

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 12, стр. 610–624 (2015)

УДК 517.929

DOI 10.17377/semi.2015.12.049

MSC 34K20

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ  
ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ  
ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ

А.С. БАЛАНДИН, Т.Л. САБАТУЛИНА

ABSTRACT. We study the local stability of an integro-differential system with aftereffect, which is a model of dynamics of a population in conditions of deleterious effects.

**Keywords:** system of linear functional differential equations, exponential stability, uniform stability, aftereffect, population dynamics.

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была предложена математическая модель, описывающая динамику изолированной популяции, подверженную постоянному воздействию вредных веществ. В своём исследовании автор статьи [1] использовал идеи, положенные в основу модели Лотки–Вольтерра, и подход, изложенный в [2]. В результате была построена модель, которую можно записать в виде системы неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. От классической системы Лотки–Вольтерра она отличается наличием дополнительных нелинейных слагаемых, существенно влияющих на поведение решений.

В работе [3] указанная модель модифицирована: учтено воздействие вредных веществ в предыдущие моменты времени на скорость изменения численности популяции в текущий момент времени. С математической точки зрения это привело к появлению в уравнении интегрального слагаемого, посредством

---

BALANDIN, A.S., SABATULINA, T.L., THE LOCAL STABILITY OF A POPULATION DYNAMICS MODEL IN CONDITIONS OF DELETERIOUS EFFECTS.

© 2015 Баландин А.С., Сабатулина Т.Л.

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (задание №2014/152, проект №1890) и при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 13-01-96050 р урал а).

Поступила 31 июля 2015 г., опубликована 22 сентября 2015 г.

которого и учитывается эффект "последствия". Модель, предложенная в работе [3], описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = \beta z_1(t) - \gamma z_1^2(t) - \frac{\sigma}{\omega} z_1(t) \int_{-\omega}^0 \theta(z_2(t+s)) ds, & t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \\ \dot{z}_2(t) = \rho - \theta(z_2(t)) z_1(t) - \delta z_2(t), \end{cases}$$

$$(2) \quad z_1(0) = z_1^0 > 0, \quad z_2(\xi) = z_2^0(\xi) \geq 0 \text{ при } \xi \in [-\omega, 0].$$

Здесь  $t$  — время,  $z_1(t)$  — количество индивидуумов в популяции в момент времени  $t$ ,  $z_2(t)$  — количество вредных веществ в момент времени  $t$ . Скорость появления индивидуумов равна  $\beta z_1(t)$ ,  $\beta = \text{const} > 0$ . Количество индивидуумов, погибающих вследствие самолимитирования за малый промежуток времени  $(t, t+dt)$ , не зависит от их возраста и равно  $\gamma z_1^2(t)dt$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$ . Вредное вещество оказывает непосредственное воздействие на индивидуумов независимо от их возраста. Количество актов поглощения вредного вещества за малый промежуток времени  $(t, t+dt)$  равно  $\frac{\sigma}{\omega} z_1(t) \int_{-\omega}^0 \theta(z_2(t+s)) ds dt$ , где  $\sigma = \text{const} > 0$ , функция  $\theta$  неотрицательна и непрерывно дифференцируема,  $\theta(0) = 0$ . Запоздывание  $\omega$  положительно и конечно. Постоянная  $\rho = \text{const} > 0$  — скорость притока вредных веществ. Постоянная  $\delta z_2(t)$  — скорость распада вредных веществ,  $\delta = \text{const} > 0$ . Слагаемое  $-\theta(z_2(t))z_1(t)$  отвечает за поглощение вредных веществ индивидуумами. В начальных условиях (2) число  $z_1^0$  — количество индивидуумов в начальный момент времени, функция  $z_2^0: [-\omega, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$  — первоначальное количество вредных веществ, функция  $z_2^0$  непрерывна на отрезке  $[-\omega, 0]$ .

Одной из важнейших задач, связанных с исследованием моделей, является задача изучения асимптотического поведения их решений. В работе [3] для исследования устойчивости системы (1) предлагается алгоритм, основанный на методе монотонных операторов и свойствах невырожденных  $M$ -матриц (см. [4]). Этот алгоритм эффективно работает, если явно указан вид функции  $\theta$  и конкретные числовые параметры, но не даёт представления об области устойчивости системы (1) в целом.

Целью настоящей работы является аналитическое описание области локальной асимптотической устойчивости положений равновесия системы (1). Схема исследования традиционна: заменяя исходную систему ее линейным приближением и используя автономность системы, сводим вопрос к исследованию расположения на комплексной плоскости нулей характеристической функции. В общем виде эта задача очень сложна, но поскольку число параметров системы (1) невелико, можно рассчитывать получить критерий устойчивости в терминах параметров исходной задачи и дать ему геометрическую интерпретацию.

## 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ И ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ

Поскольку система (1) является нелинейной, сначала убедимся, что решение задачи (1)–(2) действительно существует, единственно и неотрицательно на всей положительной полуоси.

Пусть  $X$  — пространство непрерывных на отрезке  $[0, T]$  ( $T$  — любое положительное наперёд заданное число) вектор-функций  $z = \{z_1, z_2\}$ , для которых

при каждом  $t \in [0, T]$  выполняются неравенства  $z_1(t) \geq 0$ ,  $0 \leq z_2(t) \leq C_0 = \max\{z_2^0(0), \frac{\rho}{\delta}\}$ .

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

- а) в пространстве  $X$  задача (1)–(2) однозначно разрешима;
- б) задача (1)–(2) не имеет решений вне пространства  $X$ .

*Доказательство.* Пусть  $z = \{z_1, z_2\} \in X$ . Поскольку функция  $z_2$  ограничена, то функция  $\theta$  определена только на конечном отрезке  $[0, C_0]$ . Так как функция  $\theta$  непрерывно дифференцируема на этом отрезке, то  $\theta$  и  $\theta'$  достигают наибольших и наименьших значений на  $[0, C_0]$ . Обозначим  $\theta_0 = \max_{z_2 \in [0, C_0]} |\theta'(z_2)|$ .

