S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 562–576 (2015) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2015.12.046 MSC 35K55

НЕОДНОРОДНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Г.В. ГРЕНКИН, А.Ю. ЧЕБОТАРЕВ

Abstract. A nonhomogeneous nonstationary problem of radiative-conductive-convective heat tranfer in a three-dimensional domain is investigated in the framework of the diffusion P_1-approximation of the radiative heat transfer equation. The unique solvability of the problem is proved.

Keywords: radiative heat transfer, diffusion approximation, unique solvability

1. Введение. Постановка краевой задачи

Неоднородная эволюционная нормализованная диффузионная (P_1 приближение уравнения переноса излучения) модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеет следующий вид [1]:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, \tag{1}$$

$$\mu\partial\varphi/\partial t - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = g, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T). \tag{2}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, f, g — объемные плотности источников температуры и интенсивности излучения соответственно, $\mathbf{v}$ — заданное поле скоростей, κ_a — коэффициент поглощения. Постоянные a, b, и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_p}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

Grenkin, G.V., Chebotarev, A.Yu., A nonhomogeneous nonstationary complex heat tranfer problem.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00079.

Поступила 27 июля 2015 г., опубликована 18 сентября 2015 г.

где k — теплопроводность, c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана – Больцмана, n — показатель преломления, $T_{\max}$ — максимальная температура в ненормализованной модели, $\mu = 1/c$, где c — скорость света в среде, $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$ — коэффициент полного взаимодействия, κ_s — коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1, 1]$ описывает анизотропию рассеяния, случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию.

Будем предполагать, что функции θ, φ, описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе $\Gamma = \partial\Omega$:

$$a\partial\theta/\partial n + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial\varphi/\partial n + \gamma(\varphi - |\theta_b|\theta_b^3)|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

а также начальным условиям:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{4}$$

Функция $\theta_b = \theta_b(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \in (0,T)$, функции $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$, $x \in \Gamma$, описывающие, в частности, отражающие свойства границы, и начальные функции θ_0, φ_0 являются заданными.

Исследование задач сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами имеет прикладное значение. Работы [1, 2] посвящены исследованию разрешимости однородной краевой задачи (1)–(4) (случай $f = g = 0$) и устойчивости стационарных решений. Теоретический анализ сходных эволюционных моделей проводится в работах [3, 4]. В [4] рассмотрена неоднородная краевая задача для SP_3 приближения уравнения переноса излучения, при этом источники температуры и интенсивности излучения являются ограниченными, и авторы показывают, что решение ограничено. В настоящей работе условия на источники ослаблены, и ограниченность решения в доказательстве не используется.

Разрешимость стационарных задач для диффузионных моделей сложного теплообмена исследовалась в [5–11]. Вопросы численного моделирования рассмотрены, например, в [5, 12–14].

Основные результаты работы состоят в получении априорных оценок задачи (1)–(4) и доказательстве ее однозначной разрешимости.

2. Формализация задачи

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Через L^p, $1 \le p \le \infty$ обозначаем пространства Лебега, а через H^s – пространства Соболева W_2^s. Пространство $L^s(0,T;X)$ (соответственно $C([0,T];X)$) состоит из функций класса $L^s, s \ge 1$, определенных на $(0,T)$ (соответственно непрерывных на $[0,T]$), со значениями в банаховом пространстве X.

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H', так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_{V'}$ нормы в H, V и V', а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H$. Также определим пространство $W = \{y \in L^2(0,T;V)\colon y' \in L^2(0,T,V')\}$. Здесь и далее $y' = dy/dt$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия:

(i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$;

(ii) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \ge \beta_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \mathrm{Const}$, $\theta_b \in L^8(\Sigma)$;

(iii) $\beta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \ge 0$;
(iv) $f \in L^5(0,T;L^{15/11}(\Omega))$, $g \in L^2(0,T;V')$;
(v) $\theta_0 \in L^5(\Omega)$, $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$.

Введем функции $h_p(s) = |s|^p \operatorname{sign} s$, $p > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что $h_p'(s) = p|s|^{p-1}$.

Определим операторы и функционалы $A_{1,2}\colon V \to V'$, $f_{1,2} \in L^2(0,T;V')$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$
$$(f_1, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (f_2, v) = \int_\Gamma \gamma h_4(\theta_b) v d\Gamma \quad \text{п.в. на } (0,T).$$

Определение 1. *Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ называется слабым решением задачи (1)–(4), если*

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) = f + f_1, \tag{5}$$
$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta)) = g + f_2, \tag{6}$$
$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{7}$$

Отметим, что справедливо вложение $W \subset C([0,T];H)$ [15, с. 422], поэтому начальные условия имеют смысл.

3. Существование и единственность решения

Пусть $N > 0$. Обозначим

$$[u]_N = \begin{cases} u, & |u| < N, \\ N, & u \ge N, \\ -N, & u \le -N. \end{cases}$$

При $N = +\infty$ считаем $[u]_N = u$.

Для доказательства разрешимости задачи (5)–(7) рассмотрим вспомогательную задачу с параметром $N > 0$: найти пару $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ такую, что

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}) = f + f_1, \tag{8}$$
$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a([\varphi]_{N^4} - h_4([\theta]_N)) = g + f_2, \tag{9}$$
$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{10}$$

При $N = +\infty$ задача (8)–(10) переходит в задачу (5)–(7).

Докажем, что задача (8)–(10) имеет решение, и затем сделаем предельный переход при $N \to +\infty$.

