S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 12, стр. 500–507 (2015)* УДК 512.572
DOI 10.17377/semi.2015.12.042 MSC 17B63

# ФУНКЦИИ СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА–ПУАССОНА

С.М. РАЦЕЕВ, О.И. ЧЕРЕВАТЕНКО

Abstract. Leibniz-Poisson algebras are generalizations of Poisson algebras. Let $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 0}$ and $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 2}$ are respectively sequences of codimensions and proper codimensions of varieties of Leibniz-Poisson algebras $\mathbf{V}$. We study the exponential generating functions $\mathcal{C}(\mathbf{V},z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathbf{V})z^n/n!$ and $\mathcal{C}^p(\mathbf{V},z) = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n(\mathbf{V})z^n/n!$. The functions $\mathcal{C}(\mathbf{V},z)$ are used in the study of Lie algebras and associative algebras. In this paper we study numerical characteristics of varieties of Leibniz-Poisson algebras $\mathbf{V}_s$ defined by the identities

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0,\ \{x_0,\{x_1,x_2\},\dots,\{x_{2s-1},x_{2s}\}\} = 0$$

and of varieties of Leibniz-Poisson algebras $\mathbf{W}_s$ defined by the identities

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0,\ \{\{x_1,x_2\},\dots,\{x_{2s+1},x_{2s+2}\}\} = 0,\ s\geq 1.$$

For each of the variety $\mathbf{V}_s$ and $\mathbf{W}_s$ an algebra-carrier is found and a basis of $n$-th proper polylinear space is built. We found exact formulas for the exponential generating functions for the codimension sequences and for the proper codimension sequences and exact formulas for codimension and proper codimension. Also a series of varieties of Leibniz-Poisson algebras, which codimension sequences asymptotically grow as polynomials of degree $k$, $k\geq 2$, is given.

**Keywords:** Poisson algebra, Leibniz-Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

---

Ratseev, S.M., Cherevatenko, O.I., Complexity functions of some Leibniz-Poisson algebras.



*Поступила 12 июня 2015 г., опубликована 10 сентября 2015 г.*

## 1. Введение

Векторное пространство $A$ над полем $K$ с двумя $K$-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница–Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство $A$ является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b, \quad \{c, a\cdot b\} = a\cdot\{c,b\} + \{c,a\}\cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. При этом алгебра Лейбница $A(+,\{,\},K)$ над полем $K$ определяется тождеством

$$\{\{x,y\},z\} = \{\{x,z\},y\} + \{x,\{y,z\}\}.$$

Алгебры Лейбница–Пуассона впервые были введены в работе [1]. Данные алгебры являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д.

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке: $\{\{a,b\},c\} = \{a,b,c\}$.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница–Пуассона над счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $P_n$ — пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени $n$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $\Gamma_n$ — подпространство в $P_n$, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \ldots,\ t \geq 2.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})), \quad \Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})),$$
$$c_n(\mathbf{V}) = \dim\ P_n(\mathbf{V}), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim\ \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Величины $c_n(\mathbf{V})$ и $\gamma_n(\mathbf{V})$ называются $n$-й коразмерностью и $n$-й собственной коразмерностью многообразия $\mathbf{V}$ соответственно.

## 2. Алгебры Лейбница–Пуассона экспоненциального роста

Далее нам понадобятся следующие конструкции алгебр Лейбница–Пуассона на основе ассоциативных алгебр.

**Предложение 1.** *Пусть $A$ — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем $K$. В векторном пространстве $C = A \oplus A \oplus K$ над полем $K$ определим три операции умножения $\cdot$, $\{,\}_1$, $\{,\}_2$ следующим образом:*

$$(x_1, x_2, \alpha)\cdot(y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta).$$
$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\}_1 = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1, 0),$$
$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\}_2 = ([x_1, y_1], [x_2, y_1], 0),$$

*где $[x,y] = x\wedge y - y\wedge x$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$. Тогда полученные алгебры*

$$C_1 = C(+,\cdot,\{,\}_1, K), \quad C_2 = C(+,\cdot,\{,\}_2, K)$$

*будут алгебрами Лейбница–Пуассона, в каждой из которых выполнено тождество $\{x_1, x_2\}\cdot\{x_3, x_4\} = 0$.*

