S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 457–464 (2015) УДК 519.644
DOI 10.17377/semi.2015.12.039 MSC 65D32

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ДИЭДРА С ИНВЕРСИЕЙ $\mathbf{D_{4h}}$

А.С. ПОПОВ

Abstract. An algorithm of searching for the best (in a sense) cubature formulas on a sphere that are invariant under the dihedral group of rotations with inversion D4h is described. This algorithm is applied to find parameters of all the best cubature formulas of this symmetry group up to the 29th order of accuracy.

Keywords: numerical integration, invariant cubature formulas, invariant polynomials, dihedral group of rotations.

1. Введение

Основы теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно конечных групп вращений, были заложены С.Л. Соболевым [1, 2]. К настоящему времени наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [3–18] и имеющуюся там литературу). Кубатурные формулы, инвариантные относительно различных диэдральных групп симметрии, рассматривались в работах [19–22]. В частности, в [21] был предложен алгоритм построения наилучших (в некотором смысле) кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h}.

В данной работе будет описан аналогичный алгоритм построения наилучших кубатур, инвариантных относительно группы D_{4h}. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии до 29-го порядка точности n. При этом для

Popov A.S., Cubature formulas on a sphere invariant under the dihedral group of rotations with inversion D4h.

Поступила 13 мая 2015 г., опубликована 9 сентября 2015 г.

$n \le 9$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n – приближенные, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Даются с 16 значащими цифрами параметры новых кубатур для $n = 11$, 13.

2. Алгоритм поиска наилучших кубатур группы D_{4h}

Пусть S – единичная сфера, т. е. множество точек $(x, y, z) \in R_3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Рассмотрим на S интеграл

$$U(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s)\, ds, \tag{1}$$

где $s \in S$, ds – элемент поверхности сферы, $U(1) = 1$.

Для численного нахождения интеграла (1) построим кубатурную формулу, инвариантную относительно преобразований группы D_{4h}, в виде

$$\begin{aligned} V(f) =& A_0 \sum_{j=1}^{2} f(a_{0j}) + B_0 \sum_{j=1}^{4} f(b_{0j}) + C_0 \sum_{j=1}^{4} f(c_{0j}) + \sum_{i=1}^{J} A_i \sum_{j=1}^{8} f(a_{ij}) + \\ & \sum_{i=1}^{K} B_i \sum_{j=1}^{8} f(b_{ij}) + \sum_{i=1}^{L} C_i \sum_{j=1}^{8} f(c_{ij}) + \sum_{i=1}^{M} D_i \sum_{j=1}^{16} f(d_{ij}), \end{aligned} \tag{2}$$

где 2 точки a_{0j} лежат в полюсах вписанного в сферу диэдра (бипирамиды) и имеют координаты $(0, 0, \pm 1)$; 4 точки b_{0j} лежат в вершинах основания диэдра при координатах $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$; 4 точки c_{0j} отвечают серединам рёбер основания диэдра при координатах $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$; 8 точек a_{ij} отвечают рёбрам основания диэдра при координатах $(\pm a_i, \pm b_i, 0)$, $(\pm b_i, \pm a_i, 0)$; 8 точек b_{ij} отвечают рёбрам боковых граней диэдра при координатах $(\pm c_i, 0, \pm d_i)$, $(0, \pm c_i, \pm d_i)$; 8 точек c_{ij} отвечают медианам боковых граней диэдра при координатах $(\pm g_i, \pm g_i, \pm h_i)$; 16 точек d_{ij} отвечают точкам общего положения на боковых гранях диэдра при координатах $(\pm p_i, \pm q_i, \pm r_i)$, $(\pm q_i, \pm p_i, \pm r_i)$.

