S@MR

ISSN 1813-3304

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 480–499 (2015) DOI 10.17377/semi.2015.12.041 УДК 514.8, 517.983, 519.6 MSC 44A30

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ 2-ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЕЧЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

И.Е. СВЕТОВ, А.П. ПОЛЯКОВА

ABSTRACT. We propose a numerical solution of reconstruction problem of 2-tensor field in a unit disk from its known values of the ray transforms. The algorithm is based on the method of truncated singular value decomposition. Numerical simulations demonstrate an efficiency of the proposed approach. In addition, we compare proposed algorithm with an algorithm based on the least squares method where we use a finite basis consisting of B-splines as basis functions.

Keywords: 2-tensor tomography, solenoidal field, potential field, approximation, ray transforms, truncated singular value decomposition, orthogonal polynomials, least squares method, *B*-splines.

## 1. Введение

Под термином «задача 2-тензорной томографии» в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть в некоторой ограниченной области двумерного пространства распределено симметричное 2-тензорное поле. Требуется восстановить это поле по его известным продольному и (или) поперечному и (или) смешанному лучевым преобразованиям.

Svetov, I.E., Polyakova, A.P., Approximate solution of two-dimensional 2-tensor tomography problem using truncated singular value decomposition.

<sup>© 2015</sup> Светов И.Е., Полякова А.П.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31491мол\_а), ОМН РАН (проект 2015–1.3.1).

Поступила 30 марта 2015 г., опубликована 9 сентября 2015 г.

В данной работе предлагается алгоритм численного решения задачи 2-тензорной томографии, основанный на методе усеченного сингулярного разложения операторов лучевых преобразований, действующих на симметричные 2тензорные поля, которые были построены в работе [1]. Суть метода заключается в том, что оператор представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. Решение задачи в  $\mathbb{R}^n$  в скалярном случае хорошо известно, в работе [2] построено сингулярное разложение оператора преобразования Радона. Кроме того, в  $\mathbb{R}^2$  построено сингулярное разложение операторов лучевых преобразований, действующих на векторные поля [3]. Алгоритм приближенного восстановления двумерных векторных полей, основанный на методе усеченного сингулярного разложения, разработан и численно реализован в работах [3], [4].

Проведено тестирование предлагаемого алгоритма с целью определения пределов его применимости. Исследовано влияние на точность восстановления симметричного 2-тензорного поля таких факторов, как дискретизация исходных данных, гладкость восстанавливаемого поля, характер и уровень вносимого в исходные данные шума. Также результаты восстановления предложенным алгоритмом сравниваются с результатами восстановления с использованием алгоритма, основанного на методе наименьших квадратов с аппроксимирующей последовательностью, построенной на основе *B*-сплайнов. Этот подход хорошо себя зарекомендовал при решении задач скалярной [5], векторной [6], [7] и тензорной томографии [8].

#### 2. Определения и постановка задачи

2.1. Основные используемые пространства. Введем обозначения  $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$  для единичного круга, единичной окружности  $\partial \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  и цилиндра  $Z = \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 2\pi), s \in (-1, 1)\}.$ 

Функции (скалярные поля) обозначаем через  $f(x), g(x), \ldots$  За потенциалами, которые задают тензорные поля, закрепляем обозначения  $\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots$ Считаем их определенными в  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$ . Множество симметричных *m*-тензорных полей  $w(x) = (w_{i_1...i_m}(x)), u(x) = (u_{i_1...i_m}(x)), v(x) = (v_{i_1...i_m}(x)), i_1, \ldots, i_m =$ 1,2, определенных в  $\mathbb{B}$ , обозначается  $S^m(\mathbb{B})$ . Скалярное произведение в  $S^m(\mathbb{B})$ вводится формулой

$$\langle u(x), v(x) \rangle = u_{i_1 \dots i_m}(x) v^{i_1 \dots i_m}(x),$$

где по повторяющимся сверху и снизу одноименным индексам в одном мономе подразумевается суммирование от 1 до 2. Напомним, что в евклидовом пространстве с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат различия между контравариантными и ковариантными компонентами нет.

Функциональное пространство  $L_2(S^m(\mathbb{B}))$  состоит из интегрируемых в квадрате симметричных *m*-тензорных полей, определенных в  $\mathbb{B}$ . Скалярное произведение двух тензорных полей *u* и *v* из пространства  $L_2(S^m(\mathbb{B}))$  задается формулой:

$$(u,v)_{L_2(S^m(\mathbb{B}))} = \int_{\mathbb{B}} \langle u(x), v(x) \rangle dx.$$

Пространства Соболева для симметричных *m*-тензорных полей обозначим чеpes  $H^k(S^m(\mathbb{B})), H_0^k(S^m(\mathbb{B})).$ 

Кроме того, мы будем использовать весовые пространства  $L_2(Z,\rho)$  и  $H^k(Z,\rho)$ , где  $\rho(s) > 0$  задана на Z. Скалярное произведение функций f и g из  $L_2(Z, \rho)$ задается формулой:

$$(f,g)_{L_2(Z,\rho)} = \int_Z f(y)g(y)\rho(y)dy$$

Через  $H^1(Z)$  будем обозначать пространство Соболева  $H^1(Z, 1)$ , скалярное произведение в котором может быть определено следующей формулой

(1) 
$$(f,g)_{H^1(Z)} = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} (1+k^2+l^2)c_{k,l}(f)\overline{c_{k,l}(g)},$$

где  $c_{k,l}(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_Z f(\alpha, s) e^{-i(k\alpha + ls)} d\alpha \, ds$  — коэффициенты разложения f в ряд

Фурье.

2.2. Дифференциальные операторы. Операторы внутреннего дифферениирования d и внутреннего  $\perp$ -дифференцирования d $^{\perp}$  являются композициями операторов ковариантного дифференцирования и симметризации

$$\mathbf{d}, \mathbf{d}^{\perp} : H^k(S^m(\mathbb{B})) \to H^{k-1}(S^{m+1}(\mathbb{B})),$$

которые действуют на функцию f и на векторное поле v по правилам

$$(\mathrm{d}f)_{i} = \frac{\partial f}{\partial x_{i}}, \qquad (\mathrm{d}v)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial v_{j}}{\partial x_{i}} \right), (\mathrm{d}^{\perp}f)_{i} = (-1)^{i} \frac{\partial f}{\partial x_{3-i}}, \qquad (\mathrm{d}^{\perp}v)_{ij} = \frac{1}{2} \left( (-1)^{j} \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{3-j}} + (-1)^{i} \frac{\partial v_{j}}{\partial x_{3-i}} \right).$$

Наряду с этими операторами нам понадобится оператор дивергенции

$$\delta: H^k(S^m(\mathbb{B})) \to H^{k-1}(S^{m-1}(\mathbb{B})),$$

который действует на векторное поле v и на симметричное 2-тензорное поле wпо формулам

(2) 
$$\delta v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \qquad (\delta w)_i = \frac{\partial w_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{i2}}{\partial x_2}.$$

Напомним, что *m*-тензорное поле  $u \in H^k(S^m(\mathbb{B}))$  называется *nomenциaль*ным, если существует (m-1)-тензорное поле  $v \in H^{k+1}(S^{m-1}(\mathbb{B}))$  (потенциал), такое что  $u = \mathrm{d}v$ . Поле  $w \in H^k(S^m(\mathbb{B}))$  называется соленоидальным, если  $\delta w = 0 \in H^{k-1}(S^{m-1}(\mathbb{B})).$  Любое двумерное соленоидальное симметричное тензорное поле можно представить через одну функцию [9]. В частности, для всякого соленоидального двумерного векторного поля  $v \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$  существует потенциал  $\psi \in H^{k+1}(\mathbb{B})$  такой что  $d^{\perp}\psi = v$ ; всякое соленоидальное двумерное симметричное 2-тензорное поле  $u \in H^k(S^2(\mathbb{B}))$  можно представить в виде  $u = (d^{\perp})^2 \psi$  для некоторого  $\psi \in H^{k+2}(\mathbb{B})$  (проверяется подстановкой в (2)).

