S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 436–446 (2015) УДК 514.8, 517.983
DOI 10.17377/semi.2015.12.037 MSC 44A30

ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЛУЧЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

И.Е. СВЕТОВ

Abstract. We obtained the inversion formulas for recovering the harmonic 2D-vector field given in unit disk by known ray transforms.

Keywords: vector field, solenoidal field, potential field, harmonic field, inversion formula, longitudinal ray transform, transverse ray transform, Radon transform, harmonic polynomials.

1. Введение

Зачастую в обратных задачах искомыми величинами являются не скалярные функции, а векторные или тензорные поля различной валентности. Таковы постановки ряда задач теории неоднородных и анизотропных сред, газовой и гидродинамики, электродинамики. Математические формулировки задач восстановления векторных и тензорных полей возникли в 1980-х (см., например, [1]). Современные постановки используют аппарат интегральной геометрии векторных и тензорных полей на римановом многообразии [2]. Свойства преобразования Радона (лучевого преобразования скалярных полей) хорошо известны и описаны, например, в [3]. В то время как свойства лучевых преобразований, действующих на векторные поля, исследованы не в полной мере.

В работе [2] исследовались свойства продольного лучевого преобразования, действующего на симметричные тензорные поля произвольной валентности m, в средах с рефракцией. В частности доказано, что ядро состоит из потенциальных полей с потенциалами, обращающимися в нуль на границе области.

Svetov, I.E., Inversion formulas for recovering the harmonic 2D-vector field by known ray transforms.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31491-мол_а).

Поступила 14 апреля 2015 г., опубликована 11 августа 2015 г.

В случае евклидовой метрики получены покомпонентные формулы обращения. В работе [4] проведено исследование свойств не только продольного, но и поперечного лучевых преобразований, действующих на двумерные векторные поля. Доказано, что ядро поперечного лучевого преобразования состоит из соленоидальных векторных полей с потенциалами, обращающимися в нуль на границе области. В случае евклидовой метрики указана связь продольного и поперечного лучевых преобразований и преобразования Радона, выписаны формулы обращения для восстановления компонент векторного поля и для восстановления потенциала. Отметим обзор Т. Шустера [5], посвященный наиболее важным теоретическим и численным достижениям в области векторной томографии за последние два десятилетия.

Во всех известных формулах обращения на восстанавливаемое поле накладываются условие гладкости, а также граничное условие. Именно, при восстановлении поля во всем пространстве требуется быстрое убывание на бесконечности вместе со всеми производными. В то время как при восстановлении поля, заданного в ограниченной области, на потенциалы, образующие потенциальную и соленоидальную части, налагается требование обращения в нуль на границе области. Таким образом, рассматриваются только поля без гармонической части.

В данной работе получены формулы обращения для восстановления гармонического векторного поля, заданного в единичном круге, по известному продольному или поперечному лучевому преобразованию в случае евклидовой метрики. Также получена формула обращения для восстановления произвольного векторного поля, заданного в единичном круге, по известным одновременно продольному и поперечному лучевым преобразованиям.

2. Определения и свойства

Пусть $\mathbb{B} = \{\mathrm{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{x}| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ — единичный круг с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат, а $\partial\mathbb{B} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{x}| = 1\}$ его граница. Введем обозначение для цилиндра $Z = \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 2\pi), s \in (-1, 1)\}$.

Основные используемые пространства. Мы будем использовать гильбертовы пространства Соболева $H^k(\mathbb{B})$, с целыми $k \geqslant 0$, состоящие из интегрируемых в квадрате функций, заданных в $\mathbb{B}$ и имеющих производные вплоть до k-го порядка из $L_2(\mathbb{B})$. Подпространства $H_0^k(\mathbb{B})$ — подмножества функций из $H^k(\mathbb{B})$, обращающихся в нуль на $\partial\mathbb{B}$ вместе со всеми производными вплоть до $(k-1)$-го порядка. Скалярное произведение определяется формулой

$$(f, g)_{H^k(\mathbb{B})} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \int_{\mathbb{B}} D^\alpha f D^\alpha g \, d\mathrm{x},$$

где α — мультииндекс, а D^α — оператор производной по мультииндексу.

