S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 447–456 (2015) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2015.12.038 MSC 35A05

КРАЕВАЯ И ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ–РЕАКЦИИ

Р.В. БРИЗИЦКИЙ, Ж.Ю. САРИЦКАЯ

Abstract. We study the boundary value and optimal control problems for stationary nonlinear convection-diffusion-reaction equation, wherein reaction coefficient depends on concentration of substance. The general form of nonlinear reaction coefficient's dependence on concentration of substance is offered. Solvability of the boundary value and control problems for convection-diffusion-reaction equation is proved. Nonlocal optimality system for the quadratic nonlinearity is obtained, and local uniqueness of extremal problem's solution for a particular cost functional is proved with the help of optimality system.

Keywords: convection-diffusion-reaction equation, control problem, optimality system, local uniqueness

1. Введение. Разрешимость краевой задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, рассматривается краевая задача

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{1}$$

Brizitskii R.V., Saritskaya Zh. Yu., Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 14-11-00079) и гранта РФФИ (проект 13-01-00313-а).

Поступила 1 июня 2015 г., опубликована 11 августа 2015 г.

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объемная плотность внешних источников вещества, λ – постоянный коэффициент диффузии, функция $k = k(\varphi)$ имеет смысл коэффициента реакции. Ниже на задачу (1) будем ссылаться как на задачу 1.

Отметим, что задача 1 при определенной зависимости $k(\varphi)$ описывает стационарную модель горения однокомпонентного вещества (см. [1]). Известно так же множество других процессов, в которых скорость химической реакции зависит от количества и / или концентрации вещества.

Интерес к задачам управления для моделей конвекции–диффузии–реакции объясняется поиском возможности повлиять на ход химической реакции и распространение ее продуктов при помощи исходных данных краевой задачи, часть из которых может играть роль так называемых управлений. Для задачи 1 в качестве управлений можно выбрать только скорость $\mathbf{u}$ и / или плотность источников вещества f. Однако уравнение 1 можно рассмотреть и при неоднородных смешанных краевых условиях, что расширит выбор так называемых управлений. Так же отметим, что к задачам управления можно свести и некоторые обратные задачи. В частности, задачу поиска источников загрязнения по измеренной в подобласти концентрации загрязняющего вещества. О подобных методах и подходах см. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

В настоящей работе предложен достаточно общий вид нелинейной зависимости коэффициента реакции от концентрации вещества. Предполагается, что функция $k(\varphi)$ локально непрерывна по Липшицу (см. ниже условие (iii)). При указанном условии доказывается глобальная разрешимость задачи 1 и локальная единственность ее решения. Для задачи 1 исследуются задачи управления, заключающиеся в минимизации определенных функционалов качества на ее слабых решениях. Доказывается их разрешимость. Отметим исследование подобных задач в монографии [9].

Основным результатом данной работы является доказательство локальной единственности решения экстремальной задачи при $k(\varphi) = \varphi^2$ для конкретного функционала качества. С этой целью для рассматриваемой задачи управления выводится система оптимальности. Отметим, что при $k = \varphi^2$ и $k = \varphi^2|\varphi|$ справедлива нелокальная единственность решения краевой задачи и имеют место нелокальные системы оптимальности. Интерес к таким функциям связан с задачами сложного теплообмена (см. [10, 11]).

При изучении задачи 1 и задач управления будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $\mathbf{H}^s(D) \equiv H^s(D)^3$ $s \in \mathbb{R}$ и $L^r(D)$, $1 \leq r \leq \infty$, где D – либо область Ω, либо граница Γ, либо ее некоторая часть Γ_0 с положительной мерой. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_1$, скалярные произведения в $L^2(\Gamma)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ – через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ либо $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$, норму в $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ – через $\|\cdot\|$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ – через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$.

Будем предполагать, что область Ω и ее граница Γ удовлетворяют условиям

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$.