Известно [10], что имеет место однозначное разложение любого симметричного 2-тензорного поля  $u \in L_2(S^2(\mathbb{B}))$ :

(3) 
$$u = d^2 \varphi + dd^{\perp} \phi + (d^{\perp})^2 \psi, \qquad \varphi, \, \phi, \, \psi \in H^2(\mathbb{B}),$$

(4) 
$$\varphi|_{\partial \mathbb{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\Big|_{\partial \mathbb{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\Big|_{\partial \mathbb{B}} = 0, \qquad \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\Big|_{\partial \mathbb{B}} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\Big|_{\partial \mathbb{B}} = 0$$

В данной работе будем рассматривать только те поля, для которых потенциалы  $\varphi$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , участвующие в разложении (3), (4), обращаются в нуль на границе  $\partial \mathbb{B}$  вместе со своими первыми производными. То есть  $\varphi$ ,  $\phi$ ,  $\psi \in H_0^2(\mathbb{B})$ .

2.3. Преобразование Радона и лучевые преобразования. Единичные векторы  $\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha), \ \eta = \xi^{\perp} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$  и вещественное число  $s \in \mathbb{R}$  задают прямую  $L_{\xi,s}$ :  $x = s\xi + t\eta$ .

Преобразование Радона

$$\mathcal{R}: H^k(\mathbb{B}) \to H^k(Z,\rho)$$

функции  $f \in H^k(\mathbb{B})$  определяется формулой:

$$(\mathcal{R}f)(s,\alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\xi + t\eta)dt.$$

Продольное  $\mathcal{P}$ , поперечное  $\mathcal{P}^{\perp}$  и смешанное  $\mathcal{P}^{\star}$  лучевые преобразования

$$\mathcal{P}, \ \mathcal{P}^{\perp}, \ \mathcal{P}^{\star}: H^k(S^2(\mathbb{B})) \to H^k(Z, \rho)$$

симметричного 2-тензорного поля  $w \in H^k(S^2(\mathbb{B}))$  задаются формулами

(5) 
$$(\mathcal{P}w)(s,\alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} w_{ij}(s\xi + t\eta)\eta^i \eta^j dt,$$

(6) 
$$(\mathcal{P}^{\perp}w)(s,\alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s}} w_{ij}(s\xi + t\eta)\xi^i\xi^j dt,$$

(7) 
$$(\mathcal{P}^{\star}w)(s,\alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} w_{ij}(s\xi + t\eta)\eta^i \xi^j dt.$$

В отличие от преобразования Радона, лучевые преобразования симметричных 2-тензорных полей обладают ненулевыми ядрами (доказательство смотри в [10]). В ядре оператора  $\mathcal{P}$  лежат все потенциальные поля  $u = d^2 \varphi + dd^{\perp} \phi$ , где  $\varphi, \phi \in H_0^2(\mathbb{B})$ . Поэтому по известным значениям продольного лучевого преобразования можно восстановить лишь соленоидальные поля  $(d^{\perp})^2 \psi$ . Ядро оператора  $\mathcal{P}^{\perp}$  состоит из всех полей вида  $u = dd^{\perp} \phi + (d^{\perp})^2 \psi$ , где  $\phi, \psi \in H_0^2(\mathbb{B})$ . Поэтому по известным поперечного лучевого преобразования можно восстановить лишь потенциальные поля вида  $d^2 \varphi$ . В то время как в ядре оператора  $\mathcal{P}^{\star}$  лежат все поля вида  $u = d^2 \varphi + (d^{\perp})^2 \psi$ , где  $\varphi, \psi \in H_0^2(\mathbb{B})$ . Поэтому по известным значениям поперечного лучевого преобразования можно восстановить лишь потенциальные поля вида  $d^2 \varphi$ . В то время как в ядре оператора  $\mathcal{P}^{\star}$  лежат все поля вида  $u = d^2 \varphi + (d^{\perp})^2 \psi$ , где  $\varphi, \psi \in H_0^2(\mathbb{B})$ . Поэтому по известным значениям смешанного лучевого преобразования можно восстановить лишь потенциальные поля вида  $d^2 \varphi$ .

Для потенциала  $\varphi \in H^2_0(\mathbb{B})$  имеют место следующие равенства:

(8) 
$$\mathcal{P}((\mathrm{d}^{\perp})^{2}\varphi) = \mathcal{P}^{\perp}(\mathrm{d}^{2}\varphi) = 2\mathcal{P}^{\star}(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\varphi) = \frac{\partial^{2}}{\partial s^{2}}(\mathcal{R}\varphi)$$

Для преобразования Радона известна оценка устойчивости

 $\|f\|_{L_2(\mathbb{B})} \leqslant C_{\mathcal{R}} \|\mathcal{R}f\|_{H^1(Z)}.$ 

Пусть  $u = (d^{\perp})^2 \psi + dd^{\perp} \phi + d^2 \varphi$  с потенциалами  $\varphi, \phi, \psi \in H^2_0(\mathbb{B})$ . Тогда имеют место оценки устойчивости:

(9) 
$$\|(\mathbf{d}^{\perp})^{2}\psi\|_{L_{2}(S^{2}(\mathbb{B}))} \leqslant C_{\mathcal{P}}\|\mathcal{P}u\|_{H^{1}(Z)},$$

(10) 
$$\|\mathrm{d}^{2}\varphi\|_{L_{2}(S^{2}(\mathbb{B}))} \leq C_{\mathcal{P}^{\perp}} \|\mathcal{P}^{\perp}u\|_{H^{1}(Z)},$$

 $\|\mathrm{dd}^{\perp}\phi\|_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} \leqslant C_{\mathcal{P}^{\star}} \|\mathcal{P}^{\star}u\|_{H^1(Z)}.$ (11)

Равенство (8) и оценки (9)-(11) доказаны в [10].

2.4. Постановка задачи 2-тензорной томографии. Пусть некоторое симметричное 2-тензорное поле w задано в единичном круге. По известным значениям продольного и (или) поперечного и (или) смешанного лучевых преобразований требуется восстановить симметричное 2-тензорное поле w или его часть.