Теорема 1. *Пусть $N > 0$. Существует решение задачи (8)–(10).*

Доказательство. Определим в пространстве $L^2(Q) \times L^2(Q)$, с нормой такой, что $\|\{u,w\}\|^2_{L^2(Q)\times L^2(Q)} = \|u\|^2_{L^2(Q)} + \|w\|^2_{L^2(Q)}$, оператор $S\colon B \to B$, где

$$B = \{\{u,w\} \in L^2(Q) \times L^2(Q)\colon \|\{u,w\}\|_{L^2(Q)\times L^2(Q)} \le R\}.$$

Число $R > 0$ будет выбрано позже. Пусть $\{u, w\} \in B$. Тогда $S(u,w) = \{\theta, \varphi\}$, где θ, φ — решение задачи

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(h_4([u]_N) - [w]_{N^4}) = f + f_1, \tag{11}$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a([w]_{N^4} - h_4([u]_N)) = g + f_2, \tag{12}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{13}$$

Линейная задача (11)–(13) однозначно разрешима (см., например, [15, с. 426]). Заметим, что любая неподвижная точка оператора S является решением задачи (8)–(10).

Получим оценки решения задачи (11)–(13). Положим

$$k_1 = \inf\left\{a\|\nabla v\|^2 + \int_\Gamma \left(\beta + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) v^2 d\Gamma \colon v \in V, \|v\|_V = 1\right\},$$

$$k_2 = \inf\left\{\alpha\|\nabla v\|^2 + \int_\Gamma \gamma v^2 d\Gamma \colon v \in V, \|v\|_V = 1\right\}.$$

Отметим, что $k_1, k_2 > 0$ [15, с. 238].

Умножим скалярно (11) и (12) на θ и φ соответственно и проинтегрируем по t. Получим

$$\int_0^T \left[a\|\nabla\theta\|^2 + \int_\Gamma \left(\beta + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)\theta^2 d\Gamma\right] dt$$
$$\le \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + \int_0^T [b\kappa_a([w]_{N^4} - h_4([u]_N), \theta) + (f + f_1, \theta)]\, dt$$
$$\le \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + \int_0^T \left[C_1 + \frac{k_1}{4}\|\theta\|^2 + C_2\|f + f_1\|_{V'}^2 + \frac{k_1}{4}\|\theta\|_V^2\right] dt,$$

поэтому

$$\|\theta\|_{L^2(0,T;V)} \le C_3.$$

Далее,

$$\int_0^T \left[\alpha\|\nabla\varphi\|^2 + \int_\Gamma \gamma\varphi^2 d\Gamma\right] dt$$
$$\frac{\mu}{2}\|\varphi_0\|^2 + \int_0^T [\kappa_a(h_4([u]_N) - [w]_{N^4}, \varphi) + (g + f_2, \varphi)]\, dt$$
$$\le \frac{\mu}{2}\|\varphi_0\|^2 + \int_0^T \left[C_4 + \frac{k_2}{4}\|\varphi\|^2 + C_5\|g + f_2\|_{V'}^2 + \frac{k_2}{4}\|\varphi\|_V^2\right] dt,$$

отсюда

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)} \le C_6.$$

Здесь и далее $C_i > 0$ — постоянные, не зависящие от θ, φ, u и w, зависящие от N.

Оценим производные по времени θ', φ':

$$\|\theta'\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} (\theta', v) \le \sup_{\|v\|_V=1} (C_7\|\theta\|_V\|v\|_V + \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\theta\|\|v\|_{L^4(\Omega)}$$
$$+2b\kappa_a N^4|\Omega|^{1/2}\|v\| + \|f + f_1\|_{V'}\|v\|_V)$$
$$\le C_7\|\theta\|_V + \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}\|\theta\|_V + 2b\kappa_a N^4|\Omega|^{1/2} + \|f + f_1\|_{V'}.$$

Отсюда $\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \le C_8$, и поэтому

$$\|\theta\|_W \le C_9.$$

Аналогично

$$\|\varphi\|_W \le C_{10}.$$

В силу компактности вложения $W \subset L^2(Q)$ [16, глава 1, теорема 5.1] оператор S компактен. Положим $R = \max\{C_9, C_{10}\}$.

Докажем непрерывность оператора S. Пусть $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\} \in B$, $\{\theta_i, \varphi_i\} = S(u_i, w_i)$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a((h_4([u_1]_N) - h_4([u_2]_N)) - ([w_1]_{N^4} - [w_2]_{N^4})) = 0, \tag{14}$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(([w_1]_{N^4} - [w_2]_{N^4}) - (h_4([u_1]_N) - h_4([u_2]_N))) = 0, \tag{15}$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что

$$|h_4([u_1]_N) - h_4([u_2]_N)| \le 4N^3|u_1 - u_2|, \quad |[w_1]_{N^4} - [w_2]_{N^4}| \le |w_1 - w_2|.$$

Умножим (14) на θ, (15) на φ, получим

$$\int_0^T k_1\|\theta\|_V^2 dt \le \int_0^T \left[C_{11}\|u_1 - u_2\|^2 + C_{12}\|w_1 - w_2\|^2 + \frac{k_1}{2}\|\theta\|^2\right] dt,$$

$$\|\theta\|^2_{L^2(Q)} \le C_{13}\left(\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(Q)} + \|w_1 - w_2\|^2_{L^2(Q)}\right),$$

$$\int_0^T k_2\|\varphi\|_V^2 dt \le \int_0^T \left[C_{14}\|w_1 - w_2\|^2 + C_{15}\|u_1 - u_2\|^2 + \frac{k_2}{2}\|\varphi\|^2\right] dt,$$

$$\|\varphi\|^2_{L^2(Q)} \le C_{16}\left(\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(Q)} + \|w_1 - w_2\|^2_{L^2(Q)}\right).$$

Таким образом, оператор S вполне непрерывен, и из принципа Шаудера [17, с. 401] вытекает существование неподвижной точки оператора S. $\square$