Заметим, что мы ассоциируем наш диэдр со вписанной в сферу прямой бипирамидой, полюса которой лежат на оси z, а общие основания, представляющие собой квадраты, лежат в плоскости экватора $z = 0$ (см., например, [23]). Наш диэдр переходит в себя при вращениях на угол, кратный $\pi/2$, вокруг оси четвёртого порядка z. Эти вращения образуют циклическую группу симметрии C_4. Кроме того, диэдр переходит в себя при вращении на угол π вокруг любой из четырёх осей второго порядка, лежащих в плоскости $z = 0$ и соединяющих начало координат с вершинами либо серединами рёбер диэдра [23]. Совокупность всех указанных преобразований образует группу симметрии, называемую группой D_4 [24, гл. 12]. Дополняя группу D_4 операцией симметрии относительно плоскости $z = 0$, получим нашу группу D_{4h}.

Общее число узлов в кубатурной формуле (2) обозначим через N.

Пусть $\{Z_{kj}(x, y, z);\ k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, 2k + 1\}$ – ортонормированная система многочленов степени не выше n, для которых $U(Z_{kj} Z_{lm}) = \delta_{kl} \delta_{jm}$. Здесь индекс k нумерует степени базисных многочленов, а индекс j – многочлены при данном k; δ_{kl} – символ Кронекера.

Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности n (или просто порядок n), если она точна для всех многочленов степени не выше n и не точна хотя бы для одного многочлена степени $n + 1$.

Погрешностью кубатурной формулы (2) на многочленах степени k назовём величину [15]

$$E_k = \left(\sum_{j=1}^{2k+1} (U(Z_{kj}) - V(Z_{kj}))^2 \right)^{1/2}.$$

Для кубатурной формулы порядка n все величины $E_k = 0$ при $k \leq n$, а $E_{n+1} > 0$. Величину E_{n+1} назовём главным членом погрешности кубатурной формулы.

В данной работе будет сделана попытка построить все наилучшие кубатурные формулы вида (2) на сфере для $n \leq 29$. При этом наилучшей среди всех кубатурных формул этого вида, имеющих данный порядок n, мы будем считать ту, которая последовательно удовлетворяет четырем условиям [15]: 1) узлы принадлежат области интегрирования, 2) веса положительны, 3) число узлов минимально, 4) главный член погрешности минимален.

Применительно к нашему случаю теорема 1 из [2] будет звучать так.

Теорема 1. *Для того чтобы кубатура (2) имела порядок n, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для всех инвариантных относительно группы D_{4h} многочленов степени не выше n.*

Известно (см., например, [22]), что любой инвариантный относительно группы D_{4h} многочлен можно представить на единичной сфере в виде многочлена от базисных инвариантных форм $u = x^2+y^2$ и $v = u^2 \cos 4\varphi = 8x^4 - 8ux^2 + u^2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, представляющих собой многочлены второй и четвёртой степени соответственно. Здесь $x = \sqrt{u} \cos\varphi$, $y = \sqrt{u} \sin\varphi$, φ – соответствующая угловая координата сферической системы координат.

Заметим, что в узлах a_{0j} $u = v = 0$; в узлах b_{0j} $u = v = 1$; в узлах c_{0j} $u = 1$, $v = -1$; в узлах a_{ij} $u = 1$, $v = \cos 4\varphi$; в узлах b_{ij} $v = u^2$; в узлах c_{ij} $v = -u^2$.

Выпишем все многочлены, образующие базис в пространстве инвариантных относительно группы D_{4h} многочленов до 12-й степени включительно:

$$1, u, u^2, v, u^3, uv, u^4, u^2v, v^2, u^5, u^3v, uv^2, u^6, u^4v, u^2v^2, v^3.$$

Параметрами кубатуры (2) являются веса A_0, B_0, C_0, A_i, B_i, C_i, D_i и координаты узлов a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}. С учетом уравнений связи

$$a_i^2 + b_i^2 = 1, \quad c_i^2 + d_i^2 = 1, \quad 2g_i^2 + h_i^2 = 1, \quad p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 = 1$$

легко видеть, что узлы a_{0j}, b_{0j} и c_{0j} имеют по одному свободному параметру (это их вес A_0, B_0 и C_0), узлы a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} – по два свободных параметра, а узлы d_{ij} – по три свободных параметра. В итоге на один свободный параметр приходится: 2 узла a_{0j}, 4 узла b_{0j}, c_{0j}, a_{ij}, b_{ij} или c_{ij}, $16/3$ узлов d_{ij}.