Определим в пространстве  $X$  оператор  $A$  по следующему правилу:  $Az(t) = \{A_1z(t), A_2z(t)\}$ , где

$$\begin{aligned} (A_1z)(t) &= z_1^0 e^{\beta t - \gamma} \int_0^t z_1(s) ds - \frac{\sigma}{\omega} \int_0^t \int_{-\omega}^0 \theta(z_2(\tau+s)) ds d\tau, \\ (A_2z)(t) &= z_2^0(0) e^{-\delta t - \theta_0} \int_0^t z_1(s) ds \\ &+ \int_0^t e^{-\delta(t-s) - \theta_0} \int_s^t z_1(\tau) d\tau (\rho + (\theta_0 z_2(s) - \theta(z_2(s)))) z_1(s) ds. \end{aligned}$$

Тогда задача (1)–(2) эквивалентна уравнению:

$$(3) \quad z = Az.$$

Покажем, что оператор  $A$  действует из пространства  $X$  в  $X$ . В силу условий (2) выполняется  $(A_1z)(t) > 0$ . Принимая во внимание свойства функции  $\theta$  и теорему Лагранжа, получаем  $\theta(z_2) = \theta(z_2) - \theta(0) = \theta'(\zeta)z_2 \leq \theta_0 z_2$ ,  $\zeta \in (0, C_0)$ . Следовательно,  $(A_2z)(t) > 0$ . Далее,

$$\begin{aligned} (A_2z)(t) &\leq z_2^0(0) e^{-\delta t - \theta_0} \int_0^t z_1(s) ds + \rho \int_0^t e^{-\delta(t-s) - \theta_0} \int_s^t z_1(\tau) d\tau ds \\ &+ C_0 \int_0^t e^{-\delta(t-s)} d_s \left( e^{-\theta_0} \int_s^t z_1(\tau) d\tau \right) = z_2^0(0) e^{-\delta t - \theta_0} \int_0^t z_1(s) ds \\ &+ C_0 \left( 1 - e^{-\delta t - \theta_0} \int_0^t z_1(s) ds \right) + (\rho - C_0 \delta) \int_0^t e^{-\delta(t-s) - \theta_0} \int_s^t z_1(\tau) d\tau ds \leq C_0. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное  $L > 0$  и введём в пространстве  $X$  метрику:  $d_L(z, u) = \max_{t \in [0, T]} (e^{-Lt} (|z_1(t) - u_1(t)| + |z_2(t) - u_2(t)|))$ . Нетрудно убедиться, что пространство  $(X, d_L)$  полно.

Для любых  $z = \{z_1, z_2\} \in X$  и  $u = \{u_1, u_2\} \in X$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} d_L(Az, Au) &= \max_{t \in [0, T]} (e^{-Lt} (|(A_1z)(t) - (A_1u)(t)| + e^{-Lt} |(A_2z)(t) - (A_2u)(t)|)) \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (e^{-Lt} (|(A_1z)(t) - (A_1u)(t)| + |(A_2z)(t) - (A_2v)(t)| \\ &\quad + |(A_2v)(t) - (A_2u)(t)|)), \end{aligned}$$

где  $v = \{u_1, z_2\}$ .

Так как функция  $z_1$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , то существует

$$C_1 = \max_{t \in [0, T]} z_1(t).$$

Далее, опираясь на свойства функции  $\theta$  и определение пространства  $X$ , получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 e^{-Lt} |(A_1 z)(t) - (A_1 u)(t)| &\leq z_1^0 e^{\beta t} \left( \gamma \int_0^t e^{-L(t-s)} e^{-Ls} |z_1(s) - u_1(s)| ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sigma}{\omega} \theta_0 \int_0^t \int_{-\omega}^0 e^{-L(t-\tau-s)} e^{-L(\tau+s)} |z_2(\tau+s) - u_2(\tau+s)| ds d\tau \right) \\
 &\leq \frac{z_1^0}{L} e^{\beta T} \left( \gamma + \theta_0 \frac{\sigma}{\omega} \frac{1 - e^{-L\omega}}{L} \right) d_L(z, u), \\
 e^{-Lt} |(A_2 z)(t) - (A_2 v)(t)| &\leq z_2^0(0) \theta_0 \int_0^t e^{-L(t-s)} e^{-Ls} |z_1(s) - u_1(s)| ds \\
 &\quad + \rho \theta_0 \int_0^t \int_s^t e^{-L(t-\tau)} e^{-L\tau} |z_1(\tau) - u_1(\tau)| d\tau ds \\
 &\quad + \theta_0 \int_0^t z_2(s) \left( \theta_0 z_1(s) \int_s^t e^{-L(t-\tau)} e^{-L\tau} |z_1(\tau) - u_1(\tau)| d\tau \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\theta_0 \int_s^t u_1(\tau) d\tau} e^{-L(t-s)} e^{-Ls} |z_1(s) - u_1(s)| \right) ds \\
 &\leq \frac{\theta_0}{L} (z_2^0(0) + \rho T + \theta_0 C_0 C_1 T + C_0) d_L(z, u), \\
 e^{-Lt} |(A_2 v)(t) - (A_2 u)(t)| &\leq 2\theta_0 \int_0^t e^{-L(t-s)} e^{-Ls} |z_2(s) - u_2(s)| u_1(s) ds \\
 &\leq 2\theta_0 C_1 \frac{1}{L} d_L(z, u).
 \end{aligned}$$

Выберем  $L$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$z_1^0 e^{\beta T} \left( \gamma + \theta_0 \frac{\sigma}{\omega} \frac{1 - e^{-L\omega}}{L} \right) + \theta_0 (z_2^0(0) + \rho T + \theta_0 C_0 C_1 T + C_0) + 2\theta_0 C_1 < L.$$

Тогда оператор  $A$  является сжимающим, и, следовательно, уравнение (3) однозначно разрешимо в пространстве  $(X, d_L)$ .

Покажем, что уравнение (3) не имеет решений вне пространства  $X$ . Действительно, пусть  $\{z_1, z_2\}$  — решение задачи (1)–(2), тогда существует  $t^* > 0$  такое, что при всех  $t \in (0, t^*)$  выполняется  $z_1(t) > 0$ ,  $z_2(t) > 0$ , а также верно хотя бы одно из утверждений:  $z_1(t^*) = 0$ ,  $z_2(t^*) = 0$ ,  $z_2(t^*) > C_0$ . Равенство  $z_1(t^*) = 0$  невозможно, так как  $(A_1 z)(t) > 0$  при любом  $z$ . Если  $z_2(t^*) = 0$ , то из второго уравнения системы (1) следует, что  $\dot{z}_2(t^*) > 0$ . В силу (1), функция  $\dot{z}_2$  непрерывна. Следовательно, на интервале  $(0, t^*]$  функция  $z_2$  меняет знак, что невозможно. Наконец,

$$\begin{aligned}
 z_2(t) &= z_2^0(0) e^{-\delta t} + \int_0^t e^{-\delta(t-s)} (\rho - \theta(z_2(s)) z_1(s)) ds \\
 &\leq z_2^0(0) e^{-\delta t} + \rho \int_0^t e^{-\delta(t-s)} ds \leq C_0 e^{-\delta t} + C_0 (1 - e^{-\delta t}) = C_0.
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $z = \{z_1, z_2\} \in X$ .  $\square$

Так как число  $T$  в определении пространства  $X$  произвольно, то теорема 1 показывает, что решение задачи (1)–(2) существует, единственно и положительно на  $\mathbb{R}_+$ .