Для получения оценок решений задачи (8)–(10) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $y \in W$, $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $y_M = [y]_M$, $z = h_p(y_M)$, $p \ge 1$. Тогда $z \in L^2(0,T;V)$, $|y_M|^{p+1} \in C([0,T];H)$ и при этом*

$$\int_0^t (y'(\tau), z(\tau))d\tau \ge \frac{1}{p+1}\int_\Omega |y_M(t)|^{p+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |y_M(0)|^{p+1}dx$$
$$- \int_{y(0)>M} M^p(y(0) - M)dx + \int_{y(0)<-M} M^p(y(0) + M)dx, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Пространство $H^1(Q)$ плотно в W [15, с. 423]. Пусть $y_j \in H^1(Q)$, $y_j \to y$ в W. Определим функции $y_{Mj} = [y_j]_M$, $z_j = h_p(y_{Mj})$, $u_{1j} = \max\{y_j - M, 0\}$, $u_{2j} = \min\{y_j + M, 0\}$. Отметим, что [18, глава II, следствие A.5]

$$y'_{Mj} = \begin{cases} y'_j, & |y_j| \le M, \\ 0, & |y_j| \ge M, \end{cases} \quad u'_{1j} = \begin{cases} y'_j, & y_j \ge M, \\ 0, & y_j \le M, \end{cases} \quad u'_{2j} = \begin{cases} y'_j, & y_j \le -M, \\ 0, & y_j \ge -M. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^t (y_j'(\tau), z_j(\tau))d\tau =$$

$$\int_0^t \int\limits_{|y_j|<M} y_j' h_p(y_j) dx d\tau + \int_0^t \int\limits_{y_j \geq M} M^p y_j' dx d\tau - \int_0^t \int\limits_{y_j \leq -M} M^p y_j' dx d\tau$$

$$= \frac{1}{p+1} \int_\Omega \int_0^t \left(|y_{Mj}|^{p+1}\right)' d\tau dx + \int_\Omega \int_0^t M^p u_{1j}' d\tau dx - \int_\Omega \int_0^t M^p u_{2j}' d\tau dx$$

$$= \frac{1}{p+1} \int_\Omega \left(|y_{Mj}(t)|^{p+1} - |y_{Mj}(0)|^{p+1}\right) dx + \int_\Omega M^p \left(u_{1j}(t) - u_{1j}(0)\right) dx$$

$$- \int_\Omega M^p \left(u_{2j}(t) - u_{2j}(0)\right) dx \geq \frac{1}{p+1} \int_\Omega |y_{Mj}(t)|^{p+1} dx$$

$$- \frac{1}{p+1} \int_\Omega |y_{Mj}(0)|^{p+1} dx - \int_\Omega M^p u_{1j}(0) dx + \int_\Omega M^p u_{2j}(0) dx.$$

В силу непрерывности вложения $W \subset C([0,T];H)$ [15, с. 422] имеем $y_j \to y$ в $C([0,T];H)$. Отображения $y \mapsto [y]_M$, $y \mapsto \max\{y - M, 0\}$, $y \mapsto \min\{y + M, 0\}$ непрерывно отображают пространство $C([0,T];H)$ в себя, поэтому $y_{Mj} \to y_M$, $u_{1j} \to \max\{y - M, 0\}$, $u_{2j} \to \min\{y + M, 0\}$ в $C([0,T];H)$.

Заметим, что $z_j \to z$ в $L^2(0,T;H)$, так как

$$|z_j - z| = |h_p(y_{Mj}) - h_p(y_M)| \leq p M^{p-1} |y_{Mj} - y_M|,$$

$$\int_0^T \|z_j - z\|^2 dt \leq p^2 M^{2p-2} \int_0^T \|y_{Mj} - y_M\|^2 dt \to 0.$$

Последовательность z_j ограничена в $L^2(0,T;V)$, поскольку

$$\int_0^T \|\nabla z_j\|^2 dt = \int_0^T \int\limits_{|y_j|<M} \left(p|y_j|^{p-1}|\nabla y_j|\right)^2 dx dt \leq p^2 M^{2p-2} \int_0^T \|\nabla y_j\|^2 dt.$$

Аналогично доказывается, что $z \in L^2(0,T;V)$. Следовательно, $z_j \rightharpoonup z$ слабо в $L^2(0,T;V)$, поэтому $\int_0^T (y_j', z_j) dt \to \int_0^T (y', z) dt$.

Отметим, что в силу неравенства

$$\left| |[y_1]_M|^{p+1} - |[y_2]_M|^{p+1} \right| \leq (p+1) M^p |y_1 - y_2|$$

отображение $y \to |[y]_M|^{p+1}$ непрерывно отображает пространство $C([0,T];H)$ в себя, поэтому $|y_M|^{p+1} \in C([0,T];H)$, и след $|y_M|^{p+1}|_{t=t_0}$ имеет смысл. Также отсюда вытекает, что $|y_{Mj}(t)|^{p+1} \to |y_M(t)|^{p+1}$, $|y_{Mj}(0)|^{p+1} \to |y_M(0)|^{p+1}$ в H, поэтому

$$\int_\Omega |y_{Mj}(t)|^{p+1} dx \to \int_\Omega |y_M(t)|^{p+1} dx, \quad \int_\Omega |y_{Mj}(0)|^{p+1} dx \to \int_\Omega |y_M(0)|^{p+1} dx.$$

Аналогично

$$\int_\Omega u_{1j}(0) dx \to \int\limits_{y(0)>M} (y(0) - M) dx, \quad \int_\Omega u_{2j}(0) dx \to \int\limits_{y(0)<-M} (y(0) + M) dx.$$

В пределе при $j \to \infty$ получаем утверждение леммы. □

Теорема 2. *Пусть $N > 0$ либо $N = +\infty$. Для любого решения задачи (8)–(10) справедливы оценки:*

$$\|\theta\|_W + \|\varphi\|_W \le C, \quad \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} \le C, \tag{17}$$

$$\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)} \le C, \tag{18}$$

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^5(\Omega))} \le C. \tag{19}$$

Здесь $\eta = h_{5/2}(\theta)$. Постоянная $C > 0$ зависит только от Ω, T, a, α, b, κ_a, β, γ, θ_b, $\mathbf{v}$, μ, f, g, θ_0, φ_0 и не зависит от N.

