpha\}$ — замкнутое множество.

Следующее утверждение имеет содержательные приложения при исследовании необходимых условий второго порядка в теории экстремальных задач с ограничениями и задач оптимального управления (см. [3]—[7]).

Storozhuk, K.V., On upper topological limit of family of vector subspaces of codimension k.

Работа поддержана грантом ведущих научных школ NSh-2263.2014.1 и грантом РФФИ 15-01-05929-а.

Поступила 5 июля 2015 г., опубликована 20 июля 2015 г.

Утверждение 1 (лемма Арутюнова). *Пусть X — банахово пространство, $k \in \mathbb{N}$, $\{L_n\}$ — последовательность замкнутых подпространств X таких, что* $\operatorname{codim} L_n \leq k$. *Тогда $Ls\{L_n\}$ содержит замкнутое подпространство $L \subset X$ такое, что* $\operatorname{codim} L \leq k$.

В работах [4] и [5] эта лемма сформулирована и использовалась в случае рефлексивных пространств. В полной общности она доказана в работе [6], где лемма выводится из следующего утверждения:

Утверждение 2. *Пусть X — банахово пространство, $k < \infty$, $A_n : X \to \mathbb{R}^k$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность линейных операторов, сходящихся по норме к оператору A. Тогда существует замкнутое подпространство $L \subset X$ такое, что* $\operatorname{codim} L \leq k$ *и* $L \subset Ls\{\ker A_n\} \subset \ker A$.

Ключевой момент в доказательстве леммы Арутюнова заключается в построении с помощью ультрафильтров так называемого оператора Дубовицкого $\mathcal{D}^k$. Этот оператор действует из пространства $l^k_\infty = \{v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \|v\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n| < \infty\}$ в $\mathbb{R}^k$ и обладает следующим свойством: любой элемент $\{v_i\}$ из ядра $\mathcal{D}^k$ обязательно имеет частичным пределом нуль, то есть для каждого ε множество $\{i \mid |v_i| < \varepsilon\}$ бесконечно. Наличие такого оператора по существу следует из критерия компактности в терминах сходимости по ультрафильтрам. В случае, когда пространство X гильбертово или конечномерно, доказательство не требует теории ультрафильтров и имеется в [3], § 5.17, а также в [7].

Утверждения 1 и 2 равносильны. Заметим, что в утверждении 2 вместо сходимости по норме достаточно требовать обычной сильной (т.е. поточечной) сходимости $A_n \to A$ или даже слабой сходимости. В самом деле, в силу принципа равномерной ограниченности все A_n равномерно ограничены по норме, а тогда ясно, что $Ls\{\ker A_n\} \subset \ker A$ и остальное следует из утверждения 1.

Мы заменим, во-первых, последовательности операторов их произвольными семействами и, во-вторых, банахово пространство произвольным топологическим векторным пространством.

Теорема 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, X — топологическое векторное пространство, I — бесконечное множество индексов, $\{L_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подпространств таких, что* $\operatorname{codim} L_\alpha \leq k$. *Тогда существует подпространство L такое, что* $\operatorname{codim} L \leq k$ *и для любого $x \in L$ найдётся семейство $\{x_\alpha \in L_\alpha \mid \alpha \in I\}$, имеющее x точкой полного накопления, то есть для каждой окрестности U точки x мощность множества $\{\alpha \mid x_\alpha \in U\}$ равна мощности всего множества I.*

Ясно, что замыкание $\overline{L}$ такого подпространства содержится в множестве $Ls\{L_\alpha\}$. Поэтому, в частности, лемма Арутюнова справедлива для произвольных нормированных пространств и пространств Фреше.

2. Доказательство теоремы

Пусть I — наше семейство индексов (упорядоченность не предполагается), а $\mathcal{F}$ — ультрафильтр на множестве I, т.е. такое семейство бесконечных подмножеств $F \subset I$, которое замкнуто относительно операций конечного пересечения, взятия надмножества и такое, что для каждого $G \subset I$ либо $G \in \mathcal{F}$, либо $I \backslash G \in \mathcal{F}$. Потребуем вдобавок от нашего ультрафильтра, чтобы он был равномерным, т.е. чтобы все его элементы имели мощность $|I|$. Равномерные ультрафильтры существуют (см., например, [8]).

Напомним: семейство $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ элементов X сходится по $\mathcal{F}$ к точке $x \in X$, если для любой её окрестности U множество индексов $\{\alpha \mid x_\alpha \in U\}$ принадлежит $\mathcal{F}$. Для доказательства теоремы достаточно установить существование подпространства L, $\operatorname{codim} L \leq k$ и такого, что $\forall x \in L\ \exists \{l_\alpha \in L_\alpha\}, l_\alpha \underset{\mathcal{F}}{\to} x$.

Любое числовое семейство $t_\alpha \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ сходится по ультрафильтру $\mathcal{F}$ к какому-то $t \in \overline{\mathbb{R}}$ — это легко следует из компактности $\overline{\mathbb{R}}$. Доказательство теоремы использует лишь этот факт и не выходит за рамки применения теорем о сумме и отношении пределов. Далее все сходимости понимаются по ультрафильтру. Запись типа $s_\alpha \to s$ подразумевает, что s_α определены для некоторого множества индексов $\alpha \in F \in \mathcal{F}$. Отметим: ниже замкнутость подпространств и непрерывность функционалов не предполагается.

Теорему будем доказывать индукцией по k.