Заметим, что  $z_1(t) \in [0, C_2]$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ , где  $C_2 = \max \left\{ z_1^0, \frac{\beta}{\sigma} \right\}$ . Если допустить обратное, то найдётся такое  $t_0 > 0$ , что  $z_1(t_0) = C_2$ ,  $\dot{z}_1(t_0) > 0$ . Тогда в силу первого уравнения системы (1) справедливо  $\dot{z}_1(t_0) \leq 0$ . Получили противоречие.

Таким образом, функции  $z_1$  и  $z_2$  ограничены на  $\mathbb{R}_+$ . Для рассматриваемой модели это означает, что численность популяции и объём вредных веществ не могут неограниченно возрастать.

Цель данной работы — исследование локальной устойчивости системы (1)–(2). Легко видеть, что у этой системы есть положение равновесия  $(0, \frac{\rho}{\delta})$ , соответствующее вырождению популяции. Для его исследования сделаем замену переменных  $x_1(t) = z_1(t)$ ,  $x_2(t) = z_2(t) - \frac{\rho}{\delta}$  и линеаризуем получившуюся систему. В результате имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left( \beta - \sigma\theta \left( \frac{\rho}{\delta} \right) \right) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\theta \left( \frac{\rho}{\delta} \right) x_1(t) - \delta x_2(t). \end{cases}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1^0 e^{(\beta - \sigma\theta(\frac{\rho}{\delta}))t}, \\ x_2(t) &= \left( z_2^0(0) - \frac{\rho}{\delta} \right) e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta + \beta - \sigma\theta(\frac{\rho}{\delta})} \left( e^{\beta - \sigma\theta(\frac{\rho}{\delta})t} - e^{-\delta t} \right). \end{aligned}$$

Используя данный факт и теорему неустойчивости для квазилинейной системы (см. [5, с. 262]), получаем следующий результат.

**Теорема 2.** *Положение равновесия  $(0, \frac{\rho}{\delta})$  системы (1)–(2) локально асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда  $\beta < \sigma\theta(\frac{\rho}{\delta})$ .*

Система (1) имеет ещё, по крайней мере одно, положение равновесия  $(z_1^*, z_2^*)$ , определяемое из соотношений  $z_1^* = \frac{1}{\gamma}(\beta - \sigma\theta(z_2^*))$  и  $\gamma(\rho - \delta z_2^*) = \theta(z_2^*)(\beta - \sigma\theta(z_2^*))$ . Данное положение равновесия соответствует стабилизации численности популяции. Однако, чтобы  $z_1^*$  и  $z_2^*$  были положительными, необходимо потребовать выполнения дополнительных условий:  $\theta(z_2^*) < \frac{\beta}{\sigma}$ ,  $z_2^* < \frac{\rho}{\delta}$ .

Сделаем в (1) замену переменных  $x_1(t) = z_1(t) - z_1^*$ ,  $x_2(t) = z_2(t) - z_2^*$  и линеаризуем получившуюся систему. В результате исследование сводится к изучению устойчивости следующей системы:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) + \mu x_1(t) + \kappa \int_{-\omega}^0 x_2(t+s) ds = 0, \\ \dot{x}_2(t) + \nu x_1(t) + \lambda x_2(t) = 0, \end{cases}$$

где  $\mu = \gamma z_1^*$ ,  $\kappa = \frac{\sigma}{\omega} z_1^* \theta'(z_2^*)$ ,  $\nu = \theta(z_2^*)$ ,  $\lambda = z_1^* \theta'(z_2^*) + \delta$ .

Система (4) содержит дифференциальное уравнение с запаздыванием. Поэтому исследование положений равновесия  $(z_1^*, z_2^*)$  — значительно более сложная задача, чем изучение положения равновесия  $(0, \frac{\rho}{\delta})$ . Приступим к её решению.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Исследование устойчивости системы (4) сводится к изучению её характеристической функции

$$g(p) = \det \begin{pmatrix} p + \mu & \kappa \frac{1 - e^{-p\omega}}{p} \\ \nu & p + \lambda \end{pmatrix} = p^2 + (\mu + \lambda)p + \mu\lambda - \nu\kappa \frac{1 - e^{-p\omega}}{p}.$$

Обозначим

$$a = \mu + \lambda, \quad b = \mu\lambda, \quad c = -\nu\kappa.$$

Тогда

$$g(p) = p^2 + ap + b + c \frac{1 - e^{-p\omega}}{p}.$$

С помощью масштабирования оси времени можно сделать  $\omega = 1$ , что соответствует замене переменных  $a\omega \mapsto a$ ,  $b\omega^2 \mapsto b$ ,  $c\omega^3 \mapsto c$ . Таким образом, фактически параметров всего три, а не пять, как у системы (4).

Используя [6, 7], а также схему доказательства из работы [8], получаем следующие критерии устойчивости для системы (4).

- Для того чтобы система (4) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все нули характеристической функции  $g$  лежали слева от мнимой оси.
- Для того чтобы система (4) была равномерно устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция  $g$  не имела нулей справа от мнимой оси, а все её нули, лежащие на мнимой оси, были простыми.

Изучим расположение нулей характеристической функции относительно мнимой оси.

