S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 625–638 (2015) УДК 512.55
DOI 10.17377/semi.2015.12.050 MSC 16P10,16W20

О КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Е.В. ЖУРАВЛЕВ

Abstract. In this article we classified up to isomorphism all finite commutative local ring with Jacobson radical J the index of nilpotency four and conditions:

$$\mathrm{char} R = 2,\ \dim_{R/J} J/J^2 = 2,\ \dim_{R/J} J^2/J^3 = 2,\ \dim_{R/J} J^3 = 1.$$

Keywords: finite rings, local rings.

1. Введение

Одной из актуальных проблем современной алгебры является задача описания и классификации конечных колец малых порядков. Каждое конечное кольцо с единицей единственным образом представимо в виде прямой суммы колец, порядки которых есть степени некоторых простых чисел, то есть $R = \bigoplus\sum\limits_p R_p$, где $R_p = \{x \in R \mid p^n x = 0$ для некоторого $n \geq 1\}$. Поэтому при классификации конечных колец достаточно рассматривать только кольца порядка p^n. За последние десятилетия удалось полностью изучить некоторые из таких типов колец. Так, В.Г. Антипкин и В.П. Елизаров описали кольца порядка p^n для $n \leq 3$ (см. [1, 2]). В частности, В.П. Елизаров классифицировал все ненильпотентные кольца порядка p^4 (см. [2]). При этом число неизоморфных колец, полученных ими, различно для $p = 2$ и $p \neq 2$. В работе [3] В.А. Ратиновым частично описаны кольца порядка p^4 для каждого из случаев: $p = 2,\ p \neq 2$ и $p \equiv 1(mod\,3),\ p \not\equiv 1(mod\,3)$. Д. Дерр, Г. Орр, П. Пек в 1994 г. впервые указали исчерпывающий список некоммутативных колец порядка p^4 (см. [4]). Б. Корбас и Г. Вилльямс в 2000 г. в работах [5, 6] классифицировали с точностью до изоморфизма все конечные кольца порядка p^5. Более того, ими были повторно

Zhuravlev, E.V., On the classification of finite commutative local rings.

Поступила 12 июня 2015 г., опубликована 22 сентября 2015 г.

описаны все конечные кольца порядков p, p^2, p^3 и p^4. Авторы указали также на то, что их метод открывает перспективы для изучения строения колец более высоких порядков. Согласно их замыслу, необходимо сначала полностью классифицировать все конечные локальные кольца некоторого порядка, а затем уже, рассматривая соответствующие разложения в прямые суммы полусовершенных колец, получить окончательный результат.

Обозначим через $J(R) = J$ радикал Джекобсона кольца R. Конечное кольцо R называется локальным, если R/J – поле. Пусть R — локальное кольцо с единицей, $|R| = p^n$ и $R/J = GF(p^r) = F$. Заметим, что J является множеством всех нильпотентных элементов кольца R или, что равносильно, множеством всех делителей нуля. Рассмотрим последовательность $R = J^0 \supset J \supset J^2 \supset \ldots$. Если $s_i = \dim_F J^i/J^{i+1}$, то $r \sum\limits_{i=0}^{\infty} s_i = n$. Так как R является конечным кольцом, то его радикал J нильпотентен, и, следовательно, $s_N = 0$, $J^N = 0$, $J^{N-1} \neq 0$ для некоторого натурального N. Если $R/J = GF(p^r)$, то $1 \cdot p \in J$, а значит, $p^N = 0$ и характеристика кольца R равна p^k для некоторого $k \leq N$.

В работах [7, 8] Б. Корбас указал конструкцию конечного локального кольца с радикалом Джекобсона индекса нильпотентности 2. В 1999 г. Ч. Чикунджи описал строение конечных локальных колец с условием $J^3 = 0$ [9]. Эти результаты сыграли важную роль в классификации колец порядка p^5 [5, 6]. В работах [10, 11, 12] автор указал строение конечных локальных колец характеристики p и p^2 с условием $J^4 = 0$, а также привел необходимые и достаточные условия существования изоморфизма между двумя такими кольцами. В частности, им были классифицированы кольца с условиями: $\mathrm{char} R \neq 2$, $J^4 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$ и $R/J = F \subseteq Z(R)$ ($Z(R)$ – центр кольца R). Причем в случае $\mathrm{char} R = 2$ была получена классификация указанных колец при $R/J = \mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ – кольцо классов вычетов по модулю 2. Цель настоящей работы – продолжить исследования по классификации конечных колец.