Положим $\mathcal{D}(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых, финитных в Ω функций, $L^p_+(\Omega) = \{k \in L^p(\Omega) : k \geq 0\}$, $p \geq 3/2$. Положим $\mathbf{Z} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^4(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$.

Из неравенства Фридрихса–Пуанкаре и непрерывности оператора вложения $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ вытекает следующая лемма:

Лемма 1. *При выполнении условий (i) существуют такие положительные константы C_0, δ и γ, зависящие от Ω, что для любых функций $\varphi, S \in H^1(\Omega)$, $k \in L^p_+(\Omega)$, где $p \geq 3/2$, $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$ справедливы соотношения*

(2)
$$|(\nabla\varphi, \nabla S)| \leq \|\varphi\|_1\|S\|_1,\ |(k\varphi, S)| \leq C_0\|k\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_1\|S\|_1,\ \|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \leq C_4\|\varphi\|_1,$$

(3) $$|(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, S)| \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\varphi\|_1\|S\|_1,\ \ (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \varphi) = 0\ \forall\varphi \in H^1_0(\Omega),$$

и для любой функции $S \in H^1_0(\Omega)$ справедливо неравенство

(4) $$(\nabla S, \nabla S) \geq \delta\|S\|_1^2.$$

Из леммы 1 следует, что при выполнении условий (i) с константой $\lambda_* = \delta\lambda$ при $k \in L^{3/2}_+(\Omega)$ выполняется коэрцитивное неравенство

(5) $$\lambda(\nabla S, \nabla S) + (kS, S) \geq \lambda_*\|S\|_1^2\ \forall S \in H^1_0(\Omega).$$

Пусть в дополнение к (i) выполняются условия:

(ii) $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$.

(iii) $k \in L^p_+(\Omega)$, где $p \geq 3/2$, при этом $k = k(\varphi)$ – локально непрерывная по Липшицу функция φ, т.е., если $\|\varphi_i\|_1 \leq c$, $i = 1, 2$,то

$$\|k(\varphi_1) - k(\varphi_2)\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\ \ \forall\varphi_1, \varphi_2 \in H^1_0(\Omega).$$

Умножим уравнение в (1) на $S \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. Получим

(6) $$\lambda(\nabla\varphi, \nabla S) + (k(\varphi)\varphi, S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, S) = (f, S)\ \forall S \in H^1_0(\Omega).$$

В результате пришли к слабой формулировке задачи 1. Она заключается в нахождении функции $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ из (6).

Определение 1. Слабым решением задачи 1 назовем функцию $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, удовлетворяющую (6).

Несложно показать, что решение $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ задачи (6) удовлетворяет уравнению в (1) почти всюду в области Ω, т.е. определение 1 корректно.

Доказательство разрешимости задачи (6) проведем по схеме, описанной в [8] для нелинейных моделей гидродинамики, так же применив теорему Шаудера.

Для этого построим отображение $G : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$, действующее по формуле $G(w) = \varphi$ для всех $w \in H^1_0(\Omega)$. Здесь функция $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ является решением линейной задачи

(7) $$\lambda(\nabla\varphi, \nabla S) + (k(w)\varphi, S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, S) = (f, S)\ \forall S \in H^1_0(\Omega).$$

В силу (5) форма $(\nabla\varphi, \nabla S) + (k(w)\varphi, S)$ коэрцитивна на пространстве $H^1_0(\Omega)$, поскольку

$$(\nabla S, \nabla S) + (k(w)S, S) \geq \alpha\|S\|_1\ \ \forall S \in H^1_0(\Omega),$$

$(\mathbf{u}\cdot\nabla S, S) = 0\ \forall S \in H^1_0(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Тогда из теоремы Лакса–Мильграма следует, что для каждой функции $w \in H^1_0(\Omega)$ решение $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ задачи (7) существует, единственно и справедлива оценка

(8) $$\|\varphi\|_1 \leq M_\varphi \equiv (1/\lambda_*)\|f\|.$$

Отметим, что оценка (8) не зависит от функции w, входящей в (7). Из (8) вытекает оценка $\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq (1/\lambda_*)\|f\|$.