**Лемма 1.** *Если  $b + c < 0$ , то характеристическая функция  $g$  имеет положительный вещественный корень.*

*Доказательство.* При  $p \in \mathbb{R}$  легко видеть, что  $\lim_{p \rightarrow +0} g(p) = b + c < 0$ ,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = +\infty$ . В силу непрерывности, функция  $g$  имеет хотя бы один положительный корень.  $\square$

**Лемма 2** ([9], с. 13, теорема 1). *Пусть  $c = 0$ . Характеристическая функция  $g$  не имеет корней с положительной вещественной частью тогда и только тогда, когда  $a > 0$  и  $b > 0$ .*

**Лемма 3.** *Пусть  $b > 0$ . При достаточно малых  $a_0, c_0 > 0$  найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что при всех  $a$  и  $c$ , для которых  $|a| < a_0$  и  $|c| < c_0$ , функция  $g$  имеет ровно два корня в области  $\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon$ , причём эти корни комплексно сопряжённые.*

*Доказательство.* Обозначим  $g_1(p) = p^2 + b$ ,  $g_2(p) = ap + c \frac{1 - e^{-p}}{p}$ , то есть  $g(p) = g_1(p) + g_2(p)$ . При  $b > 0$  функция  $g_1$  имеет ровно два корня:  $\pm i\sqrt{b}$ . Рассмотрим контур  $K(\varepsilon, r)$ , образованный отрезком прямой  $\operatorname{Re} p = -\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) и дугой окружности  $|p| = r$  ( $r > 0$ ), лежащей справа от этой прямой.

Если  $\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon$ , то справедлива оценка

$$\left| \frac{1 - e^{-p}}{p} \right| = \left| \int_0^1 e^{-p\xi} d\xi \right| \leq \int_0^1 e^{-\operatorname{Re} p\xi} d\xi \leq \int_0^1 e^{\varepsilon\xi} d\xi = \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Значит, выбрав достаточно малые  $a_0, c_0 > 0$ , можно добиться того, чтобы при любых  $a$  и  $c$  таких, что  $|a| < a_0$ ,  $|c| < c_0$ , величина  $|g_2(p)|$  была меньше любого наперёд заданного числа.

С другой стороны, на контуре  $K(\varepsilon, r)$  выполняется  $|g_1(p)| \geq \min\{|r^2 - b|, |\varepsilon^2 - b|\}$ . Следовательно, можно выбрать такие  $\varepsilon$  и  $R$ , что при любых  $r > R$  имеет место  $|g_1(p)| > |g_2(p)|$ .

Значит, по теореме Руше [10, с. 424] функции  $g_1$  и  $g$  имеют одинаковое количество нулей внутри каждого из контуров  $K(\varepsilon, r)$  ( $r > R$ ), то есть два. Поскольку при  $g(p) = 0$  также  $g(\bar{p}) = 0$ , эти корни комплексно сопряжённые. Следовательно, и в области  $\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon$  функция  $g$  имеет только два корня, причём комплексно сопряжённых.  $\square$

Рассмотрим в трёхмерном пространстве  $(u, v, w)$  плоскость  $v + w = 0$  и поверхность  $\Gamma$ , заданную параметрически:

$$(5) \quad \Gamma = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}_+^3 : u = w \frac{1 - \cos y}{y^2}, v = y^2 - w \frac{\sin y}{y}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Заметим, что в силу чётности функций  $\frac{1 - \cos y}{y^2}$ ,  $y^2$ ,  $\frac{\sin y}{y}$ , не нарушая общности, в определении  $\Gamma$  можно считать, что  $y \in \mathbb{R}_+$ .

Разделяя в уравнении  $g(iy) = 0$  ( $y \in \mathbb{R}$ ) вещественную и мнимую часть, можно убедиться, что характеристическая функция имеет нули на мнимой оси тогда и только тогда, когда точка  $(a, b, c)$  лежит либо на поверхности  $\Gamma$ , либо на плоскости  $v + w = 0$ .

На рис. 1 изображены плоскость  $v + w = 0$  (синий цвет) и поверхность  $\Gamma$  (зеленый цвет).

Рассмотрим полупространство, определенное неравенством  $v + w > 0$ , и построим в нём множество всевозможных прямых, параллельных оси  $Ou$ . На каждой из них выберем точку, выше (по направлению оси  $Ou$ ) которой нет пересечений с поверхностью  $\Gamma$ . Обозначим это множество точек через  $D$  и докажем, что оно является областью экспоненциальной устойчивости системы (4).

Трудности формального обоснования связаны с тем, что поверхность  $\Gamma$  самопересекающаяся и имеет достаточно сложную структуру.

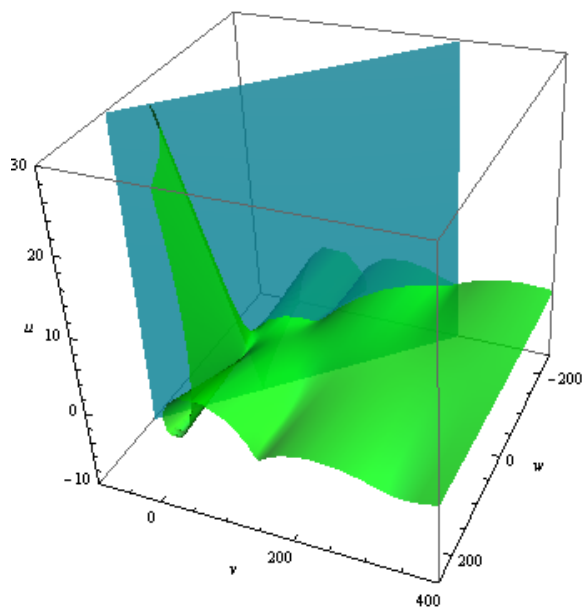
Установим сначала два утверждения, дающих простые достаточные условия устойчивости и неустойчивости системы (4).

**Лемма 4.** *Если  $b + c > 0$ ,  $a > \frac{c}{2}$  и  $a > 0$ , то характеристическая функция  $g$  не имеет корней с положительной вещественной частью.*

*Доказательство.* В условиях леммы функция  $g$  не имеет нулей на мнимой оси. Поэтому, в силу её аналитичности, при всех допустимых в данной лемме параметрах  $a, b, c$  функция  $g$  имеет одинаковое количество нулей справа от мнимой оси, с учётом их кратности. Если дополнительно положить  $c = 0$ , то из леммы 2 вытекает, что все нули функции  $g$  лежат слева от мнимой оси.  $\square$

**Лемма 5.** *Если  $a < \frac{c}{2}$  и  $a < 0$ , то характеристическая функция  $g$  имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.*

*Доказательство.* Случай  $b + c < 0$  рассмотрен в лемме 1. Пусть  $b + c > 0$ . Тогда, повторяя рассуждения леммы 4 и принимая во внимание, что оба корня уравнения  $p^2 + ap + b = 0$  при  $a < 0$  и  $b > 0$  лежат справа от мнимой оси, получаем, что функция  $g$  имеет хотя бы один корень справа от мнимой оси.