Обозначим общее число базисных многочленов степени не выше n через m. Поскольку общее число свободных параметров в кубатуре порядка n должно быть равно m, то для получения формулы с минимальным для данного n числом узлов N выгоднее всего использовать в первую очередь узлы a_{0j}, затем – b_{0j}, c_{0j}, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и лишь в последнюю очередь – узлы d_{ij}.

Однако здесь имеется одно существенное ограничение. Дело в том, что среди базисных многочленов степени $n \geq 10$ содержатся многочлены вида $u^k v^l w$, где $k, l = 0, 1, \ldots$; $w = z^2 u^4 \sin^2 4\varphi = (1-u)(u^4 - v^2)$. Эти многочлены обращаются в нуль в узлах a_{0j}, b_{0j}, c_{0j}, a_{ij}, b_{ij} и c_{ij}. В то же время интеграл $U(u^k v^l w) > 0$

при чётном l. Поэтому правильное интегрирование этих многочленов возможно лишь с привлечением узлов d_{ij}. Для кубатуры порядка n число базисных функций, требующих привлечения узлов d_{ij}, есть величина m_0, которая равна полному числу базисных функций m для кубатуры степени $n-10$ (в самом деле, умножая произвольную базисную функцию любой степени n вида $u^k v^l$ на w, мы получим базисную функцию степени $n+10$, требующую привлечения узлов d_{ij}). Таким образом, величина M в (2) должна быть такой, чтобы выполнялось условие $3M \geq m_0$.

Далее задаем величины J, K, L в (2) так, чтобы общее число свободных параметров кубатуры было равно m. При этом, если нужно, можно положить $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ или $C_0 = 0$.

Затем подставляем m базисных функций на место f в формулу (2) и решаем систему m нелинейных алгебраических уравнений с m неизвестными свободными параметрами кубатуры. В отличие, например, от случая группы вращений октаэдра [15], здесь мы не можем заранее быть уверены, что возникающая система нелинейных уравнений будет разрешима. Тем более мы не можем заранее гарантировать, что все веса кубатуры будут положительны. Поэтому, как правило, нужно выполнить несколько попыток с разным набором параметров кубатуры, чтобы получить для данного n формулу с минимальным N и с положительными весами. Аналогично [15], в случае наличия нескольких таких формул с одинаковым N наилучшей среди них считается та, которая имеет наименьшую величину главного члена погрешности E_{n+1}.

Так как группа D_{4h} является подгруппой группы вращений октаэдра с инверсией O_h [24], то для некоторых n наилучшие кубатуры группы D_{4h} могут совпадать с наилучшими кубатурами группы O_h [16].

3. Построение конкретных кубатур группы D_{4h}

С целью полноты изложения, приведём параметры всех наилучших кубатур группы D_{4h} для $n \leq 13$.

Кубатура $n = 1$, $N = 2$, $J = K = L = M = 0$, $A_0 = 1/2$, $B_0 = C_0 = 0$.

Эта формула тривиальна и имеет симметрию группы $D_{\infty h}$ (в этой группе ось z служит осью симметрии бесконечного порядка [24]).

Кубатура $n = 3$, $N = 6$, $J = K = L = M = 0$, $A_0 = B_0 = 1/6$, $C_0 = 0$.

Эта формула также тривиальна и имеет симметрию группы вращений октаэдра с инверсией O_h [25].