2. Предварительные сведения

Все кольца, рассматриваемые далее, являются конечными, локальными и содержат единицу.

Воспользуемся результатами работы [10]. Пусть R является кольцом характеристики $p = 2$, $J^4 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$ и $R/J = F \subseteq Z(R)$. Тогда

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – отмеченный базис идеала J над полем F (см. конструкцию А в [10]), причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$. Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v_j$, $v_j u_i \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^{(1)} v_1 + a_{ij}^{(2)} v_2 + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v_j = c_{ij} w, \quad v_j u_i = d_{ij} w$$

для некоторых $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, b_{ij}, c_{ij}, $d_{ij} \in F$, $i, j = \overline{1,2}$.

Рассмотрим матрицы умножения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как R – ассоциативное кольцо, то для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$ справедливо равенство

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} d_{\gamma 1} + a_{\alpha\beta}^{(2)} d_{\gamma 2} = a_{\beta\gamma}^{(1)} c_{\alpha 1} + a_{\beta\gamma}^{(2)} c_{\alpha 2}.$$

Кроме того, матрицы A_1 и A_2 линейно независимы, а матрицы C и D ненулевые (см. [10, стр. 29]).

Заметим, что кольцо R, построенное выше, является коммутативным тогда и только тогда, когда матрицы A_1, A_2 и B являются симметрическими, а матрицы C и D равны.

Пусть R и R' – произвольные кольца с матрицами умножения A_1, A_2, B, C, D и A_1', A_2', B', C', D' соответственно. В работе [10, стр. 25] доказано, что $R \cong R'$ тогда и только тогда, когда существуют $t \in F^*$ (F^* – группа обратимых элементов поля F), невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$, $R = (r_{ij})_{2\times 2}$, некоторые матрицы $Q = (q_{ij})_{2\times 2}$, $S = (s_{ij})_{1\times 2}$ и автоморфизм ρ поля F такие, что

$$\begin{gathered} A_1' = P^T \left(\tilde r_{11} A_1^\rho + \tilde r_{12} A_2^\rho\right) P, \\ A_2' = P^T \left(\tilde r_{21} A_1^\rho + \tilde r_{22} A_2^\rho\right) P, \\ B' = P^T \left(s_{11} A_1^\rho + s_{12} A_2^\rho + t\left(B^\rho + C^\rho\, R\, Q + (D^\rho\, R\, Q)^T\right)\right) P, \\ C' = t\, P^T\, C^\rho\, R, \\ D' = t\, P^T\, D^\rho\, R, \end{gathered}$$

где $R^{-1} = (\tilde r_{ij})_{2\times 2}$, $A_1^\rho = \left(\left(a_{ij}^{(1)}\right)^\rho\right)$, $A_2^\rho = \left(\left(a_{ij}^{(2)}\right)^\rho\right)$, $B^\rho = (b_{ij}^\rho)$, $C^\rho = (c_{ij}^\rho)$, $D^\rho = (d_{ij}^\rho)$.

3. Классификация

Пусть X – множество всех пятерок квадратных матриц (A_1, A_2, C, D, B) порядка два, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $A_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$ и $A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$ линейно независимы;

b) $C \neq 0$ и $D \neq 0$;

c) для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$ справедливо равенство

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} d_{\gamma 1} + a_{\alpha\beta}^{(2)} d_{\gamma 2} = a_{\beta\gamma}^{(1)} c_{\alpha 1} + a_{\beta\gamma}^{(2)} c_{\alpha 2}. \tag{1}$$

Определим на множестве X отношение эквивалентности " $\sim$ " следующим образом:

$$\Pi = (A_1, A_2, C, D, B) \sim \Pi' = (A_1', A_2', C', D', B'),$$

если существуют $t \in F^*$, невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$, $R = (r_{ij})_{2\times 2}$, некоторые матрицы $Q = (q_{ij})_{2\times 2}$, $S = (s_{ij})_{1\times 2}$ и автоморфизм ρ поля F такие, что

$$\begin{aligned} A_1' &= P^T \left(\tilde r_{11} A_1^\rho + \tilde r_{12} A_2^\rho\right) P, \\ A_2' &= P^T \left(\tilde r_{21} A_1^\rho + \tilde r_{22} A_2^\rho\right) P, \end{aligned} \tag{2}$$

$$B' = P^T \left(s_{11} A_1^{\rho} + s_{12} A_2^{\rho} + t \left(B^{\rho} + C^{\rho}\, R\, Q + (D^{\rho}\, R\, Q)^T \right) \right) P, \tag{3}$$

$$C' = t\, P^T\, C^{\rho}\, R, \tag{4}$$

$$D' = t\, P^T\, D^{\rho}\, R, \tag{5}$$

где $R^{-1} = (\tilde{r}_{ij})_{2\times 2}$.