Рис. 1. Плоскость  $v + w = 0$  и поверхность  $\Gamma$ .

В случае  $b + c = 0$  имеем  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = a - \frac{c}{2} < 0$ ,  $g(+\infty) = +\infty$ . Поэтому и в данной ситуации функция  $g$  имеет хотя бы один корень справа от мнимой оси.  $\square$

Поверхность  $\Gamma$  можно представить в виде семейства прямых на плоскостях  $\frac{u}{w} = \text{const}$ :

$$(6) \quad v = y^2 - w \frac{\sin y}{y},$$

где  $y$  — все неотрицательные решения уравнения

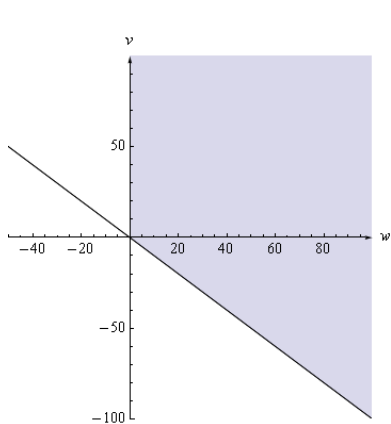
$$(7) \quad \frac{u}{w} = \frac{1 - \cos y}{y^2}.$$

При каждом фиксированном  $\frac{u}{w} \in (0, \frac{1}{2}]$  уравнение (7) имеет конечное число корней, обозначим их  $y_0, y_1, y_2$  и т.д. и расположим по возрастанию. При  $\frac{u}{w} = 0$  уравнение (7) имеет бесконечное множество корней:  $y_j = 2\pi j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

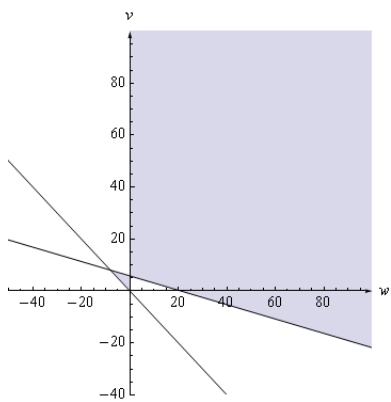
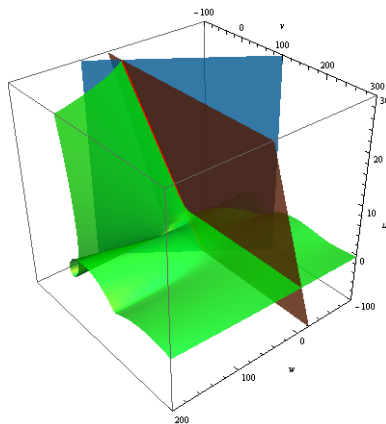
Опишем сечения области  $D$  плоскостями  $\frac{u}{w} = \text{const}$ .

1. Если  $\frac{u}{w} \in (0, \frac{1}{2})$ , поверхность  $\Gamma$  разбивает каждую плоскость  $\frac{u}{w} = \text{const}$  на конечное число областей с прямолинейными границами. К области  $D$  относятся внутренности конечного числа многоугольников (треугольников и трапеций) и одного неограниченного множества, примыкающих к оси  $Ov$  попеременно с правой и левой стороны. Кроме того, нижний многоугольник примыкает к прямой  $v + w = 0$  и является треугольником. Чем меньше  $\frac{u}{w}$ , тем из большего числа многоугольников состоит рассматриваемое сечение области  $D$ . В случае, если один из максимумов функции  $\frac{1 - \cos y}{y^2}$  равен  $\frac{u}{w}$ , прямая, пересекающая ось  $Ov$  выше остальных прямых, параллельна оси  $ow$ . Тогда в некоторой окрестности этой прямой при  $w < 0$  точек, принадлежащих области  $D$ , нет, а при  $w > 0$

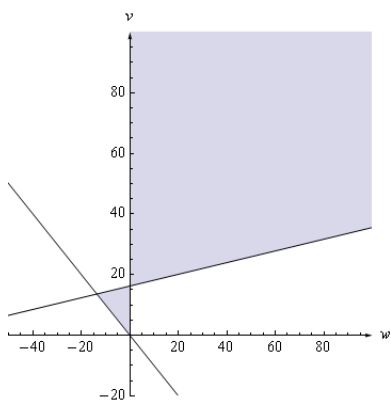
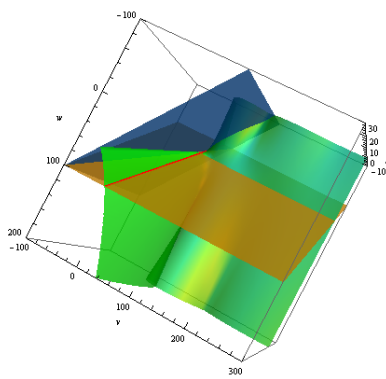




$$\frac{u}{w} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{u}{w} = 0.3$$



$$\frac{u}{w} = 0.1$$

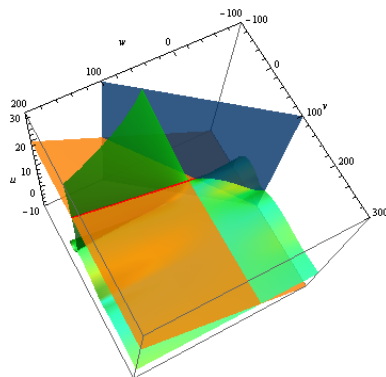
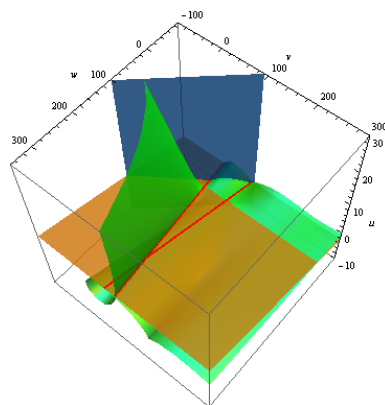
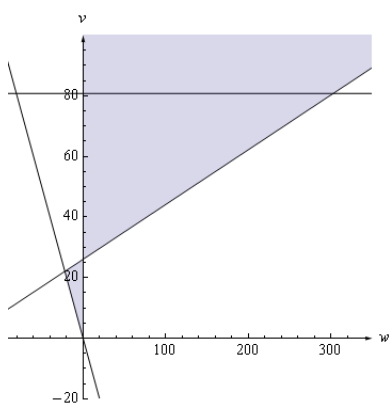
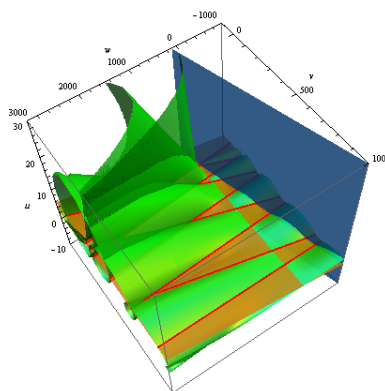
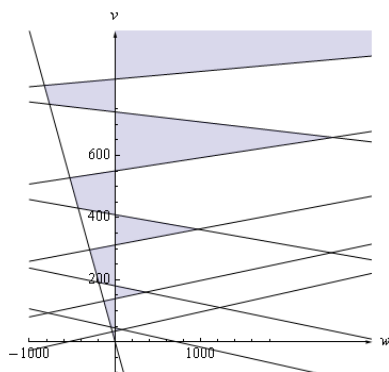