Множество векторных полей $w(\mathrm{x}) = (w_1(\mathrm{x}), w_2(\mathrm{x})) = (w^1(\mathrm{x}), w^2(\mathrm{x}))$, определенных в $\mathbb{B}$, обозначается $S^1(\mathbb{B})$. Скалярное произведение в $S^1(\mathbb{B})$ вводится формулой

$$\langle u(\mathrm{x}), v(\mathrm{x}) \rangle = u_i(\mathrm{x}) v^i(\mathrm{x}),$$

где по повторяющимся сверху и снизу одноименным индексам подразумевается суммирование от 1 до 2. Напомним, что в евклидовом пространстве с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат различия между контравариантными и ковариантными компонентами нет.

Функциональное пространство $L_2(S^1(\mathbb{B}))$ состоит из интегрируемых в квадрате векторных полей, определенных в $\mathbb{B}$. Скалярное произведение двух векторных полей u и v из пространства $L_2(S^1(\mathbb{B}))$ задается формулой:

$$(u,v)_{L_2(S^1(\mathbb{B}))} = \int\limits_{\mathbb{B}} \langle u(\mathrm{x}), v(\mathrm{x})\rangle d\mathrm{x}.$$

Пространства Соболева векторных полей обозначим через $H^k(S^1(\mathbb{B}))$, $H_0^k(S^1(\mathbb{B}))$.

Кроме того мы будем использовать пространства $L_2(Z)$ и $H^k(Z)$. Скалярное произведение функций f и g из $L_2(Z)$ задается формулой:

$$(f,g)_{L_2(Z)} = \int\limits_{Z} f(z)g(z)dz.$$

Дифференциальные операторы. Операторы *внутреннего дифференцирования* d и *внутреннего* $\perp$*-дифференцирования* $\mathrm{d}^\perp$

$$\mathrm{d}, \mathrm{d}^\perp : H^k(\mathbb{B}) \to H^{k-1}(S^1(\mathbb{B}))$$

и определяются формулами

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \qquad \mathrm{d}^\perp\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Наряду с этими операторами нам понадобится оператор *дивергенции*

$$\delta : H^k(S^1(\mathbb{B})) \to H^{k-1}(\mathbb{B}),$$

который действует на векторное поле v по правилу

$$\delta v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Векторное поле $w \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ называется *потенциальным*, если существует функция $\varphi \in H^{k+1}(\mathbb{B})$ такая, что $w = \mathrm{d}\varphi$. Векторное поле $w \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ называется *соленоидальным*, если $\delta w = 0$. Нетрудно проверить, что поле $\mathrm{d}^\perp\psi$ является соленоидальным для $\psi \in H^{k+1}(\mathbb{B})$. Потенциальное поле $\mathrm{d}h$ называется *гармоническим*, если $\delta(\mathrm{d}h) = 0$. В этом случае потенциал h — *гармоническая функция*. В силу определения, гармонические поля являются одновременно потенциальными и соленоидальными.

Известно [6], что любое векторное поле $w \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ единственным образом представимо в виде

$$w = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}h + \mathrm{d}^\perp\psi, \tag{1}$$

где $\varphi\big|_{\partial\mathbb{B}} = \psi\big|_{\partial\mathbb{B}} = 0$, а h — гармоническая функция.

Любая гармоническая в круге функция h может быть представлена в виде

$$h(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^n H_1^n(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} a_2^n H_2^n(x,y), \tag{2}$$

где H_i^n — гармонические полиномы, а a_i^n — некоторые коэффициенты (смотри, например, [7]). В полярной системе координат ($x = r\cos\gamma,\ y = r\sin\gamma$) полиномы H_1^n и H_2^n определяются формулами

$$H_1^n(r,\gamma) = r^n\cos(n\gamma), \qquad H_2^n(r,\gamma) = r^n\sin(n\gamma).$$

Таким образом в полярной системе координат сумма (2) примет вид

$$h(r,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^n r^n\cos(n\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} a_2^n r^n\sin(n\gamma). \tag{3}$$