Кубатура $n = 5$, $N = 14$, $J = K = 0$, $L = 1$, $M = 0$, $A_0 = B_0 = 1/15$, $C_0 = 0$, $C_1 = 3/40$, $g_1 = h_1 = 1/\sqrt{3}$.

Эта формула хорошо известна и имеет симметрию группы O_h [26].

Кубатура $n = 7$, $N = 22$, $J = 0$, $K = L = 1$, $M = 0$, $A_0 = 1/27$, $B_0 = 1/20$, $C_0 = 0$, $B_1 = C_1 = 49/1080$, $c_1 = g_1 = \sqrt{3/7}$, $d_1 = \sqrt{4/7}$, $h_1 = \sqrt{1/7}$ (см. [19]).

Кубатура $n = 9$, $N = 34$, $J = 1$, $K = 2$, $L = 1$, $M = 0$, $B_0 = C_0 = 0$.

Поочерёдно подставляя в (2) девять базисных функций, получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
V(1) &= 2A_0 + 8A_1 + 8B_1 + 8B_2 + 8C_1 = 1,\\
V(u) &= 8A_1 + 8B_1u_1 + 8B_2u_2 + 8C_1u_3 = 2/3,\\
V(u^2) &= 8A_1 + 8B_1u_1^2 + 8B_2u_2^2 + 8C_1u_3^2 = 8/15,\\
V(v) &= 8A_1v_1 + 8B_1u_1^2 + 8B_2u_2^2 - 8C_1u_3^2 = 0,\\
V(u^3) &= 8A_1 + 8B_1u_1^3 + 8B_2u_2^3 + 8C_1u_3^3 = 16/35,\\
V(uv) &= 8A_1v_1 + 8B_1u_1^3 + 8B_2u_2^3 - 8C_1u_3^3 = 0,\\
V(u^4) &= 8A_1 + 8B_1u_1^4 + 8B_2u_2^4 + 8C_1u_3^4 = 128/315,\\
V(u^2v) &= 8A_1v_1 + 8B_1u_1^4 + 8B_2u_2^4 - 8C_1u_3^4 = 0,\\
V(v^2) &= 8A_1v_1^2 + 8B_1u_1^4 + 8B_2u_2^4 + 8C_1u_3^4 = 64/315.
\end{aligned}
$$

Здесь через u_1, u_2 и u_3 обозначено значение величины u в узлах b_{1j}, b_{2j} и c_{1j} соответственно, а через v_1 – значение величины v в узлах a_{1j}. Решая эту систему аналитически, находим:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 2/105, && \\
&A_1 = 1/35, && v_1 = -1/3,\\
&B_1 = (175 - \sqrt{7})/5880, && u_1 = (5 - \sqrt{7})/9,\\
&B_2 = (175 + \sqrt{7})/5880, && u_2 = (5 + \sqrt{7})/9,\\
&C_1 = 9/280, && u_3 = 2/3.
\end{aligned}
$$

Найденным величинам u_1, u_2, u_3 и v_1 отвечают следующие координаты узлов в формуле (2):

$$
\begin{aligned}
&a_1^2 = (3 + \sqrt{3})/6, && b_1^2 = (3 - \sqrt{3})/6,\\
&c_1^2 = (5 - \sqrt{7})/9, && d_1^2 = (4 + \sqrt{7})/9,\\
&c_2^2 = (5 + \sqrt{7})/9, && d_2^2 = (4 - \sqrt{7})/9,\\
&g_1^2 = h_1^2 = 1/3. &&
\end{aligned}
$$

Расчёт параметров новых кубатур для $n \geq 11$ проводился численным методом ньютоновского типа, аналогичным работе [18]. Приведём значения параметров новых наилучших кубатур для $n = 11$, 13.