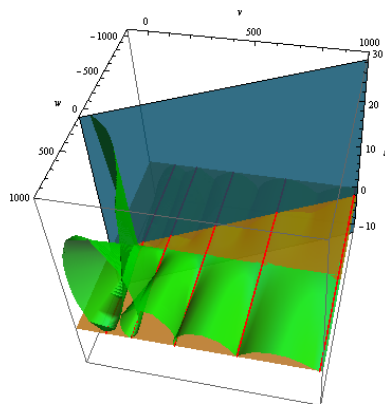
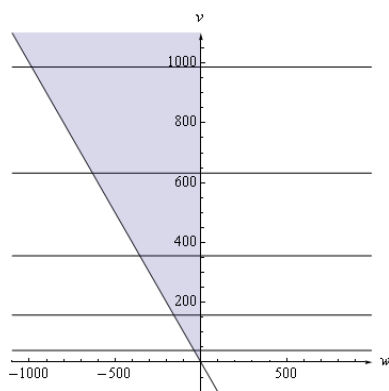
Рис. 2. Область  $D$ .



$\frac{u}{w}$  — значение функции  $\frac{1-\cos y}{y}$  в точке наименьшего положительного максимума,  $\frac{u}{w} \approx 0.023595$



$\frac{u}{w} = 0.02$



$\frac{u}{w} = 0$

Рис. 3. Область  $D$ .

данная прямая является одной из границ упомянутого ранее неограниченного множества.

2. При  $\frac{u}{w} = \frac{1}{2}$  области  $D$  принадлежат такие точки  $(u, v, w)$ , что  $w > \max\{0, -v\}$ .

3. При  $\frac{u}{w} = 0$  области  $D$  принадлежат такие точки  $(u, v, w)$ , что  $-v < w < 0$  и  $v \neq 4\pi^2 j^2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

4. При  $\frac{u}{w} > \frac{1}{2}$  области  $D$  принадлежат такие точки  $(u, v, w)$ , что  $u > 0$ ,  $w > 0$ ,  $v + w > 0$ .

5. При  $\frac{u}{w} < 0$  области  $D$  принадлежат такие точки  $(u, v, w)$ , что  $u > 0$ ,  $w < 0$ ,  $v + w > 0$ .

Других точек, принадлежащих области  $D$ , нет.

Несколько характерных сечений области  $D$  изображены на рис. 2, 3. Справа оранжевым цветом показана некоторая плоскость  $\frac{u}{w} = \text{const}$ , синим — плоскость  $v + w = 0$ , зелёным — поверхность  $\Gamma$ , красными прямыми отмечены точки пересечения поверхности  $\Gamma$  и плоскости  $\frac{u}{w} = \text{const}$ . На изображениях слева представлены сечения области  $D$  (закрашены серым цветом) при  $\frac{u}{w} = \text{const}$ .

Теперь докажем, что область экспоненциальной устойчивости не может находиться вне области  $D$ .

**Лемма 6.** *Если точка  $(a, b, c)$  не принадлежит области  $D$ , то хотя бы один нуль характеристической функции  $g$  лежит справа от мнимой оси.*

*Доказательство.* Зафиксируем параметр  $\frac{a}{c}$ . Проследим динамику корней характеристической функции  $g$  в зависимости от изменения  $b$ . Рассмотрим семейство  $\{g_b(p)\}_{b \in \mathbb{R}} = g(b, p) = p^2 + ap + b + c \frac{1-e^{-p}}{p}$ . Очевидно, что существует функциональная зависимость корней функции  $g$  от  $b$ : обозначим ее  $p = p(b)$  и заметим, что эта зависимость непрерывно дифференцируема. Следовательно, равенство  $g(b, p(b)) = 0$  выполняется тождественно и  $\frac{d}{db}g(b, p(b)) = 0$ .

По формуле производной сложной функции имеем  $\frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{dp}{db} = 0$ , откуда  $\frac{dp}{db} = -\frac{1}{2p+a+c \frac{e^{-p}p-1+e^{-p}}{p^2}}$ . Значит,

$$(8) \quad \left. \frac{d(\text{Re } p)}{db} \right|_{\substack{(a,b,c) \in \Gamma \\ p=iy}} = c \left( -2 \frac{1 - \cos y}{y^2} + \frac{\sin y}{y} \right) = cy \frac{d}{dy} \frac{1 - \cos y}{y^2}.$$

Легко видеть, что при  $c > 0$  и  $y = y_0, y_2, y_4, \dots$  выражение (8) отрицательно, при  $c > 0$  и  $y = y_1, y_3, y_5, \dots$  положительно, при  $c < 0$  и  $y = y_0, y_2, y_4, \dots$  положительно, при  $c < 0$  и  $y = y_1, y_3, y_5, \dots$  отрицательно, а при  $y$ , являющихся точками экстремума функции  $\frac{1 - \cos y}{y^2}$ , равно нулю.

Напомним, что при  $\frac{a}{c} = \text{const}$  поверхность  $\Gamma$  можно представить в виде семейства прямых. В каждой плоскости  $\frac{a}{c} = \text{const}$  вдоль этих прямых поставим знаки «+» и «-» следующим образом. Если на рассматриваемом участке прямой значение выражения (8) положительно, то над ней (по направлению оси  $Ov$ ) поставим знаки «+», а под ней — знаки «-». Если значение выражения (8) отрицательно, то знаки «-» поставим над прямой и знаки «+» под ней. Если значение выражения (8) равно нулю, то никаких меток ставить не будем. Заметим, что метки не будут стоять только вдоль горизонтальных прямых. На рис. 4 показано характерное сечение области  $D$  при  $\frac{a}{c} = 0.02$ .