Полагая $r = (1/\lambda_*)\|f\|$, введем шар $B_r = \{w \in H^1_0(\Omega) : \|w\|_1 \leq r\}$. Из (8) вытекает, что введенный выше оператор G отображает шар B_r в себя.

Докажем, что G непрерывен и компактен на B_r. Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность из B_r. В силу рефлексивности пространства $H^1(\Omega)$ и компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ существует подпоследовательность последовательности $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, которую мы опять обозначим через $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, и функция $w \in B_r$ такие, что

$$w_k \to w \text{ слабо в } H^1(\Omega),\ w_k \to w \text{ сильно в } L^4(\Omega) \text{ при } k \to \infty.$$

Положим $\varphi_k = G(w_k)$, $\varphi = G(w)$ и докажем, что $\varphi_k \to \varphi$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $k \to \infty$. Подставим функции w_k, φ_k в (7) и вычтем полученное соотношение из (7) при w, φ. Получим

$$\lambda(\nabla(\varphi_k - \varphi), \nabla S) + (k(w)(\varphi_k - \varphi), S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla(\varphi_k - \varphi), S) =$$
$$= -(k(w_k) - k(w), \varphi_k S) \ \ \forall S \in H_0^1(\Omega).$$

Полагая здесь $S = \varphi_k - \varphi$ с учетом леммы 1 и условия (iii) заключаем, что

$$\lambda_*\|\varphi_k - \varphi\|_1 \le \gamma M_\varphi \|k(w_k) - k(w)\| \le \gamma M_\varphi L \|w_k - w\|_{L^4(\Omega)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Отсюда следует непрерывность и компактность оператора G на B_r. Тогда из теоремы Шаудера вытекает, что оператор G имеет неподвижную точку $\varphi = G(\varphi) \in H_0^1(\Omega)$. Указанная точка φ и является искомым решением задачи (6).

Установим достаточные условия единственности решения задачи (6). Через φ_1 обозначим решение задачи (6), существование которого было доказано выше. Пусть φ_2 – другое решение задачи (6). Очевидно, что разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda(\nabla\varphi, \nabla S) + (k(\varphi_1)\varphi, S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, S) = -(k(\varphi_1) - k(\varphi_2), \varphi_2 S) \ \ \forall S \in H_0^1(\Omega).$$

Полагая здесь $S = \varphi$, в силу леммы 1 приходим к неравенству

$$\lambda^*\|\varphi\|_1 \le C_0\|k(\varphi_1) - k(\varphi_2)\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi_2\|_1. \tag{9}$$

С учетом (iii) и неравенства (7) для правой части (9) справедлива оценка

$$C_0\|k(\varphi_1) - k(\varphi_2)\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi_2\|_1 \le (1/\lambda_*)C_0 L\|f\|\|\varphi\|_1. \tag{10}$$

Тогда из (9) и (10) вытекает, что если выполняется условие

$$C_0 L\|f\| \le \lambda_*^2, \tag{11}$$

то $\|\varphi\|_1 = 0$, а, следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *При выполнении условий (i)–(iii) существует слабое решение $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ задачи 1 и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_1 \le M_\varphi = (1/\lambda_*)\|f\|. \tag{12}$$

Если к тому же выполняется условие (11), то слабое решение задачи 1 единственно.

Приведем конкретный пример функции $k = k(\varphi)$. Как вытекает из [10, 11], представляет интерес степенная зависимость, например, $k = \varphi^2$ или функция $k(\varphi) = \varphi^2|\varphi|$ из [10, 11].