Пусть (A_1, A_2, C, D, B), $(A_1', A_2', C', D', B') \in X$. Определим следующие вспомогательные отношения:

a) $(A_1, A_2) \sim (A_1', A_2')$, если существуют невырожденные матрицы P и R, такие, что выполнены равенства (2);
b) $(A_1, A_2, C, D) \sim (A_1', A_2', C', D')$, если существует $t \in F^*$ и невырожденные матрицы P и R, такие, что выполнены равенства (2), (4), (5).

Наша цель — перечислить представителей всех классов эквивалентности, определенной на пятерках матриц (A_1, A_2, C, D, B). Очевидно, что это равносильно классификации колец с указанными выше условиями.

Во-первых, рассмотрим эквивалентность, определенную на парах линейно независимых матриц (A_1, A_2). Б. Корбас и Г. Вилльямс в работе [13] указали все представители классов этой эквивалентности для случая коммутативных колец, а именно:

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где $\delta = 0$ или δ – некоторый элемент F, такой, что $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$.

Причем

$$\begin{gathered} A_1 = P^T \left(\tilde{r}_{11} A_1 + \tilde{r}_{12} A_2 \right) P, \\ A_2 = P^T \left(\tilde{r}_{21} A_1 + \tilde{r}_{22} A_2 \right) P \end{gathered}$$

тогда и только тогда, когда

$$P = \frac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{a^2 d} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$a, d, c \in F$, $ad \neq 0$, в первом случае и

$$P = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a + sc & c\delta + a(s+1) \\ c & a \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} a^2 + c^2\delta & c^2 \\ a^2(s+1) + s\delta c^2 & a^2 + (s+\delta)c^2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = a^2 + ac + c^2\delta$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$, $s = 0, 1$, во втором случае (см. [13, стр. 245]). Такие матрицы будем называть стабилизирующими.

Если пятерка $\Pi = (A_1, A_2, C, D, B)$ является представителем некоторого класса эквивалентности, то в силу вышеупомянутого результата пара матриц $(A_1,\ A_2)$ должна быть эквивалентна одной из перечисленных пар матриц 1), 2). То есть, наша задача, очевидно, сводится к разбиению на классы эквивалентности множеств

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C, D, B \right) \right\}, \quad \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, C, D, B \right) \right\}.$$

Заметим также, что автоморфизм ρ из равенств (2)-(5) зачастую не играет особой роли, так как некоторые из матриц умножения состоят только из нулей и единиц. Поэтому в дальнейшем, если значение ρ не указывается, то подразумевается, что ρ – тождественный автоморфизм.

Случай 1: Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } d_{ij}, c_{ij} \in F.$$

Так как элементы матриц A_1, A_2, C, D удовлетворяют равенствам (1), то $d_{12} = c_{12}$, $d_{22} = c_{11}$, $d_{11} = c_{11}$, $d_{21} = 0$, $d_{11} = c_{22}$, $d_{21} = c_{21}$, $c_{21} = 0$, а значит, матрицы C и D имеют вид

$$C = D = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, \text{ где } x, y \in F.$$

Рассмотрим четверку матриц

$$\Omega = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right].$$

Если $y = 0$, то, полагая $P = R = E$ (E – единичная матрица), $t = 1/x$ ($x \neq 0$, так как $C \neq 0$), получим

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.1}$$

Если $y \neq 0$, то, полагая $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x/y & 1 \end{pmatrix}$, $R = E$, $t = 1/y$, получим

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.2}$$

Заметим, что если A_1, A_2, B – симметрические матрицы и $C{=}D$ (такие матрицы соответствуют коммутативному кольцу), то A_1', A_2', B' – также симметрические матрицы и $C'{=}D'$. Поэтому пятерки матриц (1.1), (1.2) не могут быть эквивалентны.