В данной работе для численного решения поставленной задачи будет использоваться алгоритм, основанный на методе усеченного сингулярного разложения операторов продольного, поперечного и смешанного лучевых преобразований симметричных 2-тензорных полей. Ортонормированные соленоидальные и потенциальные базисы строятся на основе полиномов Якоби и гармонических многочленов. Также проведено сравнение предлагаемого алгоритма с алгоритмом восстановления, основанном на методе наименьших квадратов (МНК). В качестве аппроксимирующей последовательности используются соленоидальные и потенциальные 2-тензорные поля, построенные на основе двумерных В-сплайнов.

### 3. Сингулярное разложение операторов лучевых преобразований

Приведем основные теоретические предпосылки для построения алгоритма решения поставленной задачи. Все результаты данного раздела доказаны в [1].

Базисные 2-тензорные поля в исходном пространстве  $L_2(S^2(\mathbb{B}))$  будем строить методом потенциалов, т.е. выбираем некоторую систему функций в пространстве потенциалов  $H^2_0(\mathbb{B})$  и далее, применяя дифференциальные операторы d и  $d^{\perp}$ , образуем из нее 2-тензорный базис в исходном пространстве  $L_2(S^2(\mathbb{B}))$ . За основу исходной базисной системы потенциалов выбираются полиномы следующего вида:

(12) 
$$F_{kn}^{\cos}(x_1, x_2) = \lambda_{kn} \left( 1 - |x|^2 \right)^2 H_k^{\cos}(x_1, x_2) P_n^{(k+3,k+1)}(|x|^2), \quad k, n \ge 0, \\ F_{kn}^{\sin}(x_1, x_2) = \lambda_{kn} \left( 1 - |x|^2 \right)^2 H_k^{\sin}(x_1, x_2) P_n^{(k+3,k+1)}(|x|^2), \quad k \ge 1, \quad n \ge 0,$$

или то же самое в полярной системе координат,

0

$$F_{kn}^{\cos}(r,\varphi) = \lambda_{kn} \left(1 - r^2\right)^2 r^k \cos k\varphi P_n^{(k+3,k+1)}(r^2), \quad k,n \ge 0, F_{kn}^{\sin}(r,\varphi) = \lambda_{kn} \left(1 - r^2\right)^2 r^k \sin k\varphi P_n^{(k+3,k+1)}(r^2), \quad k \ge 1, \quad n \ge 0.$$

Здесь  $H_k^{\cos}$ ,  $H_k^{\sin}$  — гармонические полиномы степени k, а  $P_n^{(p,q)}$  — полиномы Якоби степени n с индексами p, q, определенные на отрезке [0,1]. Появление множителя  $(1-r^2)^2$  не случайно и связано с краевыми условиями, предъявляемыми к потенциалам. Отметим также, что  $F_{0n}^{\sin}(x_1, x_2) \equiv 0$ , поэтому эти полиномы в базисной системе потенциалов не участвуют.

Применяя к потенциалам (12) операторы  $d^2$  и  $dd^{\perp}$ , получим семейства потенциальных симметричных 2-тензорных полей двух типов,

(13) 
$$\mathbf{V}_{kn}^{\cos}(x_1, x_2) = \mathrm{d}^2 F_{kn}^{\cos}(x_1, x_2), \qquad \mathbf{V}_{kn}^{\sin}(x_1, x_2) = \mathrm{d}^2 F_{kn}^{\sin}(x_1, x_2),$$

(14) 
$$\mathbf{U}_{kn}^{\cos}(x_1, x_2) = \mathrm{dd}^{\perp} F_{kn}^{\cos}(x_1, x_2), \qquad \mathbf{U}_{kn}^{\sin}(x_1, x_2) = \mathrm{dd}^{\perp} F_{kn}^{\sin}(x_1, x_2),$$

а применение оператора  $(\mathrm{d}^{\perp})^2$ дает семейство соленоидальных симметричных 2-тензорных полей,

(15) 
$$\mathbf{W}_{kn}^{\cos}(x_1, x_2) = (\mathbf{d}^{\perp})^2 F_{kn}^{\cos}(x_1, x_2), \quad \mathbf{W}_{kn}^{\sin}(x_1, x_2) = (\mathbf{d}^{\perp})^2 F_{kn}^{\sin}(x_1, x_2).$$

Константу  $\lambda_{kn}$ выбираем так, чтобы построенные поля имели единичную норму. Для полей (13) и (15)

$$\lambda_{kn} = \begin{cases} \frac{C_{n+k}^k}{(n+1)(n+2)} \sqrt{\frac{k+2n+3}{8\pi}}, & k \ge 1, \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sqrt{\frac{2n+3}{16\pi}}, & k = 0, \end{cases}$$

а для полей (14) имеем

$$\lambda_{kn} = \begin{cases} \frac{C_{n+k}^k}{(n+1)(n+2)} \sqrt{\frac{k+2n+3}{2\pi}}, & k \ge 1, \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi}}, & k = 0. \end{cases}$$

**Утверждение 1.** Системы потенциальных (13), (14) и соленоидальных (15) симметричных 2-тензорных полей являются ортогональными в пространстве  $L_2(S^2(\mathbb{B}))$ .

Введем систему функций

$$\Psi_{kn}^{\cos(s,\alpha)}(s,\alpha) := (\mathcal{P}\mathbf{W}_{kn}^{\cos})(s,\alpha) = (\mathcal{P}^{\perp}\mathbf{V}_{kn}^{\cos})(s,\alpha) = 2(\mathcal{P}^{\star}\mathbf{U}_{kn}^{\cos})(s,\alpha),$$
$$\Psi_{kn}^{\sin(s,\alpha)}(s,\alpha) := (\mathcal{P}\mathbf{W}_{kn}^{\sin})(s,\alpha) = (\mathcal{P}^{\perp}\mathbf{V}_{kn}^{\sin})(s,\alpha) = 2(\mathcal{P}^{\star}\mathbf{U}_{kn}^{\sin})(s,\alpha).$$

Утверждение 2. Система функций

$$\begin{split} \Psi_{kn}^{\cos}(s,\alpha) &= a_{kn}\sqrt{1-s^2}C_{k+2n+2}^{(1)}(s)\cos k\alpha, \quad k,n \ge 0, \\ \Psi_{kn}^{\sin}(s,\alpha) &= a_{kn}\sqrt{1-s^2}C_{k+2n+2}^{(1)}(s)\sin k\alpha, \quad k \ge 1, \ n \ge 0, \end{split}$$

где  $a_{kn} = (-1)^n \sqrt{\frac{8}{\pi(k+2n+3)}}$ , а  $C_m^{(\mu)}$  — полиномы Гегенбауэра степени т с индексом  $\mu$ , образуют ортогональную систему в пространстве образов лучевых преобразований  $L_2(Z, (1-s^2)^{-1/2})$ , с нормой

$$\|\Psi_{kn}^{\cos}\|_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} = \|\Psi_{kn}^{\sin}\|_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} = \sqrt{\frac{4\pi}{k+2n+3}}.$$

Таким образом система функций

$$\begin{split} G_{kn}^{\cos}(s,\alpha) &:= \sqrt{\frac{k+2n+3}{4\pi}} \Psi_{kn}^{\cos}(s,\alpha) \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1-s^2} C_{k+2n+2}^{(1)}(s) \cos k\alpha, \qquad k,n \ge 0, \\ G_{kn}^{\sin}(s,\alpha) &:= \sqrt{\frac{k+2n+3}{4\pi}} \Psi_{kn}^{\sin}(s,\alpha) \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1-s^2} C_{k+2n+2}^{(1)}(s) \sin k\alpha, \qquad k \ge 1, \ n \ge 0, \end{split}$$