Кубатура $n = 11$, $N = 50$, $J = 1$, $K = 2$, $L = M = 1$, $B_0 = C_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.1891560354557433E-1, & A_1 &= 0.2122270716845270E-1,\\
B_1 &= 0.1912719992497078E-1, & B_2 &= 0.2118519051483847E-1,\\
C_1 &= 0.2069305721649482E-1, & D_1 &= 0.1902147214442483E-1,\\
a_1 &= 0.8654800946679108E+0, & b_1 &= 0.5009433158887581E+0,\\
c_1 &= 0.6780433634375406E+0, & d_1 &= 0.7350219025976758E+0,\\
c_2 &= 0.9660465050183073E+0, & d_2 &= 0.2583682452274536E+0,\\
g_1 &= 0.3366571687800192E+0, & h_1 &= 0.8793883677977798E+0,\\
p_1 &= 0.7554012997900250E+0, & q_1 &= 0.4334338195920349E+0,\\
r_1 &= 0.4914305650948057E+0.
\end{aligned}
$$

Кубатура $n = 13$, $N = 66$, $J = 1$, $K = 3$, $L = 2$, $M = 1$, $B_0 = C_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.7785429334482982E-2, & A_1 &= 0.1560061558731200E-1,\\
B_1 &= 0.1450516644527691E-1, & B_2 &= 0.1583273631082165E-1,\\
B_3 &= 0.1612821999517190E-1, & C_1 &= 0.1295359595693012E-1,\\
C_2 &= 0.1661903942312518E-1, & D_1 &= 0.1570713447387074E-1,\\
a_1 &= 0.9345778615334026E+0, & b_1 &= 0.3557586551746172E+0,\\
c_1 &= 0.3534983567336429E+0, & d_1 &= 0.9354351456870830E+0,\\
c_2 &= 0.7145473480755629E+0, & d_2 &= 0.6995870834700855E+0,\\
c_3 &= 0.9613772463567301E+0, & d_3 &= 0.2752340643662248E+0,\\
g_1 &= 0.6927682223395424E+0, & h_1 &= 0.2003606254557532E+0,\\
g_2 &= 0.4364488064722028E+0, & h_2 &= 0.7867813410713165E+0,\\
p_1 &= 0.7823371398783717E+0, & q_1 &= 0.3964585335160517E+0,\\
r_1 &= 0.4803844614152614E+0.
\end{aligned}
$$

Приведём теперь сводную таблицу, содержащую основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатур группы D_{4h} до 29-го порядка точности.

n	N	E_{n+1}	n	N	E_{n+1}	n	N	E_{n+1}	n	N	E_{n+1}
1	2	2.2361	9	34	2.0546	17	110	1.7956	25	226	1.6457
3	6	2.2913	11	50	1.8060	19	134	1.6922	27	262	1.6163
5	14	1.8696	13	66	1.9098	21	162	1.7139	29	302	1.3037
7	22	2.1197	15	86	1.7104	23	194	1.1811			

Заметим, что для $n = 3, 5, 15, 17$ наилучшие кубатуры группы D_{4h} имеют симметрию группы O_h, т. е. совпадают с наилучшими кубатурами группы O_h [16]. Кроме того, для $n = 11, 23, 29$ наилучшие кубатуры группы D_{4h} содержат одинаковое число узлов с соответствующими кубатурами группы O_h, но превосходят их по величине E_{n+1}. Для всех остальных n наилучшие кубатуры группы D_{4h} содержат меньшее число узлов по сравнению с наилучшими кубатурами группы O_h. Однако для больших n всё же предпочтительнее пользоваться кубатурами группы O_h, поскольку асимптотически при одинаковой точности они требуют в три раза меньше информации для хранения в памяти ЭВМ.

4. Заключение

Был представлен алгоритм поиска наилучших кубатурных формул группы D_{4h} для сферы. Проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данного вида симметрии до 29-го порядка точности n. При этом для $n \leq 9$ найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n — приближенные, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Использованный в работе численный метод не гарантирует, что были найдены все возможные решения системы нелинейных уравнений, из которой определяются параметры кубатуры. Поэтому не исключена возможность, что для некоторых n полученные в работе результаты могут быть улучшены.