Для определения коэффициентов a_i^n зафиксируем, например, $r = 1/2$ и возьмем разложение 2π-периодической функции одной переменной $h(1/2,\gamma)$ в ряд Фурье

$$h(1/2,\gamma) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos(n\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(n\gamma), \tag{4}$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(1/2,\theta)\,d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(1/2,\theta)\cos(n\theta)\,d\theta, \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(1/2,\theta)\sin(n\theta)\,d\theta, \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Сравнивая ряды (3) при $r = 1/2$ и (4), получаем

$$a_1^0 = b_0/2, \qquad a_1^n = 2^n b_n, \qquad a_2^n = 2^n c_n.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial H_1^n}{\partial x} = nH_1^{n-1}, \quad \frac{\partial H_1^n}{\partial y} = -nH_2^{n-1}, \quad \frac{\partial H_2^n}{\partial x} = nH_2^{n-1}, \quad \frac{\partial H_2^n}{\partial y} = nH_1^{n-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\mathrm{d}H_1^n = -\mathrm{d}^\perp H_2^n, \qquad \mathrm{d}H_2^n = \mathrm{d}^\perp H_1^n. \tag{5}$$

Преобразование Радона и лучевые преобразования. Единичные векторы $\xi = (\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\eta = \xi^\perp = (-\sin\alpha,\cos\alpha)$ и вещественное число $s \in \mathbb{R}$ задают прямую $L_{\xi,s}$: $\mathrm{x} = s\xi + t\eta$.

Преобразование Радона

$$\mathcal{R} : H^k(\mathbb{B}) \to H^k(Z)$$

функции $f \in H^k(\mathbb{B})$ определяется формулой:

$$(\mathcal{R}f)(\alpha,s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\xi + t\eta)dt. \tag{6}$$

Продольное $\mathcal{P}$ и поперечное $\mathcal{P}^\perp$ лучевые преобразования

$$\mathcal{P},\mathcal{P}^\perp : H^k(S^1(\mathbb{B})) \to H^k(Z)$$

векторного поля $\omega \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ задаются формулами

$$[\mathcal{P}\omega](\alpha, s) = \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \eta^i \omega_i(s\xi + t\eta) dt, \tag{7}$$

$$[\mathcal{P}^\perp\omega](\alpha, s) = \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \xi^i \omega_i(s\xi + t\eta) dt. \tag{8}$$

Пусть $\phi \in H^1(\mathbb{B})$, а $\varphi \in H^1_0(\mathbb{B})$, тогда имеют место равенства

$$[\mathcal{P}\mathrm{d}\phi](\alpha, s) = -[\mathcal{P}^\perp \mathrm{d}^\perp \phi](\alpha, s) = \phi\left(s\xi + \sqrt{1-s^2}\eta\right) - \phi\left(s\xi - \sqrt{1-s^2}\eta\right), \tag{9}$$

$$[\mathcal{P}\mathrm{d}\varphi](\alpha, s) = [\mathcal{P}^\perp \mathrm{d}^\perp \varphi](\alpha, s) = 0, \tag{10}$$

$$[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp \phi](\alpha, s) = [\mathcal{P}^\perp \mathrm{d}\phi](\alpha, s), \tag{11}$$

$$[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp \varphi](\alpha, s) = [\mathcal{P}^\perp \mathrm{d}\varphi](\alpha, s) = (\mathcal{R}\varphi)'_s(\alpha, s). \tag{12}$$

Равенства (9)–(12) следуют непосредственно из определений лучевых преобразований и преобразования Радона. Доказательство приведено в [4].

3. Формулы обращения

Хорошо известна [3] формула обращения для преобразования Радона

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathcal{R}f)'_s(\alpha, s)}{s - x\cos\alpha - y\sin\alpha}\, ds\, d\alpha.$$

В силу свойства (12) для потенциала $\varphi \in H^1_0(\mathbb{B})$ имеем формулы обращения для восстановления потенциалов потенциального и соленоидального полей

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp \varphi](\alpha, s)}{s - x\cos\alpha - y\sin\alpha}\, ds\, d\alpha, \tag{13}$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{[\mathcal{P}^\perp \mathrm{d}\varphi](\alpha, s)}{s - x\cos\alpha - y\sin\alpha}\, ds\, d\alpha. \tag{14}$$

Теорема. *Пусть $u = \mathrm{d}h$, где потенциал h — гармоническая функция, определенная в $\mathbb{B}$. Тогда для восстановления потенциала h имеет место формула обращения:*

$$h(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{[\mathcal{P}^\perp \mathrm{d}h](\alpha, s)}{s - x\cos\alpha - y\sin\alpha}\, ds\, d\alpha. \tag{15}$$

Доказательство. В силу (2), для доказательства формулы (15) для произвольной гармонической функции достаточно доказать (15) для гармонических полиномов H_1^n и H_2^n.