является ортонормированной в пространстве  $L_2(Z, (1-s^2)^{-1/2})$  и имеют место следующие равенства:

$$(\mathcal{P}\mathbf{W}_{kn}^{\cos})(s,\alpha) = (\mathcal{P}^{\perp}\mathbf{V}_{kn}^{\cos})(s,\alpha) = 2(\mathcal{P}^{\star}\mathbf{U}_{kn}^{\cos})(s,\alpha) = \sigma_{kn}G_{kn}^{\cos}(s,\alpha),$$
$$(\mathcal{P}\mathbf{W}_{kn}^{\sin})(s,\alpha) = (\mathcal{P}^{\perp}\mathbf{V}_{kn}^{\sin})(s,\alpha) = 2(\mathcal{P}^{\star}\mathbf{U}_{kn}^{\sin})(s,\alpha) = \sigma_{kn}G_{kn}^{\sin}(s,\alpha).$$

Числа  $\sigma_{kn} = \sqrt{\frac{4\pi}{k+2n+3}}$  — сингулярные числа операторов  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}^{\perp}$ . Сингулярные числа оператора  $\mathcal{P}^{\star}$  равны  $\sigma_{kn}/2$ . Следовательно, верно следующее утверждение.

**Утверждение 3.** 1) Сингулярное разложение оператора  $\mathcal P$  имеет вид

$$g := (\mathcal{P}u) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sigma_{kn} \left( u, \mathbf{W}_{kn}^{\cos} \right)_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} G_{kn}^{\cos} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty} \sigma_{kn} \left( u, \mathbf{W}_{kn}^{\sin} \right)_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} G_{kn}^{\sin},$$

а значение обратного оператора вычисляется по формуле

(16)  
$$u = (\mathcal{P})^{-1}g = \sum_{\substack{k,n=0\\k,n=0}}^{\infty} \sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kn}^{\cos})_{L_2(Z, (1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{W}_{kn}^{\cos} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty} \sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kn}^{\sin})_{L_2(Z, (1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{W}_{kn}^{\sin}.$$

2) Сингулярное разложение оператора  $\mathcal{P}^{\star}$  имеет вид

$$g := (\mathcal{P}^{\star}u) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{kn}}{2} \left( u, \mathbf{U}_{kn}^{\cos} \right)_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} G_{kn}^{\cos} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty} \frac{\sigma_{kn}}{2} \left( u, \mathbf{U}_{kn}^{\sin} \right)_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} G_{kn}^{\sin},$$

а значение обратного оператора вычисляется по формуле

(17)  
$$u = (\mathcal{P}^{\star})^{-1}g = \sum_{\substack{k,n=0\\k,n=0}}^{\infty} 2\sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kn}^{\cos})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{U}_{kn}^{\cos} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty} 2\sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kn}^{\sin})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{U}_{kn}^{\sin}.$$

3) Сингулярное разложение оператора  $\mathcal{P}^{\perp}$  имеет вид

$$g := (\mathcal{P}^{\perp} u) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sigma_{kn} \left( u, \mathbf{V}_{kn}^{\cos} \right)_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} G_{kn}^{\cos} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty} \sigma_{kn} \left( u, \mathbf{V}_{kn}^{\sin} \right)_{L_2(S^2(\mathbb{B}))} G_{kn}^{\sin},$$

а значение обратного оператора вычисляется по формуле

(18)  
$$u = (\mathcal{P}^{\perp})^{-1}g = \sum_{\substack{k,n=0\\k,n=0}}^{\infty} \sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kn}^{\cos})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{V}_{kn}^{\cos} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty} \sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kn}^{\sin})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{V}_{kn}^{\sin}.$$

#### 4. Алгоритмы обращения лучевых преобразований

Здесь приведены описания двух алгоритмов решения задачи 2-тензорной томографии. Первый из них предлагается впервые и основан на методе усеченного сингулярного разложения операторов лучевых преобразований. Второй алгоритм, основанный на МНК с базисом, построенным с использованием *B*-сплайнов, предложен и численно исследован в работе [8].

4.1. Алгоритм, основанный на усеченном сингулярном разложении. Выбор максимальной степени  $N \ge 4$  потенциалов, участвующих при построении базисных полей, ограничивает выражения (16)–(18) конечным числом слагаемых. Тогда формулы для приближенного вычисления значений обратных операторов лучевых преобразований имеют вид:

$$(19) \qquad T_{N}g = \sum_{\substack{k,n=0\\k=1\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} \sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kn}^{\cos})_{L_{2}(Z,(1-s^{2})^{-1/2})} \mathbf{W}_{kn}^{\cos} \\ + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} \sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kn}^{\sin})_{L_{2}(Z,(1-s^{2})^{-1/2})} \mathbf{W}_{kn}^{\sin} \approx (\mathcal{P})^{-1}g, \\ (20) \qquad T_{N}^{\star}g = \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} 2\sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kn}^{\cos})_{L_{2}(Z,(1-s^{2})^{-1/2})} \mathbf{U}_{kn}^{\sin} \approx (\mathcal{P}^{\star})^{-1}g, \\ + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} 2\sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kn}^{\sin})_{L_{2}(Z,(1-s^{2})^{-1/2})} \mathbf{U}_{kn}^{\sin} \approx (\mathcal{P}^{\star})^{-1}g, \\ (21) \qquad + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} \sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kn}^{\sin})_{L_{2}(Z,(1-s^{2})^{-1/2})} \mathbf{V}_{kn}^{\cos} \\ + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} \sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kn}^{\sin})_{L_{2}(Z,(1-s^{2})^{-1/2})} \mathbf{V}_{kn}^{\sin} \approx (\mathcal{P}^{\bot})^{-1}g,$$

где g — известные значения соответствующего лучевого преобразования от восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля. Отметим, что количество базисных полей, участвующих в сумме вплоть до N, может быть найдено по формуле:  $\frac{(N-3)(N-2)}{2}$ .

Известно [11], что норма приближенного обратного оператора не превышает максимального значения обратной величины сингулярных чисел. Поэтому для норм операторов (19)–(21) имеют место оценки

$$||T_{N}|| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N-1}{\pi}}, \qquad ||T_{N}^{\star}|| \leq \sqrt{\frac{N-1}{\pi}}, \qquad ||T_{N}^{\perp}|| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N-1}{\pi}}.$$

Введем оператор

$$(T_{N})^{-1}u = \sum_{\substack{k,n=0\\k+2n+4\leqslant N\\k+2n+4\leqslant N\\n=0}}^{k+2n+4\leqslant N} \sigma_{kn}(u, \mathbf{W}_{kn}^{\cos})_{L_{2}(S^{2}(\mathbb{B}))}G_{kn}^{\cos} \approx \mathcal{P}u$$

Операторы  $(T_N^{\star})^{-1}$  и  $(T_N^{\perp})^{-1}$  определяются аналогично. Известно (см. [12], [13]), что решения уравнений

$$(T_{_N})^{-1}u = f, \qquad (T_{_N}^{\star})^{-1}u = f, \qquad (T_{_N}^{\perp})^{-1}u = f$$

численно устойчивы, если параметр зазора между двумя соседними сингулярными числами, тем, которое участвует в усеченном сингулярном разложении, и тем, которое отбрасывается, не слишком велик. Для операторов  $(T_N)^{-1}$ ,  $(T_N^{\star})^{-1}$ и  $(T_N^{\perp})^{-1}$  параметры зазора вычисляются по формуле

$$d_{\scriptscriptstyle N}=d_{\scriptscriptstyle N}^{\star}=d_{\scriptscriptstyle N}^{\perp}=\frac{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}{\sqrt{3}(\sqrt{N}-\sqrt{N-1})}$$

Опишем подробно особенности численной реализации предлагаемого алгоритма.