Смена знака «-» на знак «+» означает, что у функции  $g$  при переходе через прямую увеличивается количество нулей справа от мнимой оси. Если вдоль

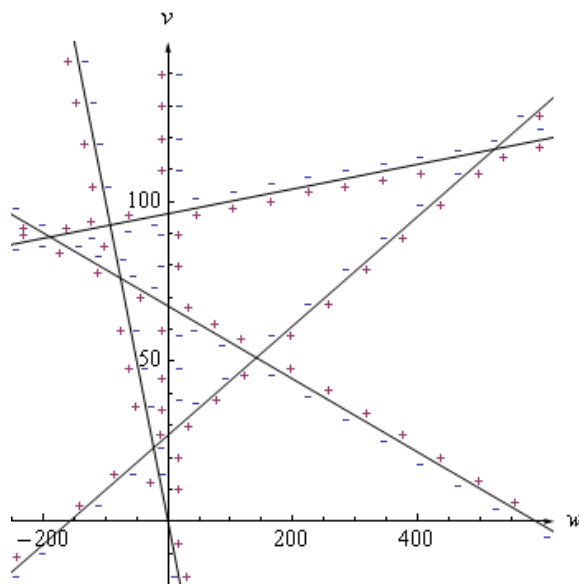


Рис. 4. Движение корней характеристической функции,  $\frac{a}{c} = 0.02$ .

прямой меток нет, то при переходе через эту прямую количество нулей функции  $g$  справа от мнимой оси не изменяется.

Понятно, что внутри области  $D$  стоят лишь знаки «-». Покажем, что внутри других многоугольников стоят и знаки «+». На каждой плоскости  $\frac{a}{c} = \text{const} > 0$  прямые, описываемые уравнениями (6), наклонены под острым углом к оси  $Ow$  (в направлении возрастания  $v$  и  $w$ ) при  $y$ , равных  $y_0, y_2, y_4, \dots$ , под тупым углом при  $y$ , равных  $y_1, y_3, y_5, \dots$ . Исключение может составить прямая при наибольшем  $y_n$ , она может быть параллельна оси  $Ow$  или наклонена под любым углом, кроме угла в 90 градусов.

Для определённости пусть  $w > 0$ . Возьмём любой многоугольник, не прилегающий к оси  $Ov$ . Рассмотрим ближайшую к оси  $Ov$  вершину многоугольника и стороны, выходящие из данной вершины. Если хотя бы одна сторона наклонена под острым углом к оси  $Ow$ , то это сторона ограничивает многоугольник сверху и под ней стоят знаки «+». Следовательно, если точка  $(a, b, c)$  (при фиксированном  $\frac{a}{c}$ ) принадлежит такому многоугольнику, то функция  $g$  имеет хотя бы один нуль справа от мнимой оси. Рассмотрим случай, когда обе стороны лежат под тупым углом к оси  $Ow$ . Прямая, соответствующая наибольшему  $y_n$ , пересекается с прямыми с отрицательными угловыми коэффициентами при  $w < 0$ . Поэтому рассматриваемый многоугольник ограничен снизу прямой, сверху которой стоит «+». Следовательно, и в этой ситуации характеристическая функция имеет нули справа от мнимой оси. Случай  $w < 0$  исследуется аналогично.

При переходе через границу области  $D$  знаки «-» меняются на знаки «+». Значит, если  $(a, b, c) \notin D$ , то функция  $g$  имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.  $\square$

Далее убедимся, что область  $D$  принадлежит области экспоненциальной устойчивости.

**Лемма 7.** *Если точка  $(a, b, c)$  принадлежит области  $D$ , то все нули характеристической функции  $g$  лежат слева от мнимой оси.*

*Доказательство.* Зафиксируем отношение  $\frac{a}{c}$ . Пусть точка  $(a, b, c)$  принадлежит одному из примыкающих к вертикальной оси многоугольников, не входящих в область  $D$ . Тогда в силу леммы 3 получаем, что функция  $g$  справа от мнимой оси имеет ровно два нуля, причём комплексно сопряжённых. При переходе через границу рассматриваемых многоугольников, проходящую по оси  $Ov$ , происходит смена знака «+» на «-». Поэтому у функции  $g$  уменьшается количество нулей справа от мнимой оси. Но поскольку кроме упомянутой ранее пары комплексно сопряжённых нулей у функции  $g$  в правой полуплоскости других нулей нет, то именно эта пара и перешла в левую полуплоскость. Поэтому при  $(a, b, c) \in D$  все нули функции  $g$  лежат слева от мнимой оси.  $\square$

Наконец, из лемм 6 и 7 вытекает

**Теорема 3.** *Для экспоненциальной устойчивости системы (4) необходимо и достаточно, чтобы точка  $(a, b, c)$  принадлежала области  $D$ .*

Сформулируем несколько простых следствий теоремы 3.

**Следствие 1.** *Пусть  $a = 0$ . Система (4) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда  $-b < c < 0$ ,  $b \neq 4\pi^2 j^2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .*

**Следствие 2.** *Пусть  $b = 0$ . Система (4) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда  $a > \frac{c}{2} > 0$ .*

**Следствие 3.** *Пусть  $c = 0$ . Система (4) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда  $a > 0$  и  $b > 0$ .*

Таким образом, с координатными осями область экспоненциальной устойчивости не пересекается.

**Следствие 4.** *Пусть  $a = b = 0$  или  $a = c = 0$ , или  $b = c = 0$ . Тогда система (4) не является экспоненциально устойчивой.*

**Замечание.** В работах [1, 3] рассматривается частный (по отношению к рассматриваемому в данной работе) случай: функция  $\theta'$  неотрицательна. Значит, в системе (4) коэффициенты  $\mu$  и  $\lambda$  положительны, а  $\nu$  и  $\kappa$  неотрицательны. Следовательно, в характеристической функции  $g$  параметры  $a$  и  $b$  положительны, а  $c$  неположителен. В случае  $c < 0$  достаточно воспользоваться леммой 1, леммой 4 и тем, что при  $b + c = 0$  функция  $g$  имеет корень  $p = 0$ . Откуда вытекает, что система (4) является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда  $b + c > 0$ . В случае  $c = 0$ , применив следствие 3, получаем, что система (4) является экспоненциально устойчивой. При  $\omega \rightarrow 0$  результаты настоящей работы согласуются с исследованием, проведённым в статье [11].