Вычислим $[\mathcal{P}\mathrm{d}H_1^n](\alpha,s)$, $[\mathcal{P}\mathrm{d}H_2^n](\alpha,s)$. Точка на границе круга $\partial\mathbb{B}$ имеет координаты $(\cos\gamma,\sin\gamma)$ для некоторого γ. Точкам входа и выхода луча соответствуют углы γ_1 и γ_2, соответственно. Имеем

$$\cos\gamma_1 = s\cos\alpha + \sqrt{1-s^2}\sin\alpha, \qquad \sin\gamma_1 = s\sin\alpha - \sqrt{1-s^2}\cos\alpha,$$
$$\cos\gamma_2 = s\cos\alpha - \sqrt{1-s^2}\sin\alpha, \qquad \sin\gamma_2 = s\sin\alpha + \sqrt{1-s^2}\cos\alpha.$$

Так как $|s|<1$, существует угол β такой, что $\cos\beta = s$ и $\sin\beta = \sqrt{1-s^2}$. Тогда имеем $\gamma_1 = \alpha-\beta$, $\gamma_2 = \alpha+\beta$.

По свойству (9) лучевых преобразований имеем

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}\mathrm{d}H_1^n](\alpha,s) &= H_1^n(1,\gamma_2) - H_1^n(1,\gamma_1) = \cos(n\gamma_2) - \cos(n\gamma_1)\\ &= -2\sin\left(\frac{n\gamma_2+n\gamma_1}{2}\right)\sin\left(\frac{n\gamma_2-n\gamma_1}{2}\right) = -2\sin(n\alpha)\sin(n\beta),\\ [\mathcal{P}\mathrm{d}H_2^n](\alpha,s) &= H_2^n(1,\gamma_2) - H_2^n(1,\gamma_1) = \sin(n\gamma_2) - \sin(n\gamma_1)\\ &= 2\cos\left(\frac{n\gamma_2+n\gamma_1}{2}\right)\sin\left(\frac{n\gamma_2-n\gamma_1}{2}\right) = 2\cos(n\alpha)\sin(n\beta).\end{aligned}$$

Используя формулы (5) и (11), получаем

$$[\mathcal{P}^\perp\mathrm{d}H_1^n](\alpha,s) = [\mathcal{P}\mathrm{d}H_2^n](\alpha,s) = 2\cos(n\alpha)\sin(n\beta), \tag{16}$$
$$[\mathcal{P}^\perp\mathrm{d}H_2^n](\alpha,s) = -[\mathcal{P}\mathrm{d}H_1^n](\alpha,s) = 2\sin(n\alpha)\sin(n\beta). \tag{17}$$

Проверим, что дает формула (14) для функций H_1^n и H_2^n. Введем функции

$$G_1^n(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp H_1^n](\alpha,s)}{s - x\cos\alpha - y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha,$$
$$G_2^n(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp H_2^n](\alpha,s)}{s - x\cos\alpha - y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha.$$

Сделав замену переменной $\cos\beta = s$, перейдя от (x,y) в полярную систему координат (r,γ) и используя формулы (16) и (17), получим:

$$G_1^n(r,\gamma) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(n\alpha)\sin(n\beta)\sin\beta}{\cos\beta - r\cos(\alpha-\gamma)}\,d\beta\,d\alpha, \tag{18}$$
$$G_2^n(r,\gamma) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(n\alpha)\sin(n\beta)\sin\beta}{\cos\beta - r\cos(\alpha-\gamma)}\,d\beta\,d\alpha. \tag{19}$$

Вычислим интеграл по β. Так как мы рассматриваем функции в $\mathbb{B}$, то $r<1$. Для любых α, γ и любого $r<1$ существует φ такое, что $\cos\varphi = r\cos(\alpha-\gamma)$.