Случай 1.1: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{ij} \in F.$$

Если $b_{12} = b_{21}$ и $b_{22} = 0$, то, полагая $P = R = E$, $t = 1$, $S = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.1.1}$$

Если $b_{12} = b_{21}$ и $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1/b_{22} & 0 \\ 0 & 1/b_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1/b_{22}^3 & 0 \\ 0 & 1/b_{22}^2 \end{pmatrix},$$

$t = b_{22}^3$, $S = \begin{pmatrix} b_{21}b_{22}^3 & b_{11}b_{22}^3 \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.1.2}$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$ и $b_{22} = 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(b_{12}+b_{21}) \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1/(b_{12}+b_{21}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$t = 1$, $S = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.1.3}$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$ и $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \frac{(b_{12}+b_{21})^2}{b_{22}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (b_{12}+b_{21})/b_{22} \end{pmatrix}, R = \frac{(b_{12}+b_{21})^4}{b_{22}^2} \begin{pmatrix} (b_{12}+b_{21})/b_{22} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$t = \dfrac{b_{22}^3}{(b_{12}+b_{21})^6}$, $S = \dfrac{b_{22}^3}{(b_{12}+b_{21})^6} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.1.4}$$

Если пятерка матриц (1.1.1) эквивалентна пятерке (1.1.2), то для некоторых P и R, стабилизирующих A_1 и A_2, и произвольных t, S, Q получаем противоречивое равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^T \left(s_{11}A_1 + s_{12}A_2 + t\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + CRQ + (DRQ)^T \right) \right) P = \\ = \frac{1}{a^3 d} \begin{pmatrix} ads_{12} & s_{11}a^2 + q_{22}t \\ a^2 s_{11} + q_{22}t & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, если (1.1.3) и (1.1.4) эквивалентны, то получаем противоречивое равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^T \left(s_{11}A_1 + s_{12}A_2 + t\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + CRQ + (DRQ)^T \right) \right) P = \\ = \frac{1}{a^3 d} \begin{pmatrix} a(ct + ds_{12}) & a^2 s_{11} + q_{22}t + a^2 t \\ s_{11}a^2 + q_{22}t & 0 \end{pmatrix}.$$

Случай 1.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{ij} \in F.$$

Если $b_{12} = b_{21}$ и $b_{22} = 0$, то, полагая $P = R = E$, $t = 1$, $S = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.2.1}$$

Если $b_{12} = b_{21}$ и $b_{22} \neq 0$, то, полагая $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/b_{22} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1/b_{22} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t = b_{22}$, $S = b_{22}\begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{1.2.2}$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$ и $b_{22} = 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} b_{12}+b_{21} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = (b_{12}+b_{21})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_{12}+b_{21} \end{pmatrix},$$

$t = 1/(b_{12}+b_{21})^2$, $S = 1/(b_{12}+b_{21})^2\begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{1.2.3}$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$ и $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = (b_{12}+b_{21})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (b_{12}+b_{21})/b_{22} \end{pmatrix}, \quad R = (b_{12}+b_{21})^2\begin{pmatrix} (b_{12}+b_{21})/b_{22} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$t = b_{22}/(b_{12}+b_{21})^4$, $S = b_{22}/(b_{12}+b_{21})^4\begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$, $Q = 0$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{1.2.4}$$

Если пятерка матриц (1.2.1) эквивалентна пятерке (1.2.2), то для некоторых P и R, стабилизирующих A_1 и A_2, и произвольных t, S, Q получаем противоречивое равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^T\left(s_{11}A_1 + s_{12}A_2 + t\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + CRQ + (DRQ)^T\right)\right)P =$$
$$= \frac{1}{a^3d^2}\begin{pmatrix} s_{12}ad^2 & s_{11}a^2d + q_{12}ta + q_{21}td \\ s_{11}a^2d + q_{12}ta + q_{21}td & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, если (1.2.3) и (1.2.4) эквивалентны, то получаем противоречивое равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^T\left(s_{11}A_1 + s_{12}A_2 + t\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + CRQ + (DRQ)^T\right)\right)P =$$
$$= \frac{1}{a^3d^2}\begin{pmatrix} ad(ds_{12}+ct) & aq_{12}t + dq_{21}t + a^2ds_{11} + a^2dt \\ ds_{11}a^2 + q_{12}ta + dq_{21}t & 0 \end{pmatrix}.$$