1) Дискретизация значений переменных  $s, \alpha$ . Задавая натуральное L, получаем дискретные последовательности  $s_j, j = -L + 1, \ldots, L - 1; \alpha_i, i = 0, 1, \ldots, 4L - 1; \Delta s = 1/L, \Delta \alpha = \pi/2L, \alpha_0 = s_0 = 0, для переменных <math>s, \alpha$ . Задание  $s_j, \alpha_i$  означает фиксацию векторов  $\xi_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$  и  $\eta_i = (-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i)$  и точки

$$x_{ij} = \left(\cos\alpha_i s_j + \sin\alpha_i \sqrt{1 - s_j^2}, \ \sin\alpha_i s_j - \cos\alpha_i \sqrt{1 - s_j^2}\right) \in \partial \mathbb{B},$$

из которой "выпускается" луч в направлении  $\eta_i$ .

+ .

2) Приближенное вычисление интегралов вдоль лучей для восстанавливаемого 2-тензорного поля. Интегралы вдоль лучей могут быть вычислены аналитически или численно. Эта часть является основой для следующих этапов алгоритмов восстановления симметричного 2-тензорного поля, и поэтому при численном вычислении интегралов расчеты проводились с высокой степенью точности. При вычислении лучевых преобразований (5)–(7) для восстанавливаемого поля, заключающемся в интегрировании вдоль прямой, используется квадратурная формула Боде степени точности  $O(\Delta t^6)$ ,

(22) 
$$\int_{t_0}^{t_4} F(t) dt \approx \frac{\Delta t}{45} \left( 14 F(t_0) + 64 F(t_1) + 24 F(t_2) + 64 F(t_3) + 14 F(t_4) \right).$$

На каждом шаге вычисления преобразований (5)–(7) контролировались условия выхода луча за пределы единичного круга.

3) Вычисление скалярных произведений. Скалярные произведения  $(g, G_{kn}^{\sin})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}$  и  $(g, G_{kn}^{\cos})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}$  в пространстве образов, участвующие в усеченном сингулярном разложении, вычислялись с использованием квадратурной формулы Боде (22) по каждой из переменных  $s, \alpha$ .

4.2. Алгоритм, основанный на МНК. Алгоритм основан на методе наименьших квадратов, а в качестве аппроксимирующей последовательности выступают соленоидальные и потенциальные симметричные 2-тензорные поля, построенные на основе двумерных *B*-сплайнов.

**Общая схема МНК-алгоритма.** Пусть вложение  $H_1 \subset H_2$  сепарабельных гильбертовых пространств непрерывно и  $H_1$  плотно в  $H_2$ , W — третье сепарабельное гильбертово пространство, и  $\mathcal{A} : H_1 \to W$  линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий оценке  $\|f\|_{H_2} \leq C \|\mathcal{A}f\|_W$ . Ставится задача найти приближенное решение  $f_\delta$  уравнения

$$\mathcal{A}f = g$$

с приближенно заданной правой частью  $g_{\delta} \in W$ , т.е. такой, что

$$\|g_{\delta} - g\|_{W} = \|g_{\delta} - \mathcal{A}f\|_{W} < \delta.$$

Выберем в пространстве  $H_1$  предельно плотную последовательность подпространств (последовательность подпространств называется [14] предельно плотной в пространстве Z, если для любого элемента  $z \in Z$  последовательность ортогональных проекций на эти подпространства сходится к z при  $n \to \infty$ ), задаваемых множествами линейно независимых элементов,  $Q_n = \{\varphi_{nk}\}_{k=1}^{n^2}$ . Так как  $H_1$  плотно в  $H_2$ , то последовательность подпространств, задаваемых множествами  $Q_n$ , предельно плотна и в  $H_2$ . В силу инъективности оператора  $\mathcal{A}$ элементы множества  $U_n = \{\psi_{nk} = \mathcal{A}\varphi_{nk}\}_{k=1}^{n^2}$  линейно независимы для любого n.

Пусть задан элемент  $g_{\delta} \in W$ . Фиксируя некоторое n, положим

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk} \psi_{nk}.$$

Предположим, что мы нашли коэффициенты  $c_{nk}$ , минимизирующие норму

$$\|g_{\delta} - g_{\delta n}\|_{W}.$$

В силу линейности оператора 
$$\mathcal{A}$$
 и способа образования множеств  $Q_n$  и  $U_n$   
имеем  $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk} \psi_{nk} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk} \mathcal{A} \varphi_{nk} = \mathcal{A} \Big( \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk} \varphi_{nk} \Big) = \mathcal{A} f_{\delta n}$ , где  
 $f_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk} \varphi_{nk}.$ 

Сходимость (безусловная) таким образом полученной аппроксимации к точному решению, т.е.  $\|f - f_{\delta n}\|_{H_2} \to 0$  при  $\delta \to 0, n \to \infty$ , показана в [15].

Требование минимизации нормы (23) приводит к системе линейных уравнений

(24) 
$$\sum_{k=1}^{n^2} c_{nk} \langle \psi_{nk}, \psi_{nm} \rangle_W = \langle g_{\delta}, \psi_{nm} \rangle_W, \qquad m = \overline{1, n^2}$$

с матрицей Грама. Система (24) имеет единственное решение, которое можно получить посредством одного из многочисленных точных или итерационных численных методов. Укажем функциональные пространства, в рамках которых реализован основанный на МНК алгоритм. В качестве пространства  $H_1$  выбрано пространство Соболева  $H^1(S^2(\mathbb{B}))$ . Пространством  $H_2$  является  $L_2(S^2(\mathbb{B}))$ . Вложение  $H^1(S^2(\mathbb{B})) \subset L_2(S^2(\mathbb{B}))$  непрерывно и его образ плотен в  $L_2(S^2(\mathbb{B}))$ . В качестве пространства W выбирается пространство Соболева  $H^1(Z)$ . Оператор  $\mathcal{A}$ , описанный в общей схеме алгоритма, определяется одной из формул (5)–(7).

Опишем подробнее шаги и процедуры дискретизаций, которые на разных этапах включает в себя МНК-алгоритм с использованием *B*-сплайнов.

1)-2) Дискретизация значений переменных *s*, *α* и приближенное вычисление интегралов вдоль лучей для восстанавливаемого 2-тензорного поля проводились аналогично с одноименными этапами реализации алгоритма, основанного на усеченном сингулярном разложении.