Имеем

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\sin\beta}{\cos\beta-\cos\varphi}\,d\beta = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\left(\sin\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta+\varphi}{2}+\sin\frac{\beta+\varphi}{2}\cos\frac{\beta-\varphi}{2}\right)}{-2\sin\frac{\beta+\varphi}{2}\sin\frac{\beta-\varphi}{2}}\,d\beta$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\cos\frac{\beta+\varphi}{2}}{\sin\frac{\beta+\varphi}{2}}\,d\beta + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\cos\frac{\beta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\beta-\varphi}{2}}\,d\beta\right).$$

Обозначим $I(\varphi) = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\cos\frac{\beta+\varphi}{2}}{\sin\frac{\beta+\varphi}{2}}\,d\beta,$ тогда $\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\cos\frac{\beta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\beta-\varphi}{2}}\,d\beta = I(-\varphi).$ Сделав замену $t=\frac{\beta+\varphi}{2}$, вычислим интеграл $I(\varphi)$:

$$I(\varphi) = 2\int\limits_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2} \frac{\sin(n(2t-\varphi))\cos t}{\sin t}\,dt$$

$$= 2\cos(n\varphi)\int\limits_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,dt - 2\sin(n\varphi)\int\limits_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2} \frac{\cos(2nt)\cos t}{\sin t}\,dt$$

$$= \cos(n\varphi)\int\limits_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2} \frac{\sin((2n+1)t)+\sin((2n-1)t)}{\sin t}\,dt$$

$$- \sin(n\varphi)\int\limits_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2} \frac{\cos((2n+1)t)+\cos((2n-1)t)}{\sin t}\,dt.$$

Воспользовавшись формулами 2.539 1. и 2.539 3. из [8], получим:

$$I(\varphi) = \cos(n\varphi)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2kt)}{k}+t+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(2kt)}{k}+t\right)\Bigg|_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2}$$

$$- \sin(n\varphi)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2kt)}{k}+\ln|\sin t|+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(2kt)}{k}+\ln|\sin t|\right)\Bigg|_{\varphi/2}^{(\pi+\varphi)/2}$$

$$= \cos(n\varphi)\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\,\sin(n\varphi)+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k-1}{k}\,\sin(k\varphi)+\pi\right)$$

$$- \sin(n\varphi)\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\,\cos(n\varphi)+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k-1}{k}\,\cos(k\varphi)+\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|^2\right).$$

В силу четности $\cos t$ и нечетности $\sin t$ получаем: $I(\varphi)+I(-\varphi) = 2\pi\cos(n\varphi)$. Из чего следует, что

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\sin\beta}{\cos\beta-\cos\varphi}\,d\beta = -\pi\cos(n\varphi).$$

Известно (смотри, например, формулу 1.331 3. из [8]), что

$$\cos(n\varphi) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-1-2k} \frac{n(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} \cos^{n-2k}\varphi, \tag{20}$$

где в верхнем пределе суммирования $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Вспоминая, что $\cos\varphi = r\cos(\alpha-\gamma)$, в силу (20), имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\sin\beta}{\cos\beta - r\cos(\alpha-\gamma)}\,d\beta \\
&\quad= -\pi \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-1-2k} \frac{n(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} r^{n-2k}\cos^{n-2k}(\alpha-\gamma) \\
&\quad= -\pi\biggl(r^n 2^{n-1}\cos^n(\alpha-\gamma) \\
&\quad+ \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-1-2k} \frac{n(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} r^{n-2k}\cos^{n-2k}(\alpha-\gamma) \\
&\quad\pm r^n \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-1-2k} \frac{n(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} \cos^{n-2k}(\alpha-\gamma)\biggr).
\end{aligned}$$

Еще раз применяя (20), получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sin(n\beta)\sin\beta}{\cos\beta - r\cos(\alpha-\gamma)}\,d\beta = -\pi\biggl(r^n \cos\bigl(n(\alpha-\gamma)\bigr) \\
&\quad+ \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-1-2k} \frac{n(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} (r^{n-2k} - r^n)\cos^{n-2k}(\alpha-\gamma)\biggr) \\
&\quad= -\pi\Bigl(r^n\cos\bigl(n(\alpha-\gamma)\bigr) + S_{n-2}\Bigr).
\end{aligned}$$