Случай 2: Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}, d_{ij} \in F$, $\delta \neq 0$ – один из таких элементов поля F, что $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$. Так как элементы матриц A_1, A_2, C, D удовлетворяют равенствам (1), то $d_{12} + c_{12} = 0$, $d_{22} + c_{11} = 0$, $d_{11} + c_{11} = 0$, $d_{21} + c_{11} + c_{12}\delta = 0$, $d_{11} + c_{22} = 0$, $d_{21} + c_{21} = 0$ и, следовательно, матрицы C и D можно записать в виде

$$C = D = \begin{pmatrix} x & y \\ x + \delta y & x \end{pmatrix}, \text{ где } x, y \in F.$$

Рассмотрим четверку матриц

$$\Omega = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x & y\\ x+\delta y & x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x & y\\ x+\delta y & x\end{pmatrix}\right].$$

Если $x = 0$, то, полагая $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $t = 1/y$ ($y \neq 0$, так как $C \neq 0$), получим

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1+\delta & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1+\delta & 1\end{pmatrix}\right].$$

Если $x \neq 0$, то, полагая $P = R = E$, $t = 1/x$, получим

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y/x\\ 1+\delta y/x & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y/x\\ 1+\delta y/x & 1\end{pmatrix}\right].$$

Таким образом, достаточно рассмотреть четверку матриц вида

$$\Omega = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\ 1+\delta z & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\ 1+\delta z & 1\end{pmatrix}\right], \quad z \in F.$$

Пусть P, R – стабилизирующие матрицы для (A_1, A_2). Тогда

$$C' = tP^T C^\rho R = \frac{t}{\Delta}\begin{pmatrix}x' & y'\\ x'+\delta y' & x'\end{pmatrix},$$

где

$$x' = (a^3(1+s) + a^2c\delta + ac^2\delta s + c^3\delta(\delta+s))z^\rho + a^3 + ac^2\delta + c^3\delta,$$
$$y' = (a^3 + a^2cs + ac^2(\delta+s) + c^3(\delta+s+\delta s))z^\rho + a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta).$$

Так как $\delta^\rho \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$, то без потери общности допустим, что $\delta^\rho = \delta$. Если $x' = 0$, при некоторых $a, c \in F$ и $s \in \{0,1\}$, то, полагая $t = \Delta/y'$ ($y' \neq 0$, так как иначе $C = 0$), получаем

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ \delta & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ \delta & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{2.1}$$

Пусть

$$M = \{z \in F \mid \forall s \in \{0,1\}\ \forall a, c \in F,\ a \neq 0 \ \text{ или } \ c \neq 0,$$
$$(a^3(1+s) + a^2c\delta + ac^2\delta s + c^3\delta(\delta+s))z + a^3 + ac^2\delta + c^3\delta \neq 0\}.$$

Очевидно, что $z \in M$ тогда и только тогда, когда $z^\rho \in M$, для любого автоморфизма $\rho \in \mathrm{Aut}(F)$. Рассмотрим множество функций $\varphi_{\rho,s,a,c} : M \to F$,

$$\varphi_{\rho,s,a,c}(z) = \frac{(a^3 + a^2cs + ac^2(\delta+s) + c^3(\delta+s+\delta s))z^\rho + a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta)}{(a^3(1+s) + a^2c\delta + ac^2\delta s + c^3\delta(\delta+s))z^\rho + a^3 + ac^2\delta + c^3\delta},$$

где $s \in \{0,1\}$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$. Заметим, что $\forall z \in M$ $\varphi_{\rho,s,a,c}(z) \in M$. Действительно, если $\varphi_{\rho_1,s_1,a_1,c_1}(z) \notin M$, то

$$(a_2^3(1+s_2) + a_2^2c_2\delta + a_2c_2^2\delta s_2 + c_2^3\delta(\delta+s_2))\,(\varphi_{\rho_1,s_1,a_1,c_1}(z)) + a_2^3 + a_2c_2^2\delta + c_2^3\delta = 0,$$

для некоторых $\rho_1, s_1, a_1, c_1, s_2, a_2, c_2$. Отсюда

$$(a^3(1+s) + a^2c\delta + ac^2\delta s + c^3\delta(\delta+s))z^{\rho_1} + a^3 + ac^2\delta + c^3\delta = 0,$$

где $s = s_1 + s_2 + 1$, $a = a_1a_2 + c_1a_2(1+s_2) + c_1c_2$, $c = a_1c_2 + c_1a_2 + c_1c_2s_2$, и мы получаем противоречие с условием $z \in M$. Кроме того, $\varphi_{\rho_2,s_2,a_2,c_2}(\varphi_{\rho_1,s_1,a_1,c_1}(z)) = \varphi_{\rho,s,a,c}(z)$, где $s = s_1 + s_2 + 1$, $a = a_1^{\rho_2}a_2 + c_1^{\rho_2}a_2(1+s_2) + c_1^{\rho_2}c_2$, $c = a_1^{\rho_2}c_2 + c_1^{\rho_2}a_2 + c_1^{\rho_2}c_2s_2$, $\rho = \rho_1\rho_2$.