Доказательство. Для любого $M > 0$ введем функции $\theta_M = [\theta]_M$, $\varphi_M = [\varphi]_{M^4}$. Умножим скалярно (8) и (9) на $h_4(\theta_M)$ и $b\varphi_M$ соответственно, проинтегрируем по t и сложим. Получим

$$\int_0^t \Big[(\theta', h_4(\theta_M)) + a(\nabla\theta, 4\theta_M^3\nabla\theta_M) + \int_\Gamma \beta\theta h_4(\theta_M)d\Gamma + (\mathbf{v}\cdot\nabla\theta, h_4(\theta_M))$$
$$+ b\mu(\varphi', \varphi_M) + b\alpha(\nabla\varphi, \nabla\varphi_M) + b\int_\Gamma \gamma\varphi\varphi_M d\Gamma$$
$$+ b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M)\Big] d\tau$$
$$= \int_0^t \Big((f, h_4(\theta_M)) + b(g, \varphi_M)\Big)d\tau + \int_\Gamma \beta\theta_b h_4(\theta_M)d\Gamma + b\int_\Gamma \gamma h_4(\theta_b)\varphi_M d\Gamma.$$

Заметим, что, поскольку функция $M \mapsto [\,\cdot\,]_M$ монотонна и $h_4([\theta]_N) = [h_4(\theta)]_{N^4}$, то

$$(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) \ge 0. \tag{20}$$

Введем функции $\eta = h_{5/2}(\theta)$, $\eta_M = h_{5/2}(\theta_M)$. Заметим, что $\nabla\eta_M = \dfrac{5}{2}\theta_M^{3/2}\nabla\theta_M$. Применим лемму 1:

$$\int_0^t (\theta', h_4(\theta_M))d\tau$$
$$\ge \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_M(t)|^5 dx - \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_M(0)|^5 dx - \int_{\theta_0 > M} M^4(\theta_0 - M)dx + \int_{\theta_0 < -M} M^4(\theta_0 + M)dx$$
$$\ge \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_M(t)|^5 dx - \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_0|^5 dx - \int_\Omega |\theta_0|^5 dx - \int_\Omega |\theta_0|^5 dx$$
$$= \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_M(t)|^5 dx - \frac{11}{5}\int_\Omega |\theta_0|^5 dx,$$

аналогично

$$\int_0^t (\varphi', \varphi_M)d\tau \ge -\frac{5}{2}\int_\Omega |\varphi_0|^2 dx.$$

Определим функцию $\eta_1 = F(\theta)$, где

$$F(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}|s|^5, & |s| < M, \\ M^4|s| - \dfrac{4}{5}M^5, & |s| \ge M, \end{cases}$$

и заметим, что $\nabla\eta_1 = h_4(\theta_M)\nabla\theta$. Отметим, что $\eta_1|_\Gamma = F(\theta)|_\Gamma = F(\theta|_\Gamma)$ [19, предложение 1]. Следовательно,

$$\int_\Omega (\mathbf{v}\cdot\nabla\theta)h_4(\theta_M)dx = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\eta_1 dx = \int_\Gamma (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\eta_1 d\Gamma$$
$$= \frac{1}{5}\int\limits_{|\theta|<M} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})|\theta|^5 d\Gamma + \int\limits_{|\theta|\ge M} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left(M^4|\theta| - \frac{4}{5}M^5\right)d\Gamma.$$

Оценим граничные интегралы:

$$\int_\Gamma \beta\theta h_4(\theta_M)d\Gamma = \int\limits_{|\theta|<M} \beta|\theta|^5 d\Gamma + \int\limits_{|\theta|\ge M} \beta M^4|\theta|d\Gamma, \quad \int_\Gamma \gamma\varphi\varphi_M d\Gamma \ge \int_\Gamma \gamma\varphi_M^2 d\Gamma.$$

Отсюда

$$\int_\Omega (\mathbf{v}\cdot\nabla\theta)h_4(\theta_M)dx + \int_\Gamma \beta\theta h_4(\theta_M)d\Gamma = \int\limits_{|\theta|<M} \left(\beta + \frac{1}{5}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)|\theta|^5 d\Gamma$$
$$+ \int\limits_{|\theta|\ge M} \left[\beta M^4|\theta| + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left(M^4|\theta| - \frac{4}{5}M^5\right)\right]d\Gamma.$$

Оценим первое слагаемое в правой части:

$$\int\limits_{|\theta|<M} \left(\beta + \frac{1}{5}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)|\theta|^5 d\Gamma \ge \frac{4}{5}\int\limits_{|\theta|<M} \beta|\theta|^5 d\Gamma = \frac{4}{5}\int\limits_{|\theta|<M} \beta\eta_M^2 d\Gamma.$$

Оценим второе слагаемое. При $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \ge 0$ имеем $\Big[\ldots\Big] \ge \beta M^4|\theta| \ge \beta\eta_M^2$. При $-\beta/2 \le \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \le 0$:

$$\Big[\ldots\Big] \ge (\beta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})M^4|\theta| \ge \frac{1}{2}\beta M^4|\theta| \ge \frac{1}{2}\beta\eta_M^2.$$