Индекс у S_{n-2} указывает на то, что в сумме участвуют степени $(n-2)$ и ниже для $\cos(\alpha-\gamma)$. Подставим это выражение в функции (18) и (19)

$$G_1^n(r,\gamma) = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\cos\bigl(n(\alpha-\gamma)\bigr)\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\alpha)S_{n-2}\,d\alpha, \tag{21}$$

$$G_2^n(r,\gamma) = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\alpha)\cos\bigl(n(\alpha-\gamma)\bigr)\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\alpha)S_{n-2}\,d\alpha. \tag{22}$$

Чтобы вычислить эти интегралы необходимо найти значения интегралов

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\cos\bigl(k(\alpha-\gamma)\bigr)\,d\alpha, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(n\alpha)\cos\bigl(k(\alpha-\gamma)\bigr)\,d\alpha, \qquad k \leqslant n.$$

Производя вычисления, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\cos\big(k(\alpha-\gamma)\big)\,d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} \cos(n\alpha)(\cos(k\alpha)\cos(k\gamma)+\sin(k\alpha)\sin(k\gamma))\,d\alpha$$

$$= \cos(k\gamma)\int\limits_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\cos(k\alpha)\,d\alpha + \sin(k\gamma)\int\limits_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\sin(k\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{\cos(k\gamma)}{2}\int\limits_0^{2\pi} \big(\cos((k-n)\alpha)+\cos((n+k)\alpha)\big)\,d\alpha$$

$$+ \frac{\sin(k\gamma)}{2}\int\limits_0^{2\pi} \big(\sin((k-n)\alpha)+\sin((n+k)\alpha)\big)\,d\alpha$$

$$= \begin{cases} \pi\cos(n\gamma), & \text{при } k=n,\\ 0, & \text{при } k<n. \end{cases}$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(n\alpha)\cos\big(k(\alpha-\gamma)\big)\,d\alpha = \begin{cases} \pi\sin(n\gamma), & \text{при } k=n,\\ 0, & \text{при } k<n. \end{cases}$$

Таким образом, получили, что

$$\frac{r^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\cos\big(n(\alpha-\gamma)\big)\,d\alpha = \frac{r^n\cos(n\gamma)}{2}, \tag{23}$$

$$\frac{r^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin(n\alpha)\cos\big(n(\alpha-\gamma)\big)\,d\alpha = \frac{r^n\sin(n\gamma)}{2}. \tag{24}$$

Известно (смотри, например, формулы 1.320 5. и 1.320 7. из [8]), что

$$\cos^k\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k-1}}\sum\limits_{j=0}^{(k-1)/2} C_k^j\cos((k-2j)\varphi), & \text{при } k \text{ нечетном},\\ \dfrac{1}{2^{k-1}}\sum\limits_{j=0}^{(k-2)/2} C_k^j\cos((k-2j)\varphi) + \dfrac{C_k^{k/2}}{2^k}, & \text{при } k \text{ четном}. \end{cases} \tag{25}$$

В сумме S_{n-2} присутствуют $\cos(\alpha-\gamma)$ со степенями не выше $(n-2)$, поэтому после применения формулы (25) в сумме S_{n-2} будут присутствовать только $\cos(l(\alpha-\gamma))$, где $l \leqslant (n-2)$. Следовательно, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(n\alpha)S_{n-2}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin(n\alpha)S_{n-2}\,d\alpha = 0. \tag{26}$$

Подставляя выражения (23), (24) и (26) в функции (21) и (22), имеем

$$G_1^n(r,\gamma) = \frac{r^n\cos(n\gamma)}{2} = \frac{H_1^n(r,\gamma)}{2}, \qquad G_2^n(r,\gamma) = \frac{r^n\sin(n\gamma)}{2} = \frac{H_2^n(r,\gamma)}{2}.$$

Откуда следует, что

$$H_i^n(x,y) = 2G_i^n(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp H_i^n](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha, \qquad i=1,2.$$

Таким образом, утверждение теоремы для гармонических полиномов доказано, а следовательно доказано и для любой гармонической функции.