Поскольку $\varphi \in H^1(\Omega)$, то $\varphi^2 \in L_+^3(\Omega)$, $\varphi^2|\varphi| \in L_+^2(\Omega)$. Подставляя в (6) $S = \varphi$ в силу леммы 1 заключаем, что при таких коэффициентах реакции функция φ удовлетворяет оценке (12), Для функции $k = \varphi^2$ справедлива оценка

$$\|k(\varphi_1) - k(\varphi_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)^2(\varphi_1 + \varphi_2)^2 d\Omega \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}^2\|\varphi_1 + \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}^2 \le$$

$$\leq 4M_\varphi^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_{L^4(\Omega)}.$$

В таком случае

$$\|k(\varphi_1) - k(\varphi_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|k(\varphi_1) - k(\varphi_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)},$$

т.е. функция $k = \varphi^2$ удовлетворяет условиям в (iii).

Для $k = \varphi^2|\varphi|$ справедливо равенство

$$k(\varphi_1) - k(\varphi_2) = \varphi_1^2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) + (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2)|\varphi_2| \text{ п.в. в } \Omega$$

и оценка

$$\left(\int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)^{3/2}\varphi_1^3 \, d\Omega\right)^{2/3} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^3(\Omega)} \|\varphi_1\|^2_{L^6(\Omega)}.$$

В таком случае, $k = \varphi^2|\varphi|$ так же удовлетворяет (iii).

При $k = \varphi^2$ имеет место нелокальная единственность решения задачи 1. Действительно, пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ – два решения задачи 1. Тогда их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda(\nabla\varphi, \nabla S) + (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2, \varphi S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, S) = 0 \ \forall S \in H_0^1(\Omega).$$

Ясно, что $\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 \geq 0$ п.в. в Ω. Полагая здесь $S = \varphi$, в силу леммы 1 заключаем, что $\varphi = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω. Случай $k = \varphi^2|\varphi|$ исследован в [10, 11].

Из вышесказанного вытекает

Теорема 2. *При выполнении условий (i), (ii) для функций $k = \varphi^2$ и $k = \varphi^2|\varphi|$ существует единственное решение $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ задачи 1 и справедлива оценка (12).*

2. Постановка и разрешимость задачи управления

Сформулируем задачу управления для задачи 1. Для этого разобьем множество ее исходных данных на две группы: группу фиксированных данных, куда внесем функцию $\mathbf{u}$, и группу управлений, куда внесем функцию f, предполагая, что она может изменяться в некотором множестве K.

Введем оператор $F : H_0^1(\Omega) \times K \to H^{-1}(\Omega)$ по формуле

$$\langle F(\varphi, f), S\rangle = \lambda(\nabla\varphi, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, S) + (k\varphi, S) - (f, S).$$

Тогда (6) можно записать в виде

$$F(\varphi, f) = 0. \tag{13}$$

Предположим, что выполняются условия

(j) $K \subset L^2(\Omega)$ – непустое выпуклое замкнутое множество и $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$.

Рассматривая (13) как условное ограничение на состояние $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и управление $f \in K$, сформулируем следующую задачу управления:

$$J(\varphi, k) \equiv \frac{\mu_0}{2}\|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|f\|^2 \to \inf, \ F(\varphi, f) = 0, \ (\varphi, f) \in H_0^1(\Omega) \times K. \tag{14}$$

Здесь $\varphi_d \in L^2(Q)$ – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция. Через $Z_{ad} = \{(\varphi, f) \in H_0^1(\Omega) \times K : F(\varphi, f) = 0, J(\varphi, f) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (14).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i)–(iii) и (j). Тогда существует по крайней мере одно решение задачи управления (14).*

Доказательство. Пусть (φ_m, f_m) – минимизирующая последовательность для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, f_m) = \inf_{(\varphi_m,f_m)\in Z_{ad}} J(\varphi_m, f_m) \equiv J^*.$$

Отсюда и из условий теоремы для функционала J из (14) вытекает оценка $\|f_m\| \le c_1$. Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что $\|\varphi_m\|_1 \le c_2$, где константа c_2 не зависит от m.