Далее получим критерий равномерной устойчивости системы (4).

Обозначим через  $\bar{D}$  замыкание области  $D$  за исключением луча

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u = 2w \geq 0, v + w = 0, w \geq 0\}.$$

**Теорема 4.** *Для равномерной устойчивости системы (4) необходимо и достаточно, чтобы точка  $(a, b, c)$  принадлежала  $\bar{D}$ .*

*Доказательство.* Поскольку из экспоненциальной устойчивости вытекает равномерная устойчивость, то необходимо рассмотреть только границу области  $D$ , то есть ситуацию, когда функция  $g$  имеет нули на мнимой оси. Если эти нули кратные, то помимо  $g(iy) = 0$  выполняется также  $g'(iy) = 0$ . Если  $y = 0$ , то  $a = 2c$  и  $b + c = 0$ . Но точки данной прямой не принадлежат области  $\bar{D}$ . Поэтому можно считать, что  $y > 0$ .

Итак, мы имеем следующие равенства:

$$(9) \quad b = y^2 - c \frac{\sin y}{y},$$

$$(10) \quad a = c \frac{1 - \cos y}{y^2},$$

$$(11) \quad a - c \left( \frac{\sin y}{y} - \frac{1 - \cos y}{y^2} \right) = 0,$$

$$(12) \quad 2y - c \frac{y \cos y - \sin y}{y^2} = 0.$$

Если  $c = 0$ , то функция  $g$  имеет кратные корни только при  $a = b = 0$ . Далее полагаем  $c \neq 0$ . Из соотношений (9) и (10) вытекает, что

$$(12) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1 - \cos y}{y^2}.$$

Если  $\frac{a}{c} \in (0, \frac{1}{2})$ , то система (12) имеет единственное решение  $y^* > 0$ , где  $y^*$  — одна из точек максимума функции  $\frac{1 - \cos y}{y^2}$ . Однако, в этих точках функция  $\frac{\sin y}{y}$  убывает. Поэтому из соотношения (11) вытекает неравенство  $c < 0$ , что невозможно.

Если  $\frac{a}{c} = 0$ , то система (12) имеет решения:  $y_j^* = 2\pi j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Тогда  $c = 8\pi^2 j^2 > 0$ , что также невозможно.  $\square$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема 2 содержит необходимый и достаточный признак локальной асимптотической устойчивости положения равновесия  $(0, \frac{\theta}{\delta})$  системы (1)–(2), причём этот признак является эффективным.

Система (1)–(2) может иметь другие точки равновесия  $(z_1^*, z_2^*)$ , для которых  $z_1^* > 0, z_2^* > 0$ . Не исключена ситуация, когда таких точек несколько, но все они исследуются по единой схеме. Теорема 3 позволяет сформулировать следующий признак локальной устойчивости: положение равновесия  $(z_1^*, z_2^*)$  системы (1)–(2) локально асимптотически устойчиво, если

$$\left\{ (z_1^*(\gamma + \theta'(z_2^*)) + \delta)\omega, \gamma z_1^*(z_1^* \theta'(z_2^*) + \delta)\omega^2, -\frac{\sigma}{\omega} z_1^* \theta(z_2^*) \theta'(z_2^*) \omega^3 \right\} \in D.$$

Конечно, представляет интерес традиционный для нелинейных уравнений вопрос о совпадении или несовпадении областей локальной и глобальной устойчивости. В данном случае, в силу установленной в теореме 1 ограниченности всех решений задачи (1), их неограниченное возрастание невозможно, но возможны ситуации ненулевого предела, периодических решений и т.п.

Однако, с нашей точки зрения, основной результат настоящей работы — это необходимые и достаточные условия того, что все корни характеристической функции лежат слева от мнимой оси (теорема 3) или слева и на самой мнимой

оси (теорема 4). Данные результаты применимы не только к системе (4), но и к любому другому объекту, имеющему такую же характеристическую функцию.

Авторы статьи выражают благодарность В.В. Малыгиной за ряд существенных замечаний и всем участникам Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям за внимание к работе и плодотворное обсуждение ее результатов.

## REFERENCES

- [1] А.Н. Пичугина, *Интегродифференциальная модель популяции, подверженной воздействию вредных веществ*, Сиб. журнал инд. матем., **7**:4(20) (2004), 130–140. MR2140658
- [2] Н.В. Перцев, *Исследование решений интегральной модели Лотки–Вольтерра*, Сиб. журнал инд. матем., **2**:2(4) (1999), 153–167. MR1785589
- [3] Р.О. Карелина, Н.В. Перцев, *Построение двусторонних оценок для решений некоторых систем дифференциальных уравнений с последствием*, Сиб. журнал инд. матем., **8**:4(24) (2005), 60–72. MR2213910
- [4] Н.В. Перцев, *Применение монотонного метода и  $M$ -матриц к анализу поведения решений некоторых моделей биологических процессов*, Сиб. журнал инд. матем., **5**:4(12) (2002), 110–122. MR1960788
- [5] Б.П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва, 1967.
- [6] Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально–разностные уравнения*, Мир, Москва, 1967. MR0221045
- [7] В.И. Зубов, *К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом*, Изв. вузов. Математика, **6** (1958), 86–95. MR0131643
- [8] Т. Sabatulina, V. Malygina, *On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **61** (2014), 1–16. MR3296522
- [9] М.М. Постников, *Устойчивые многочлены*, Едиториал УРСС, Москва, 2004. MR636100
- [10] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функции комплексного переменного*, Наука, Москва, 1987. MR1087298
- [11] Н.В. Перцев, Г.Е. Царегородцева, А.Н. Пичугина, *Анализ устойчивости положений равновесия одной модели популяционной динамики*, Вестник Омского университета, **2** (2009), 50–53.

ANTON SERGEYEVICH BALANDIN  
 PERM NATIONAL RESEARCH POLYTECHNIC UNIVERSITY,  
 KOMSOMOLSKIY PR., 29,  
 614990, PERM, RUSSIA  
*E-mail address:* balandin-anton@yandex.ru

TATYANA LEONIDOVNA SABATULINA  
 PERM NATIONAL RESEARCH POLYTECHNIC UNIVERSITY,  
 KOMSOMOLSKIY PR., 29,  
 614990, PERM, RUSSIA  
*E-mail address:* TSabatulina@gmail.com