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим экспоненциальные производящие функции

$$\mathcal{C}(\mathbf{V},z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(\mathbf{V})}{n!}z^n,\quad \mathcal{C}^p(\mathbf{V},z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\gamma_n(\mathbf{V})}{n!}z^n,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Данные функции оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий. Применение функций сложности для многообразий алгебр Ли оказалось плодотворным и привело к классификации типов роста [2]. Из работы [1] следует такое

**Предложение 2.** *Пусть для многообразия алгебр Лейбница–Пуассона* $\mathbf{V}$ *над произвольным полем* $\mathcal{C}^p(\mathbf{V},z)$ *является целой функцией комплексного аргумента. Тогда* $\mathcal{C}(\mathbf{V},z)$ *также является целой функцией, причем выполнено равенство* $\mathcal{C}(\mathbf{V},z)=\exp(z)\cdot(\mathcal{C}^p(\mathbf{V},z)+1)$.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n)\approx g(n)$, если $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$.

Определим многообразия алгебр Лейбница–Пуассона $\mathbf{V}_s$ и $\mathbf{W}_s$ следующими полилинейными тождествами:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_s:&\quad \{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0,\quad \{x_0,\{x_1,x_2\},\ldots,\{x_{2s-1},x_{2s}\}\}=0,\\ \mathbf{W}_s:&\quad \{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0,\quad \{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\ldots,\{x_{2s+1},x_{2s+2}\}\}=0.\end{aligned}$$

Понятно, что $\mathbf{V}_s\subset\mathbf{W}_s\subset\mathbf{V}_{s+1}$ для любого $s\geq 1$. В работе [1] показано, что многообразие $\mathbf{V}_1$ имеет почти полиномиальный рост. В работе [3] описаны характеристики многообразия $\mathbf{W}_1$. Также если к идеалу тождеств многообразия $\mathbf{W}_1$ добавить тождество $\{x,x\}=0$, то получим многообразие алгебр Пуассона почти полиномиального роста [4].

Пусть $UT_s=UT_s(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка $s$ над полем $K$, $Q_s=UT_s\oplus UT_s\oplus K$ — алгебра Лейбница–Пуассона, построенная с помощью операций $\cdot$ и $\{,\}_1$ предложения 1, $R_s=UT_s\oplus UT_s\oplus K$ — алгебра Лейбница–Пуассона, построенная с помощью операций $\cdot$ и $\{,\}_2$ предложения 1. Нетрудно видеть, что $Q_s\in\mathbf{V}_s$, $R_s\in\mathbf{W}_{s-1}$, $s\geq 2$. Далее будет показано, что в случае основного поля нулевой характеристики алгебры $Q_s$ и $R_s$ порождают соответствующие многообразия $\mathbf{V}_s$ и $\mathbf{W}_{s-1}$, $s\geq 2$.

**Теорема 1.** $(i)$ *В случае произвольного поля $K$ следующие полилинейные элементы от переменных $x_1,\ldots,x_n$ образуют базис пространства $\Gamma_n(Q_s)$, $s\geq 2$:*

$$\{x_m,x_{i_1},\ldots x_{i_k},\{x_{11},\ldots,x_{1a_1}\},\ldots,\{x_{c1},\ldots,x_{ca_c}\}\},\tag{1}$$

$$\begin{gathered}m=1,\ldots,n,\quad k\geq 0,\quad i_1<\ldots<i_k,\\ a_1\geq 2,\ldots,a_c\geq 2,\quad 0\leq c\leq s-1,\end{gathered}\tag{2}$$

*и переменные в каждой скобке $\{x_{j1},\ldots,x_{ja_j}\}$ упорядочены таким образом: $j1>j2<\ldots<ja_j$.*

$(ii)$ *Если характеристика поля равна нулю, то тождества*

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0,\quad \{x_0,\{x_1,x_2\},\ldots,\{x_{2s-1},x_{2s}\}\}=0$$

*порождают идеал тождеств алгебры $Q_s$.*

*Доказательство.* Заметим, что в любой алгебре Лейбница выполнено тождество $\{x,\{y,z\}\} = -\{x,\{z,y\}\}$. С учетом этого факта, методом математической индукции по переменной $s$ несложно показать, что $\Gamma_n(Q_s)$ является линейной оболочкой элементов вида (1) с условиями (2).

Каждому элементу $\omega$ вида (1) сопоставим такой упорядоченный набор чисел (длины скобок): $I(\omega) = (k+1, a_1, \ldots, a_c)$. На множестве элементов данного вида определим частичную упорядоченность. Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — элементы вида (1). Определим $\omega_1 \prec \omega_2$, если набор $I(\omega_1)$ лексикографически слева направо строго меньше набора $I(\omega_2)$.