Пусть $\mathcal{K} = \{\varphi_{\rho,s,a,c} | \varphi_{\rho,s,a,c} : M \to M\}$. Докажем, что относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K},\ z \in M)$ данное множество образует группу. Выполнимость аксиомы ассоциативности очевидна. Функция $\varphi_{e,1,1,0}$ является единицей группы (e – тождественный автоморфизм). Наконец, пусть $\varphi_{\rho,s,a,c} \in \mathcal{K}$, тогда $\varphi^{-1}_{\rho,s,a,c} = \varphi_{\rho',s',a',c'}$, где $s' = s$, $\rho' = \rho^{-1}$, $a' = \left(a^{\rho^{-1}} + c^{\rho^{-1}} s\right)/\Delta^{\rho^{-1}}$, $c' = c^{\rho^{-1}}/\Delta^{\rho^{-1}}$.

Очевидно, что группа $\mathcal{K}$ действует на множестве M, то есть $\phi_1(\phi_2(z)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(z)$ и $\varphi_{e,1,1,0}(z) = z$ для всех $z \in M$, ϕ_1, $\phi_2 \in \mathcal{K}$. Относительно этого действия множество M разбивается на непересекающиеся орбиты. Множество представителей орбит обозначим через $\mathcal{K} \setminus M$.

Рассмотрим четверки матриц

$$\Omega_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1+\delta z_1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1+\delta z_1 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\Omega_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 1+\delta z_2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 1+\delta z_2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

где $z_1, z_2 \in M$. Предположим, что z_1 и z_2 принадлежат одной $\mathcal{K}$-орбите, тогда при некоторых a, c, s и ρ имеем $\varphi_{\rho,s,a,c}(z_1) = z_2$. Полагая P, R равными стабилизирующим матрицам и

$$t = \Delta/(a^3(1+s) + a^2c\delta + ac^2\delta s + c^3\delta(\delta+s))z^\rho + a^3 + ac^2\delta + c^3\delta),$$

получаем $\Omega_1 \sim \Omega_2$. Обратно, если $\Omega_1 \sim \Omega_2$ относительно некоторых матриц P, R и t, то из равенства $C' = tP^TC^\rho R$ имеем

$$t((a^3(1+s) + a^2c\delta + ac^2\delta s + c^3\delta(\delta+s))z_1^\rho + a^3 + ac^2\delta + c^3\delta)/\Delta = 1,$$

$$t((a^3 + a^2cs + ac^2(\delta+s) + c^3(\delta+s+\delta s))z_1^\rho + a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta))/\Delta = z_2.$$

Выражая t из первого равенства и подставляя во второе, имеем $\varphi_{\rho,s,a,c}(z_1) = z_2$, то есть z_1 и z_2 принадлежат одной $\mathcal{K}$-орбите. Итак,

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}\right], \quad z \in \mathcal{K}\backslash M. \tag{2.2}$$

Заметим, что четверки (2.1) и (2.2) неэквивалентны в силу определения множества M.

Случай 2.1: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right].$$

Полагая $P = 1/aE$, $R = 1/a^2E$, $t = a^3$, $s = 1$, $S = a^3 \begin{pmatrix} b_{22} + b_{11}\delta & b_{11} \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^2(b_{21} + b_{22} + b_{11}\delta) \end{pmatrix}$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a(b_{12} + b_{21}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Если $b_{12} = b_{21}$, то, полагая $a = 1$, получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{2.1.1}$$

Иначе, полагая $a = 1/(b_{12} + b_{21})$, получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{2.1.2}$$

Случай 2.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}$, $z \in \mathcal{K} \backslash M$. Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ z \in \mathcal{K} \backslash M.$$