При $-\beta \le \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \le -\beta/2$:

$$\Big[\ldots\Big] \ge -\frac{4}{5}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})M^5 \ge \frac{2}{5}\beta M^5 = \frac{2}{5}\beta\eta_M^2.$$

Поэтому

$$\int_\Omega (\mathbf{v}\cdot\nabla\theta)h_4(\theta_M)dx + \int_\Gamma \beta\theta h_4(\theta_M)d\Gamma \ge \frac{2}{5}\int_\Gamma \beta\eta_M^2 d\Gamma.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_M(t)|^5 dx + \int_0^t \left[\frac{16}{25}a\|\nabla\eta_M\|^2 + \frac{2}{5}\int_\Gamma \beta\eta_M^2 d\Gamma + b\alpha\|\nabla\varphi_M\|^2 + b\int_\Gamma \gamma\varphi_M^2 d\Gamma\right.$$
$$\left. + b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M)\right]d\tau \le \frac{11}{5}\int_\Omega |\theta_0|^5 dx + \frac{5b\mu}{2}\int_\Omega |\varphi_0|^2 dx$$
$$+ \int_0^t \left[(f, h_4(\theta_M)) + b(g, \varphi_M) + \int_\Gamma \beta\theta_b h_4(\theta_M)d\Gamma + b\int_\Gamma \gamma h_4(\theta_b)\varphi_M d\Gamma\right]d\tau.$$

С помощью неравенства Гёльдера, теоремы вложения и неравенства Юнга получаем оценки:

$$(f, h_4(\theta_M)) \le \int_\Omega |f|\theta_M^4 dx \le \|f\|_{L^{15/11}(\Omega)} \left(\int_\Omega |\theta_M|^{15} dx\right)^{4/15}$$

$$= \|f\|_{L^{15/11}(\Omega)} \left(\int_\Omega \eta_M^6 dx\right)^{4/15}$$

$$\le \delta_1 \left(\int_\Omega \eta_M^6 dx\right)^{1/3} + C_\delta \|f\|^5_{L^{15/11}(\Omega)} \le \delta \|\eta_M\|_V^2 + C_\delta \|f\|^5_{L^{15/11}(\Omega)},$$

$$(g, \varphi_M) \le \|g\|_{V'} \|\varphi_M\|_V \le \delta \|\varphi_M\|_V^2 + C_\delta \|g\|^2_{V'}.$$

Здесь $\delta > 0$ — любое число, $C_\delta > 0$ — постоянная, не зависящая от M и N.

Также оценим граничные интегралы:

$$\int_\Gamma \beta\theta_b h_4(\theta_M) d\Gamma \le \int_\Gamma \beta|\theta_b||\eta_M|^{8/5} \le \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta_b\|_{L^5(\Gamma)} \left(\int_\Gamma \eta_M^2 d\Gamma\right)^{4/5}$$

$$\le \delta \int_\Gamma \eta_M^2 d\Gamma + C_\delta \|\theta_b\|^5_{L^5(\Gamma)},$$

$$\int_\Gamma \gamma h_4(\theta_b)\varphi_M d\Gamma \le \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta_b\|^4_{L^8(\Gamma)} \|\varphi_M\|_{L^2(\Gamma)} \le \delta \int_\Gamma \varphi_M^2 d\Gamma + C_\delta \|\theta_b\|^8_{L^8(\Gamma)}.$$

Выбрав достаточное малое $\delta > 0$, получим

$$\frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_M(t)|^5 dx + \int_0^T \Big[C_1 \|\eta_M\|_V^2 + C_2 \|\varphi_M\|_V^2$$

$$+ b\kappa_a (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M)\Big] d\tau$$

$$\le \frac{11}{5}\int_\Omega |\theta_0|^5 dx + \frac{5b\mu}{2}\int_\Omega |\varphi_0|^2 dx C_3 \|f\|^5_{L^5(0,T;L^{15/11}(\Omega))} + C_4 \|g\|^2_{L^2(0,T;V')}$$

$$+ C_5 \|\theta_b\|^5_{L^5(\Sigma)} + C_6 \|\theta_b\|^8_{L^8(\Sigma)}.$$

Здесь $C_i > 0$ — постоянные, не зависящие от M и N.

Отсюда вытекает, что

$$\int_0^T \|\eta_M\|_V^2 dt + \int_0^T \|\varphi_M\|_V^2 dt \le C, \tag{21}$$

$$\int_\Omega |\theta_M(t)|^5 dx \le C, \quad t \in [0, T], \tag{22}$$

$$\int_0^T (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \le C, \tag{23}$$

где $C > 0$ не зависит от M, N, t.

Сначала докажем, что $\eta \in L^2(Q)$. Из (21) получаем $\|\eta_M\|_{L^2(Q)} \le C$. Заметим, что

$$\eta_M - \eta = \begin{cases} 0, & \eta < M, \\ M - \eta, & \eta \ge M, \end{cases}$$

поэтому $\eta_M \to \eta$ п.в. в Q, при этом последовательность η_M^2 не убывает по M п.в. в Q. По теореме Леви [17, с. 86] получаем $\|\eta\|_{L^2(Q)} \le C$ и

$$\int_0^T \int_\Omega \eta_M^2 dxdt \to \int_0^T \int_\Omega \eta^2 dxdt. \tag{24}$$

Докажем, что $\eta \in L^2(0,T;V)$, причем $\nabla\eta = \frac{5}{2}|\theta|^{3/2}\nabla\theta$. Введем функции

$$u_M = \frac{\partial \eta_M}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{5}{2}|\theta|^{3/2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}, & \theta < M, \\ 0, & \theta \ge M, \end{cases} \qquad u = \frac{5}{2}|\theta|^{3/2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}.$$

Требуется доказать, что $\frac{\partial\eta}{\partial x_i} = u$ и $u \in L^2(Q)$.