Предположим, что для некоторого $n$ данные элементы линейно зависимы в $\Gamma_n(Q_s)$. В полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (1) зафиксируем такое слагаемое, которое имеет ненулевой коэффициент, минимальное значение $c$ и является минимальным элементом относительно порядка $\prec$ среди всех элементов с ненулевыми коэффициентами и минимальными значениями $c$. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{x_m, x_{i_1}, \ldots x_{i_k}, \{x_{11}, \ldots, x_{1a_1}\}, \ldots, \{x_{c1}, \ldots, x_{ca_c}\}\}, \quad 0 \neq \alpha \in K.$$

Во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$x_m \to (0,E,0),\ x_{i_1} \to (E,0,0),\ x_{i_2} \to (E,0,0), \ldots, x_{i_k} \to (E,0,0),$$

$$x_{11} \to (e_{12},0,0),\ x_{12} \to (e_{22},0,0),\ x_{13} \to (e_{22},0,0), \ldots, x_{1a_1} \to (e_{22},0,0),$$

$$x_{21} \to (e_{23},0,0),\ x_{22} \to (e_{33},0,0),\ x_{23} \to (e_{33},0,0), \ldots, x_{2a_2} \to (e_{33},0,0),$$

$$\ldots$$

$$x_{c1} \to (e_{c,c+1},0,0),\ x_{c2} \to (e_{c+1,c+1},0,0),\ x_{c3} \to (e_{c+1,c+1},0,0), \ldots,$$
$$x_{ca_c} \to (e_{c+1,c+1},0,0),$$

где $E$ — единичная матрица, $e_{ij}$ — матричные единички. Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha(0, e_{1,c+1}, 0)$. Понятно, что равенство $\alpha(0, e_{1,c+1}, 0) = (0,0,0)$ выполнено лишь в случае $\alpha = 0$. Противоречие.

Осталось заметить, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Лейбница-Пуассона $\mathbf{V}$ порождается последовательностью $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})$, $n \geq 1$ (см. [1]). □

**Теорема 2.** *Для многообразия $\mathbf{V}_s$ над произвольным полем верны следующие утверждения:*

1) $\mathbf{V}_s$ *имеет следующую экспоненциальную производящую функцию:*

$$\mathcal{C}^p(\mathbf{V}_s, z) = \frac{z}{z-1}\left(\left(1 + (z-1)\exp(z)\right)^s - 1\right) - z;$$

2) *коразмерности и собственные коразмерности вычисляются по следующим формулам:*

$$\gamma_n(\mathbf{V}_s) = \sum_{k=1}^{s} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} k^{-i-1} \frac{n!}{(n-i-1)!}, \quad n \geq 2,$$

$$\gamma_n(\mathbf{V}_s) \approx n^s s^{n-s}, \quad n \to \infty,$$

$$c_n(\mathbf{V}_s) = 1 - n + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1} C_{k-2}^i (-1)^{k-i} k^{-i-1} \frac{n!}{(n-i-1)!}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n(\mathbf{V}_s) \approx n^s(s+1)^{n-s}, \quad n \to \infty,$$

*где* $C_n^k$ *— число сочетаний из* $n$ *по* $k$.

*Доказательство.* Формулы для $\mathcal{C}^p(\mathbf{V}_s, z)$ и $\gamma_n(\mathbf{V}_s)$ следуют из теоремы 1 работы [5] и теоремы 2 работы [6].

Покажем справедливость формулы для коразмерностей $c_n(\mathbf{V}_s)$. Из предложения 2 следует, что

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_s, z) = \exp(z) - \exp(z)z + \frac{\exp(z)z}{z-1}\left(\Big(1 + (z-1)\exp(z)\Big)^s - 1\right).$$

Запишем данную функцию в виде

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_s, z) = \exp(z) - \exp(z)z + \sum_{k=2}^{s+1} C_s^{k-1} z(z-1)^{k-2}\exp(kz). \tag{3}$$

При этом

$$z(z-1)^{k-2}\exp(kz) = \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i z^{i+1}(-1)^{k-2-i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^m}{m!}z^m =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{m=0}^{\infty} C_{k-2}^i(-1)^{k-2-i}z^{m+i+1}\frac{k^m}{m!} = /m+i+1=n/ =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{n=i+1}^{\infty} C_{k-2}^i(-1)^{k-i}\frac{k^{n-i-1}}{(n-i-1)!}z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i(-1)^{k-i}\frac{1}{k^{i+1}}\frac{n!}{(n-i-1)!}\right)\frac{k^n}{n!}z^n.$$