Тогда существуют слабые пределы $\varphi^* \in H_0^1(\Omega)$, и $f^* \in L^2(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\varphi_m\}$ и $\{f_m\}$. Соответствующие подпоследовательности будем обозначать также через $\{\varphi_m\}$ и $\{f_m\}$. С учетом этого можно считать, что

$$\varphi_m \to \varphi^* \in H^1(\Omega) \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^4(\Omega), \tag{15}$$

$$f_m \to f^* \in L^2(\Omega) \text{ слабо в } L^2(\Omega). \tag{16}$$

Покажем, что $F(\varphi^*, f^*) = 0$, т.е. что

$$\lambda(\nabla\varphi^*, \nabla S) + (k(\varphi^*)\varphi^*, S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi^*, S) = (f, S) \ \ \forall S \in H_0^1(\Omega). \tag{17}$$

Учтем, что φ_m и f_m удовлетворяют соотношениям

$$\lambda(\nabla\varphi_m, \nabla S) + (k(\varphi_m)\varphi_m, S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_m, S) = (f, S) \ \ \forall S \in H_0^1(\Omega). \tag{18}$$

Перейдем в (18) к пределу при $m \to \infty$. Все линейные слагаемые в (18) переходят в соответствующие слагаемые в (17). Для нелинейного слагаемого $(k(\varphi_m)\varphi_m, S)$ справедливо неравенство

$$|(k(\varphi_m)\varphi_m, S) - (k(\varphi^*)\varphi^*, S)| \le |(k(\varphi_m)(\varphi_m - \varphi^*), S)| + |(k(\varphi_m) - k(\varphi^*), \varphi^* S)|.$$

В силу леммы 1 и условия (iii) для функции $k = k(\varphi)$ получаем, что

$$|(k(\varphi_m) - k(\varphi^*), \varphi^* S)| \le L\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi^*\|_{L^4(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Чтобы применить к слагаемому $|(k(\varphi_m)(\varphi_m - \varphi^*), S)|$ свойство (15) воспользуемся плотностью вложения $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_1$. Пусть $\{S_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ такая последовательность функций, что $\|S_n - S\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Справедливо неравенство

$$|(k(\varphi_m)(\varphi_m-\varphi^*), S_n)| \le \|k(\varphi_m)\|_{L^{3/2}(\Omega)}\|S_n\|_{L^{12}(\Omega)}\|\varphi_m-\varphi^*\|_{L^4(\Omega)} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Поскольку

$$||(k(\varphi_m)(\varphi_m - \varphi^*), S_n)| - |(k(\varphi_m)(\varphi_m - \varphi^*), S)|| \le |(k(\varphi_m)(\varphi_m - \varphi^*), S_n - S)| \le$$

$$\le \|k(\varphi_m)\|_{L^{3/2}(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^6(\Omega)}\|S_n - S\|_{L^6(\Omega)} \to 0 \text{ при } n \to \infty,\ m = 1, 2, ...$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty}(k(\varphi_m)\varphi_m, S) = (k^*(\varphi^*)\varphi^*, S).$$

Так как функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, то с учетом (15), (16) получаем

$$J^* = \lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, f_m) = \underline{\lim}_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) \ge J(\varphi^*, f^*) \ge J^*.$$

□

Будем считать далее, что $k(\varphi) = \varphi^2$ и обоснуем для задачи (14) принцип неопределенных множителей Лагранжа.

Введем множитель Лагранжа $(\lambda_0, \theta) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ и лагранжиан $L : H_0^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, f, \lambda_0, \theta) = \lambda_0 J(\varphi, f) + \langle \theta, F(\varphi, f) \rangle \equiv \lambda_0 J(\varphi, f) + \langle F(\varphi, f), \theta \rangle. \tag{19}$$

Простой анализ показывает, что производная Фреше по φ от оператора F в (13) при $k = \varphi^2$ в точке $(\hat{\varphi}, \hat{f}) \in H_0^1(\Omega) \times K$ есть линейный непрерывный оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{f}) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, ставящий в соответствие каждому элементу $\tau \in H_0^1(\Omega)$ элемент $\hat{l} \in H^{-1}(\Omega)$, где

$$\langle \hat{l}, S \rangle = \lambda(\nabla \tau, \nabla S) + 3(\hat{\varphi}^2 \tau, S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, S).$$