По определению обобщенной производной

$$-\int_0^T \int_\Omega \eta_M \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt = \int_0^T \int_\Omega u_M v dxdt \quad \forall v \in \mathcal{D}(Q). \tag{25}$$

Сделаем в (25) предельный переход при $M \to +\infty$.

Как показано выше, $\eta_M \to \eta$ п.в. в Q. Кроме того, $|\eta_M - \eta|^2 \le \eta^2 \in L^1(Q)$. Следовательно, по теореме Лебега [17, с. 87] получаем $\eta_M \to \eta$ в $L^2(Q)$.

Заметим, что

$$u_M - u = \begin{cases} 0, & \theta < M, \\ -\frac{5}{2}|\theta|^{3/2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}, & \theta \ge M, \end{cases}$$

поэтому $u_M \to u$ п.в. в Q. Последовательность u_M^2 не убывает по M п.в. в Q, при этом в силу (21)

$$\int_0^T \int_\Omega u_M^2 dxdt = \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \eta_M}{\partial x_i}\right)^2 dxdt \le C.$$

По теореме Леви [17, с. 86] получаем $u \in L^2(Q)$, причем

$$\int_0^T \int_\Omega u_M^2 dxdt \to \int_0^T \int_\Omega u^2 dxdt. \tag{26}$$

Заметим, что $(u_M - u)^2 \le u^2 \in L^1(Q)$. Следовательно, по теореме Лебега [17, с. 87] получаем $u_M \to u$ в $L^2(Q)$.

Переходя в (25) к пределу при $M \to +\infty$, получаем

$$-\int_0^T \int_\Omega \eta \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt = \int_0^T \int_\Omega u v dxdt \quad \forall v \in \mathcal{D}(Q),$$

то есть $\frac{\partial\eta}{\partial x_i} = u$.

Из (21), (24), (26) вытекает

$$\int_0^T \|\eta\|_V^2 dt \le C.$$

Аналогично

$$\int_0^T \|\varphi\|_V^2 dt \le C.$$

Далее оценим $\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)}$. Рассмотрим случай $N < +\infty$. Считая $M > N$, получим из (23) неравенство

$$\int_0^T \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|^2 dt \leq \int_0^T (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \leq C$$

в силу (20) и неравенства

$$|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}| \leq |h_4(\theta_M) - \varphi_M|.$$

Тогда

$$\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)} \leq \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|_{L^2(Q)} + \|[\varphi]_{N^4}\|_{L^2(Q)} \leq C_7.$$

Теперь рассмотрим случай $N = +\infty$. В этом случае (23) принимает вид

$$\int_0^T (h_4(\theta) - \varphi, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \leq C.$$

Заметим, что $h_4(\theta_M) - \varphi_M \to h_4(\theta) - \varphi$ п.в. в Q. Так как последовательность $|h_4(\theta_M) - \varphi_M|$ не убывает по M п.в. в Q, то с учетом (20) получим, что функция $M \mapsto (h_4(\theta) - \varphi)(h_4(\theta_M) - \varphi_M)$ не убывает п.в. в Q. Следовательно, по теореме Леви [17, с. 86]

$$\int_0^T (h_4(\theta) - \varphi, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \to \int_0^T \|h_4(\theta) - \varphi\|^2 dt \leq C.$$

Отсюда

$$\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)} = \|h_4(\theta)\|_{L^2(Q)} \leq \|h_4(\theta) - \varphi\|_{L^2(Q)} + \|\varphi\|_{L^2(Q)} \leq C_8.$$

Чтобы оценить $\|\theta\|_{L^2(0,T;V)}$, умножим скалярно уравнение (8) на θ и проинтегрируем по t. Получим

$$\int_0^T \left[a\|\nabla\theta\|^2 + \int_\Gamma \left(\beta + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)\theta^2 d\Gamma + b\kappa_a (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, \theta) \right] dt$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + \int_0^T \left[(f, \theta) + \int_\Gamma \beta\theta_b\theta d\Gamma \right] dt,$$

отсюда

$$k_1 \int_0^T \|\theta\|_V^2 dt \leq b\kappa_a \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|_{L^2(Q)} \|\theta\|_{L^2(Q)}$$
$$+ \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\|\theta\|_{L^2(0,T;V)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|\theta_b\|_{L^2(\Sigma)}\|\theta\|_{L^2(\Sigma)}$$
$$\leq \delta\|\theta\|^2_{L^2(0,T;V)} + C_9\|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|^2$$
$$+ \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + C_{10}\|f\|^2_{L^2(0,T;V')} + C_{11}\|\theta_b\|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

Поэтому

$$\|\theta\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_{12}.$$

Оценим производные θ', φ':

$$\|\theta'(t)\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1}(\theta'(t), v) \le a\|\nabla\theta(t)\|\|v\|_V + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|\theta(t)\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)}$$
$$+\|\mathbf{v}(t)\|_{L^4(\Omega)}\|\theta(t)\|_{L^4(\Omega)}\|v\| + b\kappa_a\|h_4([\theta(t)]_N) - [\varphi(t)]_{N^4}\|\|v\|$$
$$+\|f(t)\|_{V'}\|v\|_V + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|\theta_b(t)\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} \le$$
$$\le a\|\theta(t)\|_V + C_{13}\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|\theta(t)\|_V + C_{14}\|\mathbf{v}(t)\|_{H^1(\Omega)}\|\theta(t)\|_V$$
$$+b\kappa_a\|h_4([\theta(t)]_N) - [\varphi(t)]_{N^4}\| + \|f(t)\|_{V'} + C_{15}\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|\theta_b(t)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Отсюда