References

[1] С.Л. Соболев, *О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразовании конечных групп вращений*, Докл. АН СССР, **146**:2 (1962), 310–313. MR0141225

[2] С.Л. Соболев, *О формулах механических кубатур на поверхности сферы*, Сиб. мат. журн., **3**:5 (1962), 769–796. MR0141227

[3] A.D. McLaren, *Optimal numerical integration on a sphere*, Math. Comput., **17**:83 (1963), 361–383. MR0159418

[4] В.И. Лебедев, *Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса-Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **15**:1 (1975), 48–54. MR0371024

[5] В.И. Лебедев, *О квадратурах на сфере*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **16**:2 (1976), 293–306. MR0438670

[6] В.И. Лебедев, *Квадратурные формулы для сферы 25–29-го порядка точности*, Сиб. мат. журн., **18**:1 (1977), 132–142. MR0448821

[7] В.И. Лебедев, Д.Н. Лайков, *Квадратурная формула для сферы 131-го алгебраического порядка точности*, Докл. РАН, **366**:6 (1999), 741–745. MR1711567

[8] С.И. Коняев, *Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией*, Мат. заметки, **25**:4 (1979), 629–634. MR0534305

[9] С.И. Коняев, *Формулы численного интегрирования на сфере*, Теоремы вложения и их приложения / Труды семинара акад. С.Л. Соболева, Новосибирск, **1** (1982), 75–82. MR0738998

[10] S.I. Konyaev, *On invariant quadrature formulae for a sphere*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **10**:1 (1995), 41–47. MR1327472

[11] И.П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, Москва, 1981. MR0656522

[12] А.С. Попов, *Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **35**:3 (1995), 459–466. MR1328179

[13] А.С. Попов, *Кубатурные формулы высоких порядков точности для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **36**:4 (1996), 5–9. MR1395117

[14] А.С. Попов, *Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений октаэдра*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **38**:1 (1998), 34–41. MR1604203

[15] А.С. Попов, *Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра*, Сиб. журн. вычисл. матем., **5**:4 (2002), 367–372.

[16] А.С. Попов, *Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра с инверсией*, Сиб. журн. вычисл. матем., **8**:2 (2005), 143–148. Zbl 1112.65310

[17] А.С. Попов, *Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра*, Сиб. журн. вычисл. матем., **11**:4 (2008), 433–440. Zbl 1212.41080

[18] А.С. Попов, *Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы тетраэдра с инверсией*, Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), 372–379.

[19] А.С. Попов, *Кубатурные формулы четвертого и седьмого порядков точности для сферы, инвариантные относительно группы вращений квадрата вокруг полярной оси*, Вычислительные методы и технология решения задач математической физики / Сборник научных трудов, ВЦ СО РАН, Новосибирск, 1993, 47–53. MR1351545

[20] A.S. Popov, *Cubature formulae for a sphere invariant under cyclic rotation groups*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **9**:6 (1994), 535–546. MR1317965

[21] А.С. Попов, *Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h}*, Сиб. журн. вычисл. матем., **16**:1 (2013), 57–62. Zbl 1299.65037

[22] А.Н. Казаков, В.И. Лебедев, *Квадратурные формулы типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы диэдра*, Труды МИРАН, Наука, Москва, **203** (1994), 100–112. MR1382595

[23] Ф. Клейн, *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*, Едиториал УРСС, Москва, 2004.

[24] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва, 1989. MR1018103

[25] В.А. Диткин, *О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов*, Докл. АН СССР, **62**:4 (1948), 445–447. MR0027603

[26] J. Albrecht, L. Collatz, *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale*, Z. angew. Math. Mech., **38**:1/2 (1958), 1–15. MR0093912

Анатолий Степанович Попов
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: popov@labchem.sscc.ru