Следствие 1. *Пусть $u=\mathrm{d}h$, где потенциал h — гармоническая функция, определенная в $\mathbb{B}$. Тогда для восстановления поля $u(x,y)$ имеет место формула обращения:*

$$u(x,y) = \mathrm{d}^\perp\left(-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}u](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha\right). \tag{27}$$

Доказательство. В силу (2), (5) и (11) имеем:

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}\mathrm{d}h](\alpha,s) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_1^n[\mathcal{P}\mathrm{d}H_1^n](\alpha,s) + \sum_{n=1}^{\infty}a_2^n[\mathcal{P}\mathrm{d}H_2^n](\alpha,s)\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}a_1^n[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp H_2^n](\alpha,s) + \sum_{n=1}^{\infty}a_2^n[\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp H_1^n](\alpha,s)\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}a_1^n[\mathcal{P}^\perp\mathrm{d}H_2^n](\alpha,s) + \sum_{n=1}^{\infty}a_2^n[\mathcal{P}^\perp\mathrm{d}H_1^n](\alpha,s).\end{aligned}$$

Используя формулу обращения (15) и формулу (5), получаем:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^\perp\left(-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}\mathrm{d}h](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha\right) &= \mathrm{d}^\perp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}a_1^nH_2^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_2^nH_1^n\right)\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}a_1^n\mathrm{d}^\perp H_2^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_2^n\mathrm{d}^\perp H_1^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_1^n\mathrm{d}H_1^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_2^n\mathrm{d}H_2^n = \mathrm{d}h.\end{aligned}$$

Следствие 2. *Пусть $u\in L_2(S^1(\mathbb{B}))$ — некоторое векторное поле. Тогда для восстановления поля $u(x,y)$ имеет место формула обращения:*

$$\begin{aligned}u(x,y) = \mathrm{d}&\left(-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}^\perp u](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha\right)\\ &+\mathrm{d}^\perp\left(-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}u](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha\right).\end{aligned}$$

Доказательство. В силу (1) существуют такие функции $\varphi\big|_{\partial\mathbb{B}} = \psi\big|_{\partial\mathbb{B}} = 0$, h — гармоническая, что

$$u = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}h + \mathrm{d}^\perp\psi.$$

Используя свойство (10) и формулы обращения (13), (14), (15) и (27), получаем:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}&\left(-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}^{\perp}u](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha\right)\\
&+\mathrm{d}^{\perp}\left(-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\mathcal{P}u](\alpha,s)}{s-x\cos\alpha-y\sin\alpha}\,ds\,d\alpha\right)\\
&=\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\mathrm{d}h+0+0+\frac{1}{2}\mathrm{d}h+\mathrm{d}^{\perp}\psi=u.
\end{aligned}$$

References

[1] V. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VSP, Utrecht, 1984. MR0759893

[2] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, VSP, Utrecht, 1994. MR1374572

[3] S.R. Deans, *The Radon Transform And Some Of Its Applications,* John Wiley & Sons, New York, 1983. MR0709591

[4] I.E. Svetov, E.Yu. Derevtsov, Yu.S. Volkov, T. Schuster, *A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium*, Mathematics and Computers in Simulation, **97** (2014), 207–223. MR3137917

[5] T. Schuster, *20 years of imaging in vector field tomography: a review*, In Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT), Y. Censor, M. Jiang, A. K. Louis (Eds.), Series: Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series, Birkhäuser, **7** (2008), 389–424.

[6] H. Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory,* Duke Mathematical Journal, **7** (1940), 411–444. MR0003331

[7] A.N. Tihonov, A.A. Samarsky, *Equations of Mathematical Physics*, 6th edition, Puplishing MSU, Moskow, 1999 (in Russian).

[8] I.S. Gradshtein, I.M. Ryzhik *Tables of integrals, series and products*, 4th edition, State publishing physical and mathematical literature, Moskow, 1963 (in Russian).

Ivan Evgenyevich Svetov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk state university,
st. Pirogova, 2
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: svetovie@math.nsc.ru