Пусть $k = 1$, т.е. L_α — гиперплоскости. Выберем линейные функционалы φ_α такие, что $L_\alpha = \ker \varphi_\alpha$. Возможны два случая:

1. Для каждого $y \in X$ существует $x \in X$ такой, что $\frac{\varphi_\alpha(y)}{\varphi_\alpha(x)} \to 0$. Для таких y и x положим $l_\alpha = y - \frac{\varphi_\alpha(y)}{\varphi_\alpha(x)} x$. Ясно, что $l_\alpha \in \ker \varphi_\alpha$ и $l_\alpha \to y$. Таким образом, для каждого $y \in X$ нашлось семейство $l_\alpha \in L_\alpha$, сходящееся к y. Итак, $L = X$.

2. Пусть случай 1 не имеет место, то есть существует $y \in X$ такой, что $\frac{\varphi_\alpha(y)}{\varphi_\alpha(x)} \not\to 0$ для каждого $x \in X$ или, что то же самое, $|\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}| \not\to \infty$, то есть $\lim \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}$ конечен для каждого x. (Поскольку семейство $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}$ числовое, этот предел по ультрафильтру существует.) Определим линейный функционал ψ на X формулой $\psi(x) = \lim \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}$. Пусть $L = \ker \psi$. Для каждого $x \in L$ имеем $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)} \to 0$ и поэтому семейство $l_\alpha = (x - \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)} y) \in \ker \varphi_\alpha = L_\alpha$ сходится к x. Итак, подпространство L найдено и база индукции построена.

Заметим, что в обоих случаях сходящиеся векторы лежат на одной прямой, содержащей предельный вектор.

Шаг индукции. Пусть $\operatorname{codim} L_\alpha \leq k$. Снова разберём два случая.

1. Каждый $y \in X$ «близок к $\{L_\alpha\}$» в следующем смысле: существуют $l_\alpha \in L_\alpha$ такие, что $l_\alpha \to y$. Тогда искомое L совпадает с X.

2. Существует $y \in X$, «далёкий от $\{L_\alpha\}$», то есть такой, что $l_\alpha \not\to y$ для любых $l_\alpha \in L_\alpha$. Рассмотрим линейные расширения пространств L_α элементом y, положив $M_\alpha = \operatorname{Lin}(L_\alpha, y) \subset X$. При этом $\operatorname{codim} M_\alpha \leq k - 1$.

В силу индуктивного предположения, для этих подпространств найдётся подпространство M, $\operatorname{codim} M \leq k-1$ такое, что для каждого $x \in M$ существует семейство $x_\alpha \in M_\alpha$, $x_\alpha \to x$. Каждый x_α представляется в виде $x_\alpha = l_\alpha + t_\alpha y$, где $l_\alpha \in L_\alpha$, $t_\alpha \in \mathbb{R}$. Покажем, что для каждого $x \in M$ числовое семейство t_α сходится к конечному числу $t = t(x)$, не зависящему от выбора семейства $x_\alpha \to x$.

Конечность. Если $x_\alpha = l_\alpha + t_\alpha y \to x$ и $t_\alpha \to \infty$, то $\frac{x_\alpha}{t_\alpha} = \frac{l_\alpha}{t_\alpha} + y \to 0$, чего, однако, не может быть в силу удаленности y от подпространств L_α.

Независимость от x_α. Если $x_\alpha = l_\alpha + t_\alpha y \to x$ и $\tilde{x}_\alpha = \tilde{l}_\alpha + \tilde{t}_\alpha y \to x$, то $(\tilde{l}_\alpha - l_\alpha) + (\tilde{t}_\alpha - t_\alpha) y \to 0$, что возможно только если $(\tilde{t}_\alpha - t_\alpha) \to 0$.

Очевидно, $t : M \to \mathbb{R}$ — линейный функционал (быть может, нулевой). Покажем, что $L = \ker t \subset M$ — искомое подпространство. Для каждого $x \in \ker t$ имеем: $l_\alpha + t_\alpha y \to x$ и $t_\alpha \to 0$, а, значит, $l_\alpha \to x$. Имеем: $\operatorname{codim} L \leq \operatorname{codim} M + 1 \leq k$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема справедлива и для векторных пространств над полем $\mathbb{C}$. В доказательствах вместо $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ в качестве компактификации основного поля будет расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}{=}\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Автор благодарит А.Е. Гутмана за ценное обсуждение.

References

[1] F. Hausdorff, *Set theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1957. MR0086020

[2] K. Kuratowski, *Topology.* I, 1966. MR0217751

[3] O.V. Vasil'ev, *Metody optimizatsii.* Book 1, 2011.

[4] A.V. Arutyunov, N.T. Tynyanskii, *On necessary conditions for a local minimum in optimal control theory* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **275**:2 (1984), 268—272. MR0742203

[5] A.V. Arutyunov, *On necessary conditions for optimality in a problem with phase constraints*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **280**:5 (1985), 1033—1037. MR0780283

[6] A.V. Arutyunov, *Second-order conditions in extremal problems with a finite-dimensional image. 2-normal mappings.* (Russian), Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **60**:1 (1996), 37–62; translation in Izv. Math., **60**:1 (1996), 39—65. MR1391117

[7] A.V. Arutyunov, *Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis.* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk, **67**:3(405) (2012), 3–62; translation in Russian Math. Surveys, **67**:3 (2012), 403—457. MR3024844

[8] W.W. Comfort, S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer, 1974. MR0396267

Konstantin Valer'evich Storozhuk
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str.,2
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: stork@math.nsc.ru