В последнем равенстве использовался тот факт, что $\dfrac{n!}{(n-i-1)!} = 0$ при $n-i-1<0$. Подставим последнюю двойную сумму в (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(1 - n + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1}C_{k-2}^i(-1)^{k-i}\frac{1}{k^{i+1}}\frac{n!}{(n-i-1)!}\right).$$

То, что находится внутри скобок, и есть $c_n(\mathbf{V}_s)$. □

**Теорема 3.** $(i)$ *В случае произвольного поля* $K$ *следующие полилинейные элементы от переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *образуют базис пространства* $\Gamma_n(R_s)$, $s \geq 2$:

$$\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{i_1}, \ldots x_{i_k}, \{x_{11}, \ldots, x_{1a_1}\}, \ldots, \{x_{c1}, \ldots, x_{ca_c}\}\}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} m_1, m_2 \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad m_1 \neq m_2, \quad k \geq 0, \quad i_1 < \ldots < i_k, \\ a_1 \geq 2, \ldots, a_c \geq 2, \quad 0 \leq c \leq s-2, \end{gathered} \tag{5}$$

*и переменные в каждой скобке* $\{x_{j1}, \ldots, x_{ja_j}\}$ *упорядочены таким образом:* $j1 > j2 < \ldots < ja_j$.

$(ii)$ *Если характеристика поля равна нулю, то тождества*

$$\{x_1, x_2\}\cdot\{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \ldots, \{x_{2s-1}, x_{2s}\}\} = 0$$

*порождают идеал тождеств алгебры* $R_s$.

*Доказательство* аналогично доказательству теоремы 1. В данном случае делаем такие подстановки:

$$x_{m_1} \to (0, e_{11}, 0),\ x_{m_2} \to (e_{12}, 0, 0),$$
$$x_{i_1} \to (e_{22}, 0, 0),\ x_{i_2} \to (e_{22}, 0, 0), \dots, x_{i_k} \to (e_{22}, 0, 0),$$
$$x_{11} \to (e_{23}, 0, 0),\ x_{12} \to (e_{33}, 0, 0),\ x_{13} \to (e_{33}, 0, 0), \dots, x_{1a_1} \to (e_{33}, 0, 0),$$
$$x_{21} \to (e_{34}, 0, 0),\ x_{22} \to (e_{44}, 0, 0),\ x_{23} \to (e_{44}, 0, 0), \dots, x_{2a_2} \to (e_{44}, 0, 0),$$
$$\dots$$
$$x_{c1} \to (e_{c+1,c+2}, 0, 0),\ x_{c2} \to (e_{c+2,c+2}, 0, 0),\ x_{c3} \to (e_{c+2,c+2}, 0, 0), \dots,$$
$$x_{ca_c} \to (e_{c+2,c+2}, 0, 0).$$

**Теорема 4.** *Для многообразия* $\mathbf{W}_s$ *над произвольным полем верны следующие утверждения:*

1) $\mathbf{W}_s$ *имеет следующую экспоненциальную производящую функцию:*

$$\mathcal{C}^p(\mathbf{W}_s, z) = \frac{z^2}{z-1}\left(\Big(1 + (z-1)\exp(z)\Big)^s - 1\right);$$

2) *коразмерности и собственные коразмерности вычисляются по следующим формулам:*

$$\gamma_n(\mathbf{W}_s) = \sum_{k=1}^{s} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} k^{-i-2} \frac{n!}{(n-i-2)!}, \quad n \geq 2,$$
$$\gamma_n(\mathbf{W}_s) \approx n^{s+1} s^{n-s-1}, \quad n \to \infty,$$
$$c_n(\mathbf{W}_s) = 1 + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1} C_{k-2}^i (-1)^{k-i} k^{-i-2} \frac{n!}{(n-i-2)!}, \quad n \geq 1,$$
$$c_n(\mathbf{W}_s) \approx n^{s+1} (s+1)^{n-s-1}, \quad n \to \infty.$$

*Доказательство* аналогично доказательству теоремы 2.

## 3. Алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста

Обозначим чрез $J = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$ квадратную матрицу порядка $k$, которая на диагонали, проходящей выше главной диагонали, содержит единицы, а все остальные элементы равны нулю. Рассмотрим следующую подалгебру в $UT_k$ над полем $K$, которая была введена в работе [7]:

$$N_k = \langle E, J, J^2, \dots, J^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1k} \rangle_K,$$

где $E$ — единичная матрица порядка $k$.