$$\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \le C_{16}.$$

Аналогично

$$\|\varphi'\|_{L^2(0,T;V')} \le C_{17}.$$

Наконец, оценим интеграл $\int_\Omega |\theta(t)|^5 dx$, $t \in [0,T]$. Обозначим через $\psi = \psi(x)$, $x \in \Omega$, след функции θ в момент времени t, $\psi = \theta(t)$. Заметим, что $\psi_M = [\psi]_M = [\theta(t)]_M = [\theta]_M(t) = \theta_M(t)$. Из (22) следует, что

$$\int_\Omega |\psi_M|^5 dx \le C.$$

Заметим, что $\psi_M \to \psi$ п.в. в Ω, причем последовательность $|\psi_M|^5$ не убывает по M п.в. в Ω. Следовательно, по теореме Леви [17, с. 86] получаем

$$\int_\Omega |\theta(t)|^5 dx = \int_\Omega |\psi|^5 dx \le C.$$

□

Теорема 3. *Существует решение задачи (5)–(7).*

Доказательство. Перейдем в (8)–(10) к пределу при $N \to +\infty$. Обозначим решение задачи (8)–(10) через θ_N, φ_N. Из (17) следует, что последовательности θ_N, φ_N ограничены в W, поэтому найдутся подпоследовательности $\theta_N \rightharpoonup \theta_*$, $\varphi_N \rightharpoonup \varphi_*$ слабо в W, а в силу компактности вложения $W \subset L^2(Q)$ [16, глава 1, теорема 5.1] получаем $\theta_N \to \theta_*$, $\varphi_N \to \varphi_*$ сильно в $L^2(Q)$.

Докажем, что $[\theta_N]_N \to \theta_*$ сильно в $L^2(Q)$. Справедливо неравенство:

$$\|[\theta_N]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)} \le \|[\theta_N]_N - [\theta_*]_N\|_{L^2(Q)} + \|[\theta_*]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)}.$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\|[\theta_N]_N - [\theta_*]_N\|_{L^2(Q)} \le \|\theta_N - \theta_*\|_{L^2(Q)} \to 0.$$

Для второго слагаемого:

$$\|[\theta_*]_N - \theta_*\|^2_{L^2(Q)} = \int_0^T \int_{\theta_*>N} (\theta_* - N)^2 dxdt + \int_0^T \int_{\theta_*<-N} (\theta_* + N)^2 dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega u_{1N}^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega u_{2N}^2 dxdt,$$

где $u_{1N} = \max\{\theta_* - N, 0\}$, $u_{2N} = \min\{\theta_* + N, 0\}$. Заметим, что $u_{iN} \to 0$ п.в. в Q при $N \to +\infty$ $(i = 1, 2)$, при этом $u_{iN}^2 \le \theta_*^2 \in L^1(Q)$. Следовательно, по теореме Лебега [17, с. 87] получаем

$$\int_0^T \int_\Omega u_{iN}^2 dxdt \to 0.$$

Аналогично доказывается, что $[\varphi_N]_{N^4} \to \varphi_*$ сильно в $L^2(Q)$.

Теперь докажем, что $h_4([\theta_N]_N) \rightharpoonup h_4(\theta_*)$ слабо в $L^2(Q)$. Заметим, что в силу (18) последовательность $h_4([\theta_N]_N)$ ограничена в $L^2(Q)$, поэтому последовательность $[\theta_N]_N$ ограничена в $L^8(Q)$. Отсюда подпоследовательность $[\theta_N]_N \rightharpoonup \eta$ слабо в $L^8(Q)$. Поскольку $[\theta_N]_N \to \theta_*$ в $L^2(Q)$, то $\eta = \theta_* \in L^8(Q)$. Докажем, что

$$\int_0^T \int_\Omega (h_4([\theta_N]_N) - h_4(\theta_*))v\,dxdt \to 0 \quad \forall v \in C(\overline{Q}). \tag{27}$$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|h_4(a) - h_4(b)| \le 4|a-b|(|a|^3 + |b|^3).$$

Действительно, при $a \ge 0, b \le 0$

$$|h_4(a) - h_4(b)| = a^4 + b^4 \le (a-b)^4 = |a-b|(|a|+|b|)^3 \le 4|a-b|(|a|^3+|b|^3),$$

а если числа a и b одного знака, то

$$|h_4(a) - h_4(b)| \le |a-b|(|a|+|b|)(a^2+b^2) \le 2|a-b|(|a|^3+|b|^3).$$

Тогда

$$\left|\int_0^T \int_\Omega (h_4([\theta_N]_N) - h_4(\theta_*))v\,dxdt\right|$$
$$\le 4\int_0^T \int_\Omega \big|[\theta_N]_N - \theta_*\big| \left(\big|[\theta_N]_N\big|^3 + |\theta_*|^3\right)|v|\,dxdt$$
$$\le 4\|v\|_{L^\infty(Q)} \|[\theta_N]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)} \left(\|[\theta_N]_N\|^3_{L^6(Q)} + \|\theta_*\|^3_{L^6(Q)}\right) \to 0.$$

Здесь мы использовали, что последовательность $[\theta_N]_N$ ограничена в $L^8(Q)$, откуда следует, что выражение в скобках ограничено.

Учитывая (27) и пользуясь тем, что $C(\overline{Q})$ плотно в $L^2(Q)$ и последовательность $h_4([\theta_N]_N)$ ограничена в $L^2(Q)$, получаем, что $h_4([\theta_N]_N) \rightharpoonup h_4(\theta_*)$ слабо в $L^2(Q)$.