3) Задание симметричных 2-тензорных полей, построенных на основе *В*-сплайнов. Пусть на отрезке [-1,1] задано равномерное разбиение  $\Delta_M : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = 1$  с шагом  $h = t_i - t_{i-1} = 2/M$ . Одномерный *В*-сплайн 4-й степени с отрезком-носителем  $[t_i, t_{i+5}]$  определяется формулой

$$B_4^i(t) = \begin{cases} (5+2\tau)^4/384, & \text{для } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ (-16\tau^4 - 80\tau^3 - 120\tau^2 - 20\tau + 55)/96, & \text{для } t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ (48\tau^4 - 120\tau^2 + 115)/192, & \text{для } t \in [t_{i+2}, t_{i+3}), \\ (-16\tau^4 + 80\tau^3 - 120\tau^2 + 20\tau + 55)/96, & \text{для } t \in [t_{i+3}, t_{i+4}), \\ (5-2\tau)^4/384, & \text{для } t \in [t_{i+4}, t_{i+5}], \\ 0, & \text{для } t \notin [t_i, t_{i+5}], \end{cases}$$

где  $\tau = (t - (t_i + t_{i+5})/2)/h.$ 

Тензорное произведение одномерных сплайнов  $B_4^i(x_1)$  и  $B_4^j(x_2)$  представляет собой двумерный *B*-сплайн  $B_4^{ij}(x) = B_4^i(x_1) \times B_4^j(x_2)$  по равномерному разбиению  $\Delta_M \times \Delta_M$ . Известно (см. [16]), что одномерные *B*-сплайны степени *m*, заданные на равномерной сетке с шагом *h*, линейно независимы и любой потенциал  $\psi$  может быть ими аппроксимирован. Очевидно, это свойство переносится и на двумерные *B*-сплайны  $B_4^{ij}$ , и на их вторые производные  $\partial^2 B_4^{ij}/\partial x_k \partial x_l$ , для всех  $i, j = \overline{0, M}$  и k, l = 1, 2.

При решении задачи по восстановлению симметричного 2-тензорного поля по его известным лучевым преобразованиям, базисные 2-тензорный поля строятся на основе *B*-сплайнов по формулам

(25) 
$$\mathbf{W}_4^{ij} = (\mathbf{d}^{\perp})^2 B_4^{ij}, \qquad \mathbf{U}_4^{ij} = \mathbf{d}\mathbf{d}^{\perp} B_4^{ij}, \qquad \mathbf{V}_4^{ij} = \mathbf{d}^2 B_4^{ij}.$$

При численной реализации в базис включаются только те 2-тензорные поля, носитель которых полностью лежит внутри круга; их количество обозначим через p.

4) Вычисление интегралов вдоль лучей для базисных полей. В работе [17] были получены аналитические выражения для вычисления образов двумерных *B*-сплайнов под действием преобразования Радона. Используя этот результат и равенства (8), были получены точные формулы для вычисления лучевых преобразований (5)–(7) для базисных полей (25). Приведем формулы для того случая, когда центр носителя симметричных 2-тензорных полей (25) находится в начале координат

$$(\mathcal{P}\mathbf{W}_4)(s,\alpha) = 2(\mathcal{P}^*\mathbf{U}_4)(s,\alpha) = (\mathcal{P}^{\perp}\mathbf{V}_4)(s,\alpha) = K_4(\alpha)\sum_{k,l=1}^6 C_{kl}^4\chi_{kl}^4(s,\alpha),$$

гле

$$\begin{split} K_4(\alpha) &= \frac{1}{7! h^8 (\cos \alpha \sin \alpha)^5}; \\ C_{kl}^4 &= (-1)^{k+l} C_5^{k-1} C_5^{l-1}; \\ \chi_{kl}^4(s,\alpha) &= \begin{cases} (p_{kl}^4(\alpha) - s)^7, & \text{при } p_{kl}^4(\alpha) > s, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \\ p_{kl}^4(\alpha) &= h((7/2 - k) \cos \alpha + (7/2 - l) \sin \alpha). \end{split}$$

5) Дискретизация скалярного произведения в пространстве  $H^1(Z)$ . Возможны различные способы дискретизации скалярного произведения (1). В качестве его дискретного аналога был выбран следующий вариант

$$(f,q)_{H^1(Z)} = \sum_{k,l=0}^{M-1} [1 + (k - M/2)^2 + (l - M/2)^2] c_{k,l}(f) \overline{c_{k,l}(q)},$$

который, в сочетании с известными свойствами дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [18], позволяет вдвое сократить размер основного массива, в котором размещены элементы матрицы Грама. Выбор дискретизации исходных данных в соответствии с требованиями, налагаемыми процедурой быстрого преобразования  $\Phi$ урье (БП $\Phi$ ), позволяет существенно сократить время вычисления коэффициентов  $c_{k,l}(f)$  и  $c_{k,l}(q)$ .

6) Решение системы линейных уравнений. Для решения системы (24) используется метод Холецкого. Обозначим матрицу Грама через J, через  $a_{ij} =$  $(\psi_{ni},\psi_{nj})_{H^1(Z)}$  — ее элемент, а через b — правую часть системы

$$(b_m = (q_\delta, \psi_{nm})_{H^1(Z)}).$$

Столбец неизвестных коэффициентов  $c_{nk}$  обозначим с. Применяя алгоритм специального LU-разложения матрицы J, приводим ее к виду  $J = LL^T$ . Тогда решение системы Jc = b сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:  $Lz = b, L^T c = z$ . Коэффициенты матрицы  $L = (l_{ij})$ находятся по формулам

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2\right)^{1/2}, \qquad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right),$$

где  $j = 1, \dots, i - 1, i = 1, \dots, p.$ Вычислив  $c_{nk}$ , получим  $f_{\delta n} = \sum_{k=1}^{p} c_{nk} \varphi_{nk}.$ 

#### 5. Численные эксперименты

Относительная погрешность восстановления симметричного 2-тензорного поля вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{\|w - w_{\delta}\|_{L_2(S^2(\mathbb{B}))}}{\|w\|_{L_2(S^2(\mathbb{B}))}} \cdot 100\%,$$

где w — восстанавливаемое симметричное 2-тензорное поле, <br/>а $w_{\delta}$  — его аппроксимация.

Для краткости компоненту  $w_{ij}$  симметричного 2-тензорного поля будем называть "компонента ij".

**Тест 1.** В первой серии экспериментов восстанавливалось соленоидальное симметричное 2-тензорное поле  $(d^{\perp})^2 f_1$  с бесконечно дифференцируемыми компонентами и потенциалом

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x_1 \cos x_2 \exp\left(-24\left((x_1 - 0.2)^2 + x_2^2\right)\right), & \text{при } |x| \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таблице 1 указана относительная погрешность восстановления тестового 2-тензорного поля в зависимости от максимальной степени N потенциалов, используемых при построении базисных соленоидальных симметричных 2-тензорных полей. Используется дискретизация  $128 \times 256$  по  $(s, \alpha)$ . Относительная погрешность восстановления при N > 40 не приводится, поскольку при этих значениях N она равна нулю с точностью до второго знака после запятой. Из таблицы видно, что с ростом N относительная погрешность восстановления лим с точностью до второго знака после запятой. Из таблицы видно, что с ростом N относительная погрешность восстановления уменьшается.