Из леммы 1 вытекает, что оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{f})$ является изоморфизмом. Тогда в силу [13] справедлива

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий (i), (ii) и (j) $(\hat{\varphi}, \hat{f}) \in H_0^1(\Omega) \times K$ – элемент, на котором достигается локальный минимум в задаче (14) при $k = \varphi^2$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $(1, \theta)$, где $\theta \in H_0^1(\Omega)$, такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа*

$$\langle J'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{f}), \tau \rangle + \langle F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{f})\tau, \theta \rangle = 0 \ \ \forall \tau \in H_0^1(\Omega), \tag{20}$$

эквивалентное тождеству

$$\lambda(\nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\hat{\varphi}^2 \tau, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) = -\mu_0(\hat{\varphi} - \varphi_d, \tau)_Q \ \ \forall \tau \in H_0^1(\Omega), \tag{21}$$

и справедлив принцип минимума

$$\langle \mathcal{L}'_f(\hat{\varphi}, \hat{f}, 1, \theta), f - \hat{f} \rangle \geq 0 \ \ \forall\, f \in K,$$

эквивалентный неравенству

$$\mu_1(\hat{f}, f - \hat{f}) - (f - \hat{f}, \theta) \geq 0 \ \forall f \in K. \tag{22}$$

Соотношение (21) вместе с вариационным неравенством (22) и операторным ограничением (13), эквивалентным соотношению (6), представляет собой систему оптимальности для задачи (14) при $k = \varphi^2$.

3. Единственность решения задачи управления

В этом разделе мы выведем достаточные условия единственности решения задачи (14) при $k = \varphi^2$. Пусть $(\varphi_i, f_i) \in H_0^1(\Omega) \times K$ – решения задачи (14), $(1, \theta_i)$, $i = 1, 2$, отвечающие указанным решениям нетривиальные множители Лагранжа.

Полагая $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, вычтем уравнение (6), записанное для (φ_2, f_2), из уравнения (6) для (φ_1, f_1). Получим

$$\lambda(\nabla \varphi, \nabla S) + (\varphi_1^3 - \varphi_2^3, S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, S) = (f, S) \ \ \forall S \in H_0^1(\Omega). \tag{23}$$

Ясно, что $\varphi_1^3 - \varphi_2^3 = (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$, причем $\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 \geq 0$ п.в. в Ω. Полагая в (23) $S = \varphi$, выводим с учетом (5) следующую оценку для φ:

$$\|\varphi\|_1 \leq (1/\lambda_*)\|f\|. \tag{24}$$

Записав (21) для $\theta = \theta_i$, $\hat{\varphi} = \varphi_i$, $i = 1, 2$, положим в нем $\tau = \theta_i \in H_0^1(\Omega)$. Будем иметь

$$\lambda(\nabla \theta_i, \nabla \theta_i) + 3(\hat{\varphi}_i^2 \theta_i, \theta_i) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_i) = -\mu_0(\varphi_i - \varphi_d, \theta_i)_Q, \ i = 1, 2. \tag{25}$$

Из (25) выводим следующую оценку для θ_i:

$$\|\theta_i\|_1 \leq (\mu_0/\lambda_*)\|\varphi_i - \varphi_d\|_Q \leq \mu_0(1/\lambda_*)(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q), \ \ i = 1, 2. \tag{26}$$

Запишем уравнение (21) для (φ_2, θ_2):

$$\lambda(\nabla\tau, \nabla\theta_2) + 3(\varphi_2^2\tau, \theta_2) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta_2) = -\mu_0(\hat{\varphi}_2 - \varphi_d, \tau)_Q \ \ \forall\tau \in H_0^1(\Omega),$$