Пусть $L_k = N_k \oplus N_k \oplus K$ — алгебра Лейбница–Пуассона, построенная с помощью операций $\cdot$ и $\{,\}_2$ предложения 1. Видно, что $L_k \in \mathbf{W}_1$, $k \geq 3$.

**Теорема 5.** *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница–Пуассона* $L_k$, $k \geq 3$, *верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств* $\mathrm{Id}(L_k)$ *порождается полилинейными тождествами*

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0, \quad \{x_1, \dots, x_k\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;$$

2) *для любого* $1 < n < k$ *полилинейные элементы от переменных* $x_1, \dots, x_n$

$$\{x_i, x_j, x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n\}, \tag{6}$$

*образуют базис пространства* $\Gamma_n(L_k)$*, где* $\widehat{}$ *означает, что элемент пропущен;*

3) *коразмерности и собственные коразмерности вычисляются по следующим формулам:*

$$\gamma_n(L_k) = n(n-1), \quad 1 < n < k, \quad \gamma_n(L_k) = 0, \quad n \geq k,$$

$$c_n(L_k) = 1 + \sum_{i=2}^{k-1} i(i-1)C_n^i, \quad n \geq k-1, \quad c_n(L_k) \approx \frac{n^{k-1}}{(k-3)!}, \quad n \to \infty;$$

4) *для экспоненциальной производящей функции выполнено равенство*

$$\mathcal{C}^p(L_k, z) = \sum_{j=2}^{k-1} \frac{z^j}{(j-2)!}.$$

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что $\Gamma_n(L_k)$ является линейной оболочкой элементов вида (6). Предположим, что для некоторого $n$ данные элементы линейно зависимы в $\Gamma_n(L_k)$. В полученной нетривиальной линейной комбинации рассматриваемых элементов зафиксируем такое слагаемое, которое имеет ненулевой коэффициент. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{x_i, x_j, x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n\}, \quad 0 \neq \alpha \in K.$$

Во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$x_i \to (0, J, 0), \ x_j \to (e_{12}, 0, 0), \ x_1 \to (J, 0, 0), \ldots, \ x_n \to (J, 0, 0).$$

Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $-\alpha(0, e_{1,n+1}, 0)$. Понятно, что равенство $\alpha(0, e_{1,n+1}, 0) = (0, 0, 0)$ выполнено лишь в случае $\alpha = 0$. Противоречие. Таким образом, условия 1 и 2 доказаны.

Условия 3 и 4 следуют из условия 2. □

## References


[1] S. M. Ratseev, *Commutative Leibniz-Poisson algebras of polynomial growth*, Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser. [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], **94**:3/1 (2012), 54–65 (in Russian). MR3076492

[2] V. M. Petrogradsky, *Growth of polynilpotent varieties of Lie algebras and rapidly growing entire functions*, Mat. Sb., **188**:6 (1997), 119–138 (in Russian). English translation: Russian Acad. Sci. Sb. Math., **188**:6 (1997), 913–931.

[3] S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko, *On metabelian varieties of Leibniz–Poisson algebras*, IIGU Ser. Matematika [the bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], **6**:1 (2013), 72–77 (in Russian). Zbl 06269195

[4] S. M. Ratseev, *Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras*, Moscow University Mathematics Bulletin, **67** (2012), 195–199. MR3076492

[5] S. M. Ratseev, *On minimal Leibniz algebras with nilpotent commutator subalgebra*, Algebra i Analiz [Algebra and Analysis], bf 27:1 (2015), 178–193 (in Russian).

[6] S. M. Ratseev, *On varieties of Leibniz-Poisson algebras with the identity* $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$*/ S.M. Ratseev*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **6**:1 (2013), 97–104.

[7] A. Giambruno, D. La. Mattina, V.M. Petrogradsky, *Matrix algebras of polynomial codimention growth* Israel J. Math. **158** (2007), 367–378. MR2342471

Sergey M. Ratseev
Ulyanovsk State University,
Lev Tolstoy, 42,
432017, Ulyanovsk, Russia
*E-mail address*: ratseevsm@mail.ru

Olga I. Cherevatenko
Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University,
Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V.I. Lenina, 4,
432700, Ulyanovsk, Russia
*E-mail address*: chai@pisem.net