#### Таблица 1

Ν	5	10	15	20	25	30	35	40
δ	99.24	82.18	41.59	11.91	2.03	0.23	0.02	0.00

На рисунке 1 изображена компонента 12 восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля  $(d^{\perp})^2 f_1$  (а) и компоненты 12 ее приближений при N = 10 (б), N = 20 (в) и N = 30 (г). Для сравнения, при восстановлении тестового поля алгоритмом, основанным на МНК с использованием *B*-сплайнов 4-ой степени и h = 2/59, относительная погрешность составила 0.06%.

**Тест 2.** В следующей серии экспериментов восстанавливалось потенциальное симметричное 2-тензорное поле  $d^2 f_2$  с компонентами, имеющими разрывные вторые производные, и потенциалом

$$f_2(x) = \begin{cases} (4(0.25 - x_1^2 - 9(x_2 + 0.5)^2))^4, & \text{при } x \in D_0, \\ (15(0.04 - (x_1 - 0.5)^2 - (x_2 - 0.5)^2))^4 / (0.6)^3, & \text{при } x \in D_1, \\ (15(0.04 - (x_1 + 0.5)^2 - (x_2 - 0.5)^2))^4 / (0.6)^3, & \text{при } x \in D_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Рис. 1. Компонента 12 восстанавливаемого 2-тензорного поля  $(d^{\perp})^2 f_1$  (a) и компоненты 12 его аппроксимаций при N = 10 (б), N = 20 (в) и N = 30 (г).

Здесь

$$D_0 = \{x \mid x_1^2 + 9(x_2 + 0.5)^2 \le 0.25\},\$$
  

$$D_1 = \{x \mid (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \le 0.04\},\$$
  

$$D_2 = \{x \mid (x_1 + 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \le 0.04\}.\$$

Цель данного эксперимента: исследование влияния уровня и характера вносимого в исходные данные шума на относительную погрешность восстановления 2-тензорного поля.

На рисунке 2 приведена зависимость относительной погрешности восстановления 2-тензорного поля  $d^2 f_2$  от уровня вносимого равномерного шума (а) и шума с нормальным распределением с параметрами (0,1) (б). Использовались уровни шума 0%, 2%, 4%, 6%, 8% и 10% (соответствующие кривые выделены разными цветами на графике). Дискретизация входных данных —  $128 \times 256$  по  $(s, \alpha)$ . Из графиков видно, что с увеличением уровня шума оптимальное N, то есть то значение, при котором достигается наилучшая точность восстановления, уменьшается. Кроме того, при внесении шума с нормальным распределением с параметрами (0,1) относительная погрешность восстановления 2-тензорного поля выше, нежели при внесении равномерного шума того же уровня.

**Тест 3.** В следующем эксперименте восстанавливалось потенциальное симметричное 2-тензорное поле  $d^2 f_3$  с разрывными компонентами и потенциалом:

$$f_3(x) = \begin{cases} (0.25 - x_1^2 - 9(x_2 + 0.4)^2)^2, & \text{при } x \in D_3, \\ 10(0.04 - (x_1 - 0.4)^2 - (x_2 - 0.4)^2)^2, & \text{при } x \in D_4, \\ (0.04 - (x_1 + 0.4)^2 - (x_2 - 0.4)^2)^2, & \text{при } x \in D_5, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

И.Е. СВЕТОВ, А.П. ПОЛЯКОВА



Рис. 2. Зависимость относительной погрешности восстановления 2-тензорного поля  $d^2 f_2$  от уровня вносимого равномерного шума (а) и шума с нормальным распределением с параметрами (0,1) (б).

с носителем

$$D_3 = \{x \mid x_1^2 + 9(x_2 + 0.4)^2 \le 0.25\},\$$
  
$$D_4 = \{x \mid (x_1 - 0.4)^2 + (x_2 - 0.4)^2 \le 0.04\},\$$
  
$$D_5 = \{x \mid (x_1 + 0.4)^2 + (x_2 - 0.4)^2 \le 0.04\}.\$$

Исследуется зависимость точности восстановления поля  $d^2 f_3$  от степени N и количества исходных данных. Использовались три варианта дискретизации входных данных:  $128 \times 256$ ,  $256 \times 512$  и  $512 \times 1024$  по  $(s, \alpha)$ . На рисунке 3 приведен результат этого исследования.

Из графика видно, что относительная погрешность восстановления симметричного 2-тензорного поля  $\mathrm{d}^2f_3$  при использовании дискретизаций 256  $\times$  512 и 512  $\times$  1024 по  $(s,\alpha)$  практически идентична и несколько меньше, чем относительная погрешность восстановления при использовании дискретизации 128  $\times$  256 по  $(s,\alpha).$ 

На рисунке 4 приведены компонента 11 восстанавливаемого 2-тензорного поля  $d^2 f_3$  (a) и компоненты 11 его лучших аппроксимаций с использованием



Рис. 3. Зависимость относительной погрешности восстановления симметричного 2-тензорного поля  $d^2 f_3$  от количества исходных данных.

метода сингулярного разложения и дискретизации 128×256 (б) (погрешность — 34.6%), 256×512 (в) (погрешность — 31.2%) по  $(s,\alpha)$  и МНК с использованием *B*-сплайнов 4-ой степени и h=2/59 (г) (погрешность — 41.08%, дискретизация 128×256 по  $(s,\alpha)$ ).



Рис. 4. Компонента 11 восстанавливаемого 2-тензорного поля  $\mathrm{d}^2 f_3$  (а) и компоненты 11 его лучших аппроксимаций с использованием метода сингулярного разложения и дискретизации  $128\times256$  (б) ,  $256\times512$  (в) по  $(s,\alpha)$  и МНК с дискретизацией  $128\times256$  (г).

Несмотря на то, что относительная погрешность восстановления достаточно высока, рисунки хорошо передают характер поведения тестового тензорного поля. **Тест 4.** В следующей серии экспериментов восстанавливалось симметричное 2-тензорное поле  $d^2 f_4$  с разрывными компонентами и потенциалом

$$f_4(x) = \begin{cases} (0.25 - x_1^2 - 9x_2^2)^2, & \text{при } x_1^2 + 9x_2^2 \leqslant 0.25, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рисунке 5 приведены компонента 11 восстанавливаемого 2-тензорного поля  $d^2 f_4$  (a) и компоненты 11 его аппроксимаций с использованием метода сингулярного разложения при N = 100 (б) (погрешность — 35.74%), N = 260 (в) (погрешность — 24.2%) и МНК с использованием *B*-сплайнов 4-ой степени и h = 2/59 (г) (погрешность — 35.46%). Используется дискретизация  $128 \times 256$  по  $(s, \alpha)$ .

Для этого тестового 2-тензорного поля также исследовалось влияние внесения в исходные данные шума с нормальным распределением с параметрами (0,1). На рисунке 6 приведена зависимость относительной погрешности восстановления 2-тензорного поля  $d^2 f_4$  от уровня вносимого шума с нормальным распределением с параметрами (0,1). Использовались уровни шума 0%, 1%, 2%, 3%, 4% и 5% (соответствующие кривые выделены разными цветами на графике).