и вычтем его из уравнения (21) для (φ_1, θ_1):

$$\lambda(\nabla\tau, \nabla\theta_1) + 3(\varphi_1^2\tau, \theta_1) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta_1) = -\mu_0(\varphi_1 - \varphi_d, \tau)_Q \ \ \forall\tau \in H_0^1(\Omega).$$

Учитывая, что

$$(\varphi_1^2\tau, \theta_1) - (\varphi_2^2\tau, \theta_2) = (\varphi_1^2\tau, \theta_1) - (\varphi_2^2\tau, \theta_1) + (\varphi_2^2\tau, \theta_1) - (\varphi_2^2\tau, \theta_2) =$$
$$= (\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \tau\theta_1) + (\varphi_2^2\tau, \theta),$$

приходим к соотношению

$$\lambda(\nabla\theta, \nabla\tau) + 3(\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \tau\theta_1) + 3(\varphi_2^2\tau, \theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) = -\mu_0(\varphi, \tau)_Q. \tag{27}$$

Положим в (27) $\tau = \theta$:

$$\lambda(\nabla\theta, \nabla\theta) + 3(\varphi_2^2\theta, \theta) = -\mu_0(\varphi, \theta)_Q - 3(\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \theta\theta_1).$$

Отсюда, используя (26) и (24), приходим к оценке

$$\|\theta\|_1 \leq \mu_0(1/\lambda_*)\|\varphi\|_Q + 6\mu_0(1/\lambda_*^2)M_\varphi(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)\|\varphi\|_1 \leq$$
$$\leq \mu_0(1/\lambda_*)\|\varphi\|_Q + 6\mu_0(1/\lambda_*^2)M_\varphi(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)\|\varphi\|_1 \leq$$
$$\leq \mu_0(1/\lambda_*^3)[\lambda_* + 6M_\varphi(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)]\|f\|. \tag{28}$$

Полагая в (27) $\tau = \varphi$, получаем

$$\lambda(\nabla\theta, \nabla\varphi) + 3(\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi\theta_1) + 3(\varphi_2^2\varphi, \theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \theta) = -\mu_0(\varphi, \varphi)_Q. \tag{29}$$

Полагая в (23) $S = \theta$, получим

$$\lambda(\nabla\varphi, \nabla\theta) + (\varphi_1^3 - \varphi_2^3, \theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \theta) = (f, \theta). \tag{30}$$

Вычитая (30) из (29), будем иметь

$$3(\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi\theta_1) + 3(\varphi_2^2\varphi, \theta) - (\varphi_1^3 - \varphi_2^3, \theta) + \mu_0(\varphi, \varphi)_Q = -(f, \theta)$$

или

$$3((\varphi_1 + \varphi_2)\theta_1, \varphi^2) + 3(\varphi_2^2, \varphi\theta) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2, \varphi\theta) + \mu_0\|\varphi\|_Q^2 = -(f, \theta),$$

$$3((\varphi_1 + \varphi_2)\theta_1, \varphi^2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2, \varphi\theta) + \mu_0\|\varphi\|_Q^2 = -(f, \theta). \tag{31}$$

Положим $f = f_1$ в неравенстве (22), записанном для f_2, и $f = f_2$ в (22), записанном для f_1. Получим

$$\mu_1(f_2, f) - (f, \theta_2) \geq 0, \ \ -\mu_1(f_1, f) + (f, \theta_1) \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$(f, \theta) \geq \mu_1\|f\|^2. \tag{32}$$

Тогда из (31) с учетом (32) получаем неравенство

$$3((\varphi_1 + \varphi_2)\theta_1, \varphi^2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2, \varphi\theta) + \mu_0\|\varphi\|_Q^2 + \mu_1\|f\|^2 \leq 0. \tag{33}$$