Переходя в (8)–(10) к пределу при $N \to +\infty$, получаем, что θ_*, φ_* — решение задачи (5)–(7). □

Теорема 4. *Решение задачи (5)–(7) единственно.*

Доказательство. Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}$, $\{\theta_2, \varphi_2\}$ — два решения задачи (5)–(7). Положим $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a((h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)) - \varphi) = 0, \tag{28}$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2))) = 0, \tag{29}$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \tag{30}$$

Умножим скалярно (28) на θ, (29) на φ, проинтегрируем по t и сложим. Получим

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \int_0^t \Bigg[a\|\nabla\theta\|^2 + \int_\Gamma \left(\beta + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)\theta^2 d\Gamma$$

$$+\alpha\|\nabla\varphi\|^2 + \int_\Gamma \gamma\varphi^2 d\Gamma +$$

$$+b\kappa_a((h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)) - \varphi, \theta) + \kappa_a(\varphi - (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)), \varphi)\Bigg]d\tau = 0.$$

Заметим, что $(h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2), \theta) \geq 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\varphi(t)\|^2 + k_1\int_0^t \|\theta\|_V^2 + k_2\int_0^t \|\varphi\|_V^2$$

$$\leq \int_0^t \left[C_1\|\varphi\|^2 + C_2\|\theta\|^2 + \kappa_a(h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2), \varphi)\right]d\tau. \tag{31}$$

Оценим третье слагаемое в правой части:

$$\left|\int_0^t\int_\Omega (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2))\varphi\, dxd\tau\right| \leq 4\int_0^t\int_\Omega |\theta|\left(|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3\right)|\varphi|\, dxd\tau$$

$$\leq 4\int_0^t \|\theta\|_{L^5(\Omega)}\|\varphi\|_{L^5(\Omega)}\left(\|\theta_1\|^3_{L^5(\Omega)} + \|\theta_2\|^3_{L^5(\Omega)}\right)d\tau.$$

Воспользуемся леммой о компактности [16, глава 1, лемма 5.1]: для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $C_\varepsilon > 0$, не зависящая от θ, такая, что

$$\|\theta\|_{L^5(\Omega)} \leq \varepsilon\|\theta\|_V + C_\varepsilon\|\theta\|.$$

Учитывая (19), получим

$$\left|\int_0^t\int_\Omega (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2))\varphi\, dxd\tau\right| \leq \varepsilon\int_0^t \|\varphi\|_V\|\theta\|_V d\tau + C_3\int_0^t \|\varphi\|_V\|\theta\| d\tau$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t (\|\varphi\|_V^2 + \|\theta\|_V^2)d\tau + \varepsilon\int_0^t \|\varphi\|_V^2 d\tau + C_4\int_0^t \|\theta\|^2 d\tau.$$

Таким образом, из (31) получаем

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \leq C_5\int_0^t (\|\theta(\tau)\|^2 + \|\varphi(\tau)\|^2)d\tau.$$

По лемме Гронуолла $\theta = \varphi = 0$, то есть $\theta_1 = \theta_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$. □

References

[1] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *A nonstationary problem of complex heat transfer*, Comput. Math. Math. Phys., **54**:11 (2014), 1737–1747. MR3277828

[2] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *The stability of steady-state solutions of the diffusion complex heat transfer model*, Far Eastern Mathematical Journal, **14**:1 (2014), 18–32. (In Russian.)

[3] R. Pinnau, *Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by the SP_1-system*, Commun. Math. Sci., **5**:4 (2007), 951–969. MR2375055

[4] O. Tse, R. Pinnau, *Optimal control of a simplified natural convection-radiation model*, Commun. Math. Sci., **11**:3 (2013), 679–707. MR3061138

[5] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, *An iterative method for solving a complex heat transfer problem*, Appl. Math. Comput., **219**:17 (2013), 9356–9362. MR3047832

[6] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, *Steady-state problem of complex heat transfer*, Comput. Math. Math. Phys, **54**:4 (2014), 719–726. MR3200040

[7] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, *Stationary free convection problem with radiative heat exchange*, Differ. Equ., **50**:12 (2014), 1592–1599. Zbl 1316.35241

[8] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer*, J. Math. Anal. Appl., **412**:1 (2014), 520–528. MR3145819

[9] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem*, J. Math. Anal. Appl., **409**:2 (2014), 808–815. MR3103198

[10] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Solvability of* P_1 *approximation of a conductive-radiative heat transfer problem*, Appl. Math. Comput., **249** (2014), 247–252. MR3279418

[11] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **20**:3 (2015), 776–784. MR3255631

[12] R. Backofen, T. Bilz, A. Ribalta, A. Voigt, SP_N*-approximations of internal radiation in crystal growth of optical materials*, J. Cryst. Growth, **266**:1–3 (2004), 264–270.

[13] A. Klar, J. Lang, M. Seaïd, *Adaptive solution of* SP_N*-approximations to radiative heat transfer in glass*, Int. J. Therm. Sci., **44**:11 (2005), 1013–1023.

[14] A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method*, Int. J. Heat Mass Tran., **55**:4 (2012), 649–654. Zbl 1262.80032

[15] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators*, Springer, New York, 1990. MR1033497

[16] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969. MR0259693

[17] V.A. Trenogin, *Functional analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2002. (In Russian.)

[18] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980. MR0567696

[19] H. Berninger, *Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII, Springer, 2009, 169–176. MR2743970

Gleb Vladimirovich Grenkin
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
ul. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
E-mail address: glebgrenkin@gmail.com

Alexander Yurievich Chebotarev
Far Eastern Federal University,
ul. Sukhanova, 8,
690950, Vladivostok, Russia
E-mail address: cheb@iam.dvo.ru