Рис. 5. Компонента 11 восстанавливаемого 2-тензорного поля  $d^2 f_4$  (а) и компоненты 11 его аппроксимаций с использованием метода сингулярного разложения при N = 100 (б), N = 260 (в) и МНК (г).

Из графика видно, что с увеличением уровня шума оптимальное N, то есть то значение, при котором достигается наилучшая точность восстановления, уменьшается. Также стоит отметить, что при восстановлении 2-тензорного поля с разрывными компонентами внесение даже небольшого уровня шума значительно влияет на точность восстановления.





#### 6. Заключение

В работе предложен алгоритм для восстановления симметричного 2-тензорного поля (или его части) по известным лучевым преобразованиям. Алгоритм основан на методе усеченного сингулярного разложения соответствующих операторов лучевых преобразований, действующих на симметричные 2тензорные поля. Именно, предложен алгоритм восстановления соленоидальной части  $(d^{\perp})^2 \psi$  симметричных 2-тензорных полей по их известному продольному лучевому преобразованию, алгоритм восстановления потенциальной части вида  $d^2\varphi$  симметричных 2-тензорных полей по их известному поперечному лучевому преобразованию и алгоритм восстановления потенциальной части вида  $\mathrm{dd}^{\perp}\phi$  симметричных 2-тензорных полей по их известному смешанному лучевому преобразованию, основанные на методе усеченного сингулярного разложения. То есть обратные операторы лучевых преобразований приближались конечной суммой базисных элементов с соответствующими коэффициентами. При этом удачный выбор порядка суммирования позволил получить оценки для норм операторов приближенного обращения (операторов лучевых преобразований).

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) При увеличении степени гладкости восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля относительная ошибка значительно уменьшается. Наибольшая ошибка появляется при восстановлении разрывных полей, что и не удивительно. При этом уменьшение размера носителя разрывного поля приводит к уменьшению относительной погрешности восстановления.

2) Сравнение относительной погрешности восстановления при дискретизациях исходных данных  $128 \times 256$ ,  $256 \times 512$  и  $512 \times 1024$  по  $(s, \alpha)$  показало следующий результат: точность восстановления при использовании дискретизаций  $256 \times 512$  и  $512 \times 1024$  по  $(s, \alpha)$  практически идентична и несколько меньше, чем относительная погрешность восстановления при использовании дискретизации  $128 \times 256$  по  $(s, \alpha)$ .

3) Внесение шума в исходные данные значительно влияет на точность восстановления модельного симметричного 2-тензорного поля, особенно при восстановлении симметричных 2-тензорных полей с разрывными компонентами. Одновременно уменьшается значение оптимального N, то есть максимальной степени базисных полей, при использовании которых достигается наименьшая относительная погрешность восстановления. Внесение шума с нормальным распределением с параметрами (0,1) в 1.5–2 раза увеличивает относительную погрешность восстановления по сравнению с внесением равномерного шума того же уровня.

4) Было проведено сравнение по точности восстановления предложенных алгоритмов с алгоритмами, основанными на МНК с использованием *B*-сплайнов. При восстановлении гладких 2-тензорных полей точность восстановления одинаково хорошая. Сравнение же результатов восстановления разрывного 2-тензорного поля показало преимущество алгоритмов, основанных на методе усеченного сингулярного разложения.

#### References

- E.Yu. Derevtsov, A.P. Polyakova, Solution of the Integral Geometry Problem for 2-Tensor Fields by the Singular Value Decomposition Method, Journal of Mathematical Sciences, 202:1 (2014), 50–71. MR3256127
- [2] A.K. Louis, Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform, Society for industrial and applied mathematics, 15:3 (1984), 621–633. MR0740700
- [3] E.Yu. Derevtsov, A.V. Efimov, A.K. Louis, T. Schuster, Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 19:4-5 (2011), 689-715. MR2853118
- [4] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, Comparison of two algorithms for the numerical solution of the two-dimensional vector tomography, Siberian Electronic Mathematical Reports, 10 (2013), 90-108 (in Russian). MR3039996
- [5] E.Yu. Derevtsov, I.E. Svetov, Yu.S. Volkov, Application of B-splines in emission 2Dtomography problem in a refracting medium, Sib. J. Ind. Mat., 11:3 (2008), 45–60 (in Russian).
- [6] E.Yu. Derevtsov, I.E. Svetov, Yu.S. Volkov and T. Schuster, Numerical B-spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorbtion and refraction, 2008 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08, July 21–25, 2008: conference proceedings, 212–217.
- [7] I.E. Svetov, E.Yu. Derevtsov, Yu.S. Volkov, T. Schuster, A numerical solver based on Bsplines for 2D vector field tomography in a refracting medium, Mathematics and Computers in Simulation, 97 (2014), 207–223. MR3137917
- [8] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, Reconstruction of 2-Tensor Fields, Given in a Unit Circle, by Their Ray Transform Based on LSM with B-Splines, Numerical Analysis and Applications, 3:2 (2010), 151–164. Zbl 1212.65511
- [9] E.Yu. Derevtsov, An approach of direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems, J. Inverse Ill-Posed Problems, 13:3 (2005), 213–246. MR2188609
- [10] I.E. Svetov, Properties of the Ray Transforms of Two-Dimensional 2-Tensor Fields Defined in the Unit Disk, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 8:1 (2014), 106–114. MR3234798
- [11] F. Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography, Wiley, Chichester, 1986. MR0856916
- [12] V.A. Tcheverda, V.I. Kostin, r-pseudoinverse for compact operators in Hilbert spaces: existence and stability, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 3:2 (1995), 131–148. MR1341035
- [13] V.A. Tcheverda, V.I. Kostin, *r-pseudoinverse for compact operator*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 7 (2010), Proceedings of first international youth school-conference "Theory and numerical methods of inverse and ill-conditioned problems solving", Part I, 258– 282 (in Russian).

- [14] V.A. Trenogin, Functional Analysis, Nauka, Moskva, 1980 (in Russian).
- [15] E.Yu. Derevtsov, A.G. Kleshchev, V.A. Sharafutdinov, Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 7:1 (1999), 83–103. MR1681260
- [16] L. Schumaker, Spline Functions: Basic Theory, Wiley, New York, 1981. MR0606200
- [17] A.P. Polyakova, About obtaining of analytical expressions for the images of B- splines for the Radon's transform and use of its in problems of scalar tomography, Siberian Electronic Mathematical Reports, 7 (2010), Proceedings of first international youth school-conference "Theory and numerical methods of inverse and ill-conditioned problems solving", Part I, 248– 257 (in Russian).
- [18] K. Enslein, A. Ralston, H.S. Wilf (Eds.), Statistical Methods for Digital Computers, Wiley, New York, 1977. Zbl 0342.00014

Ivan Evgenyevich Svetov Sobolev Institute of Mathematics, pr. Koptyuga, 4, 630090, Novosibirsk, Russia Novosibirsk state university, st. Pirogova, 2 630090, Novosibirsk, Russia *E-mail address:* svetovie@math.nsc.ru

Anna Petrovna Polyakova Sobolev Institute of Mathematics, pr. Koptyuga, 4, 630090, Novosibirsk, Russia Novosibirsk state university, st. Pirogova, 2 630090, Novosibirsk, Russia *E-mail address*: anna.polyakova@ngs.ru