Используя (24) и (26), оценим первые два слагаемых в левой части (33):

$$3|((\varphi_1 + \varphi_2)\theta_1, \varphi^2)| \leq 3(\|\varphi_1\|_{L^6(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)})\|\theta_1\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq$$

$$\leq 6M_\varphi(\mu_0/\lambda_*)(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)\|\varphi\|_1^2 \leq 6\mu_0(1/\lambda_*^3)M_\varphi(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)\|f\|^2. \tag{34}$$

Используя (24) и (28), оценим далее $(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2, \varphi\theta)$:

$$|(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2, \varphi\theta)| \leq 4M_\varphi^2\|\varphi\|_1\|\theta\|_1 \leq$$

$$\leq \mu_0(1/\lambda_*^4)M_\varphi^2[\lambda_* + 6M_\varphi(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)]\|f\|^2. \tag{35}$$

Пусть выполняются условия:

$$(1/\lambda_*^3)M_\varphi[6(1/\lambda_*)(M_\varphi + \|\varphi_d\|_Q)(\lambda_* + M_\varphi^2) + M_\varphi] \leq \ \mu_1/\mu_0. \tag{36}$$

Здесь λ_* и M_φ введены в (5) и (12) соответственно, μ_i, $i = 0, 1$ – положительные параметры из (14).

При выполнении условий (36) из (33) и (24) вытекает, что $f = 0$ и $\varphi = 0$.

Сформулируем полученный результат

Теорема 5. *Пусть в дополнение к (i)–(iii), (j) выполняются условия (36). Тогда задача управления (14) имеет единственное решение* $(\varphi, f) \in H_0^1(\Omega) \times K$.

References

[1] V. Becker, M. Braack, B. Vexler, *Numerical parameter estimation for chemical models in multidimensional reactive flows*, Combust. Theory Modelling, **8** (2004), 661–682. MR2106598

[2] G.V. Alekseev, E.A. Adomavichus, *Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluid*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **9**:5 (2001), 435–468. MR1873752

[3] G.V. Alekseev, *Inverse extremal problems for stationary equations in mass transfer theory*, Comp. Math. Math. Phys., **42**:3 (2002), 363–376. MR1934049

[4] G.V. Alekseev, O.V. Soboleva, D.A. Tereshko, *Identification problems for a steady-state model of mass transfer*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **49**:4 (2008), 537–547. MR2441812

[5] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Two parameter extremum problems of boundary control for stationary thermal convection equations*, Comp. Math. Math. Phys., **51**:9 (2011), 1539–1557. MR2907143

[6] G.V. Alekseev, I.S. Vakhitov, O.V. Soboleva, *Stability estimates in identification problems for the convection-diffusion-reaction equation*, Comp. Math. Math. Phys., **52**:12 (2012), 1635–1649. MR3248190

[7] G.V. Alekseev, R.V. Brizitskii, *Stability estimates for solutions of control problems for the Maxwell equations with mixed boundary conditions*, Differential Equations, **49**:8 (2013), 963–974. MR3216406

[8] G.V. Alekseev, *Optimization in stationary problems of heat and mass transfer and magnetohydrodynamics*, Nauchnyi Mir, Moscow, 2010.

[9] A.V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems. Theory and aplications*, American Mathematical Society, 2000. MR1726442

[10] A.E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem*, J. Math. Anal. Appl., **409** (2014), 808–815. MR3103198

[11] A.E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, *Steady-state problem of complex heat transfer*, Comp. Math. Math. Phys., **54**:4 (2014), 719–726. MR3200040

[12] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains. Monograph and studies in mathematics*, Pitman, London, 1985.

[13] A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov, *Theory of extremal problems*, Elsevier, Amsterdam, 1978.

[14] J. Cea, *Lectures on Optimization. Theory and Algorithms*, Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978. MR0545791

Roman Victorovich Brizitskii
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far Earstern Federal University,
str. Sukhanova, 8,
690000, Vladivostok, Russia
E-mail address: mlnwizard@mail.ru.

Zhanna Yurievna Saritskaya
Far Earstern Federal University,
str. Sukhanova, 8,
690000, Vladivostok, Russia
E-mail address: zhsar@icloud.com