Полагая $P = 1/a\, E$, $R = 1/a^2\, E$, $t = a^3$, $s = 1$, $S = a^3 \begin{pmatrix} b_{22} + b_{11}\delta & b_{11} \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} 0 & a^2(b_{21} + b_{22} + b_{11}\delta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, получим

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a(b_{12} + b_{21}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{12} = b_{21}$, то, полагая $a = 1$, получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{2.2.1}$$

Иначе, полагая $a = 1/(b_{12} + b_{21})$, получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{2.2.2}$$

Случай 3: Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \ \text{где } c_{ij} \in F.$$

В этом случае ($\delta = 0$) матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ x & x \end{pmatrix}, \ \text{где } x, y \in F.$$

Рассмотрим четверку матриц

$$\Omega = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ x & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ x & x \end{pmatrix} \right].$$

Если $x = 0$, то, полагая $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $t = 1/y$ ($y \neq 0$, так как $C \neq 0$) получим

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{3.1}$$

Если $x \neq 0$, то, полагая $P = R = E$, $t = 1/x$, получим

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y/x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y/x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Рассмотрим четверку матриц

$$\Omega = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}\right], \ z \in F.$$

Если $z = 1$, то получаем четверку (3.1). Пусть $z \neq 1$ и P, R – стабилизирующие матрицы для (A_1, A_2). Тогда при $s \in \{0,1\}$ из равенства (4) получаем

$$tP^TC^\rho R = \begin{cases} \dfrac{t}{(a+c)^3}\begin{pmatrix}1 & ((a^3+ac^2+a^2c+c^3)z^\rho + c^3+a^2c+ac^2)/a^3\\1 & 1\end{pmatrix}, s=1;\\ \dfrac{t}{(a+c)^3}\begin{pmatrix}z^\rho+1 & (a^3z^\rho+a^2c+ac^2+c^3)/a^3\\z^\rho+1 & z^\rho+1\end{pmatrix}, s=0.\end{cases}$$

Пусть $t = (a+c)^3$, при $s = 1$, и $t = (z^\rho+1)(a+c)^3$, при $s = 0$. Тогда

$$tP^TC^\rho R = \begin{cases} \begin{pmatrix}1 & (\alpha+1)^3(z^\rho+1)+1\\1 & 1\end{pmatrix}, & \text{при} \ \ s=1;\\ \begin{pmatrix}1 & 1+(\alpha+1)^3/(z^\rho+1)\\1 & 1\end{pmatrix}, & \text{при} \ \ s=0,\end{cases}$$

где $\alpha = c/a$. Если $z^\rho + 1 \in (F^*)^3$, то, полагая $\alpha = \sqrt[3]{z^\rho+1} + 1$ (то есть $a = 1$, $c = \alpha$) при $s = 0$, получаем, что

$$\Omega \sim \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right]. \tag{3.2}$$

Заметим, что $z+1 \in (F^*)^3$ тогда и только тогда, когда $z^\rho+1 \in (F^*)^3$. Пусть z и z' – такие элементы F^*, что $z+1, z'+1 \notin (F^*)^3$, тогда $(z'+1)(z+1) \in (F^*)^3$ или $(z'+1)/(z+1) \in (F^*)^3$. Полагая $\alpha = \sqrt[3]{(z'+1)/(z+1)}+1$, $\rho = e$, $s = 1$ или $\alpha = \sqrt[3]{(z'+1)(z+1)}+1$, $\rho = e$, $s = 0$, получаем

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}\right] \sim \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z'\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z'\\1 & 1\end{pmatrix}\right].$$

Таким образом, последний в данном случае класс эквивалентности имеет представитель

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}\right], \tag{3.3}$$

где z – такой элемент F, что $z+1 \notin (F^*)^3$, $z \neq 1$.

Пятерки матриц (3.2) и (3.3) неэквивалентны в силу вышеприведенных рассуждений. Пятерка (3.1) неэквивалентна (3.2) и (3.3), так как матрица $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ вырожденная, а матрицы $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}$ невырожденные ($z \neq 0, 1$).

Определим представителей классов эквивалентности на пятерках матриц, одновременно рассматривая ситуации (3.1), (3.2) и (3.3). Пусть

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & z\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right],$$

где $z=0$ или $z=1$ или $z+1\notin (F^*)^3$. Если $b_{12}=b_{21}$, то, полагая $P=R=E$, $t=1$, $s=1$, $S=\begin{pmatrix} b_{22} & b_{11}\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} b_{21}+b_{22} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, получаем

$$\Pi\sim\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&z\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&z\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]. \qquad (3.1.1)$$

Если $b_{12}\neq b_{21}$, то, полагая $P=(b_{12}+b_{21})E$, $R=(b_{12}+b_{21})^2E$, $t=1/(b_{12}+b_{21})^3$, $s=1$, $S=1/(b_{12}+b_{21})^3\begin{pmatrix} b_{22} & b_{11}\end{pmatrix}$ и $Q=1/(b_{12}+b_{21})^2\begin{pmatrix} b_{21}+b_{22} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, получаем

$$\Pi\sim\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&z\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&z\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]. \qquad (3.1.2)$$

4. Основной результат

Теорема 1. *Пятерки матриц, представленные ниже, определяют все попарно неизоморфные коммутативные конечные локальные кольца с условиями:*

$$\mathrm{char}R=2,\ J^4=0,\ \dim_F J/J^2=2,\ \dim_F J^2/J^3=2,\ \dim_F J^3=1,$$

где $F=R/J$.

1) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$;

2) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;

3) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$;

4) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;

5) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}0&1\\\delta&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

где $\delta\neq x^2+x$ *для всех* $x\in F$;

6) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}1&z\\1+\delta z&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

где $z\in\mathcal{K}\backslash M$, $\delta\neq x^2+x$ *для всех* $x\in F$;

7) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$;

8) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$;

9) $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=D=\begin{pmatrix}1&z\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

где z *– такой элемент* F, *что* $z+1\neq(F^*)^3$, $z\neq 1$.

Заметим, что при нечетном r в поле $F=GF(2^r)$ из любого элемента извлекается однозначно кубический корень. Поэтому последняя пятерка матриц предполагается только для случая $F=GF(2^r)$, r – четное.

В ходе доказательства теоремы также были получены последовательности:

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

5) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

где $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$;

6) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta z & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

где $z \in \mathcal{K} \backslash M$, $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$;

7) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

8) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

9) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

где z – такой элемент F, что $z + 1 \neq (F^*)^3$, $z \neq 1$,

определяющие некоторые попарно неизоморфные некоммутативные конечные локальные кольца с условиями:

$$\mathrm{char} R = 2,\ J^4 = 0,\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1, F \subseteq Z(R).$$

Как было указано выше, это все кольца, пара матриц умножения (A_1, A_2) которых эквивалентна $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ или $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right)$.

References

[1] В.Г. Антипкин, В.П. Елизаров, *Кольца порядка* p^3, Сибирский математический журнал, **23**:4 (1982), 9–18. MR0668331

[2] В.П. Елизаров, *Ненильпотентные конечные кольца*, Рукопись деп. в СО АН СССР (редколлегия Сибирского математического журнала), **1472**:85 (1985).

[3] В.А. Ратинов, *Полусовершенные кольца со специальными типами присоединенных групп*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Москва, 1980.

[4] J.B. Derr, G.F. Orr, P.S. Peck, *Noncommutative rings of order* p^4, Journal of Pure and Applied Algebra, **97** (1994), 109–116. MR1312757

[5] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order* p^5*. Part 1. Nonlocal rings*, J. Algebra, **231** (2000), 677–690. MR1778165

[6] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order* p^5*. Part 2. Local rings*, J. Algebra, **231** (2000), 691–704. MR1778166

[7] B. Corbas, it Rings with few zero divizors, Math. Ann., **45** (1969), 1–7.

[8] B. Corbas, it Finite rings in which the product of any two zero divisors is zero, Archiv der Math., bf 21 (1970), 466–469.

[9] C.J. Chikunji, *On a Class of finite rings*, Communication in Algebra, **27**:10 (1999), 5049–5081. MR1709253

[10] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order p^6 with 4-nilpotent radical of Jacobson*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 15–29. MR2172790

[11] E.V. Zhuravlev, *About classification finite local rings characteristics p^2, Jacobson radical which has an index of nilpotency four*, The news of Altai state university, **1**:57 (2008), 18–28.

[12] E.V. Zhuravlev, *About izomorphism of finite local rings of characteristics p^2, Jacobson radical which has an index of nilpotency four*, The news of Altai state university, **1**:61 (2009), 10–16.

[13] B. Corbas, G.D. Williams, *Congruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2)*, Pacific Journal of Mathematics, **188**: 2 (1999), 237–249. MR1684133

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru