S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 639–650 (2015) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2015.12.051 MSC 60F10, 60J25

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.В. ЛОГАЧЕВ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

Abstract. In this paper it was obtained the large deviation principle for the sequence of random processes $Y_n(t) = \frac{1}{n}\int\limits_0^{nt} h(X(u))du$, where $X(u)$ is a homogeneous Markov process, $h(x)$ is a continuous function, $t \in [0,1]$. In particular, it was proved the large deviation principle for the integral of the telegraph signal process.

Keywords: Large deviations, Markov process, telegraph signal process.

1. Введение

В данной работе нас будет интересовать принцип больших уклонений (п.б.у.) для последовательности случайных процессов

$$Y_n(t) = \frac{1}{n}\int\limits_0^{nt} h(X(u))du, \quad t \in [0,1], \tag{1.1}$$

где $h(x)$ – непрерывная на отрезке $[-T,T]$ функция, $X(t)$, $t \geq 0$ – однородный по времени марковский процесс, определенный на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P} \rangle$, с фазовым пространством $\mathcal{X}$, которое является компактным подмножеством множества $[-T,T]$.

Дополнительно будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(1) Траектории случайного процесса $X(t)$ непрерывны справа и имеют пределы слева;

Logachov, A.V., Prokopenko, E.I., Large deviation principle for integral functionals of a Markov process.

Поступила 23 марта 2015 г., опубликована 22 сентября 2015 г.

(2) Существует вероятностная мера $\lambda(dx)$, заданная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{[-T,T]}$ отрезка $[-T,T]$ такая, что для всех $t > 0$

$$p(t,x,dy) = p(t,x,y)\lambda(dy),$$

где $p(t,x,dy)$ – плотность переходной вероятности процесса $X(t)$;

(3) Существуют функции $a(t)$ и $A(t)$ такие, что для любых $x, y \in \mathcal{X}, t > 0$

$$0 < a(t) \leq p(t,x,y) \leq A(t) < \infty.$$

Условия 1-3 обусловлены тем, что в дальнейшем мы будем применять широко известный результат [1], который получили M.D. Donsker и R.S. Varadhan в 1975 г.

Работы, посвященные п.б.у. для интегральных и аддитивных функционалов от марковских процессов можно разделить на два типа: принцип умеренно больших уклонений и непосредственно п.б.у. Принцип умеренно больших уклонений для интегралов от процессов типа телеграфного сигнала получен в [2], для интегралов от диффузионных процессов в [3], для случая когда нормированный интеграл удовлетворяет центральной предельной теореме в [4], для эргодических марковских процессов в [5], п.б.у. для времени пребывания симметричных марковских процессов получен в [6], для аддитивных функционалов от марковских цепей в [7].

Работа построена по следующему плану: в §1 вводятся основные обозначения и определения; в §2 формулируется основная теорема статьи, которая доказывается в §3 после доказательства вспомогательных лемм; в §4 доказывается п.б.у. для интеграла от процесса телеграфного сигнала.

Пространство вероятностных мер $\mu = \mu(A)$ заданных на $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathcal{M}$.

В пространстве $\mathcal{M}$ введем метрику Леви-Прохорова L. Напомним ее определение (см., например, [8]).

Определение 1.1. Для мер $\mu_1,\ \mu_2$, принадлежащих пространству $\mathcal{M}$, определим расстояние $L(\mu_1, \mu_2)$ как нижнюю грань тех δ, для которых при всех замкнутых множествах $A \in \mathfrak{B}$ выполнены неравенства

$$\mu_1(A) \leq \mu_2(A_\delta) + \delta,\ \ \mu_2(A) \leq \mu_1(A_\delta) + \delta,$$

где $A_\delta := \{x \in [-T,T] : \inf\limits_{y \in A} |x-y| < \delta\}$.

Пространство $(\mathcal{M}, L)$ является польским (см., например, дополнение 3 в [9]). Для случайного процесса $X(t)$, удовлетворяющего начальному условию $X(0) = x, x \in \mathcal{X}$ (такой процесс далее будем обозначать через $X_x(t)$), определим случайную меру $\nu_{n,x} \in \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\nu_{n,x}(A) := \frac{1}{n}\int\limits_0^n \mathbf{1}_A\left(X_x(u)\right)du$$

— это доля времени отрезка $[0,n]$, которое процесс $X(t)$ проводит в множестве $A \subseteq [-T,T]$ (здесь $\mathbf{1}_A(\cdot)$ — индикатор множества A).

Определение 1.2. Функционал $I = I(y) : Y \to [0,\infty]$, будем называть функционалом уклонений, если для любого $c \geq 0$ множество $\{y \in Y\ :\ I(y) \leq c\}$

является компактом в метрическом пространстве (м.п.) (Y, d). Известно (см., например, [13]), что функционал уклонений непрерывен снизу, т.е.

$$\liminf_{y_n \to y} I(y_n) \geq I(y).$$

Для борелевского множества B из м.п. (Y, d), через $(B), [B]$ будем обозначать внутренность и замыкание множества B, соответственно.

Определение 1.3. Будем говорить, что случайные элементы η_n удовлетворяют п.б.у. в м.п. (Y, d) с функционалом уклонений I, если для любого множества $B \in \mathfrak{B}_{(Y,d)}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\, \eta_n \in B\,) \leq -I([B]),$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\, \eta_n \in B\,) \geq -I((B)),$$

где $I(A) = \inf_{y\in A} I(y)$.

2. Основная теорема

Обозначим через $\mathcal{A}$ инфинитезимальный оператор марковского процесса $X(t)$. Пусть $\mathfrak{D}$ — множество функций, для которых он определен.

Пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с заданной на нем равномерной метрикой ρ обозначим $\mathbb{C}$. Через $\mathbb{C}_a$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций, выходящих из нуля.

Для формулировки основной теоремы нам потребуется следующая лемма, которая вытекает из теоремы 3 работы [1].

Лемма 2.1. *Последовательность мер $\nu_{n,x}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $(\mathcal{M}, L)$ с функционалом уклонений*

$$I(\mu) = \begin{cases} -\inf\limits_{u>0, u\in\mathfrak{D}} \int\limits_{\mathcal{X}} \frac{\mathcal{A}u(x)}{u(x)}\mu(dx), \;\; \mu(\mathcal{X}) = 1, \\ +\infty, \;\; \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Напомним, что $Y_n(t)$ определяется равенством (1.1), где $h(x)$ —непрерывная функция на отрезке $[-T, T]$. Обозначим $h_- = \inf\limits_{x\in\mathcal{X}} h(x), h_+ = \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} h(x)$.

Теорема 2.1. *Пусть марковский однородный по времени процесс $X(t)$ удовлетворяет условиям 1-3. Тогда последовательность процессов $Y_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{C}$ с функционалом уклонений*

$$J(f) = \begin{cases} \int\limits_0^1 V(f'(t))dt, \;\; \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \;\; h_- \leq f'(t) \leq h_+, \\ +\infty, \;\; \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$V(y) = \inf_{\left\{\mu: \int\limits_{\mathcal{X}} h(x)\mu(dx) = y\right\}} I(\mu).$$

3. Вспомогательные результаты, доказательство основной теоремы

Из теоремы 2.4 [11] вытекает следующая

Лемма 3.1. *Пусть A - непрерывный оператор, действующий из м.п. (Y,d) в м.п. (X,ρ). Тогда, если последовательность η_n удовлетворяет п.б.у. в (Y,d) с функционалом уклонений $I(y), y \in Y$, то последовательность $A(\eta_n)$ удовлетворяет п.б.у. в (X,ρ) с функционалом уклонений*

$$J(x) := \inf_{\{y\,:\,A(y)=x\}} I(y),\ x \in X.$$

Прежде чем доказывать теорему 2.1 сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Для $\Delta > 0$ обозначим

$$Y_{n,x}(\Delta) := \frac{1}{\Delta n}\int\limits_0^{\Delta n} h(X_x(u))du.$$

Лемма 3.2. *Для любых $x \in \mathcal{X}$ последовательность случайных величин $Y_{n,x}(\Delta)$ удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{R}$ с функционалом уклонений*

$$I_\Delta(y) = \begin{cases} \Delta V(y),\ h_- \le y \le h_+, \\ +\infty,\ \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность случайных вероятностных мер

$$\nu_{\Delta n,x}(A) = \frac{1}{\Delta n}\int\limits_0^{\Delta n} \mathbf{1}_A\left(X_x(u)\right)du.$$

Пусть $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{M}, L)$. Обозначим $r = \Delta n$, используя лемму 2.1 получаем

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\nu_{\Delta n,x} \in B) = \Delta\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\mathbf{P}(\nu_{r,x} \in B) \le -\Delta I([B]).$$

Аналогично получается нижняя оценка п.б.у. Значит, последовательность мер $\nu_{\Delta n,x}$ удовлетворяет п.б.у. с функционалом уклонений $\Delta I(\mu)$.

Рассмотрим функционал, действующий из пространства $(\mathcal{M}, L)$, который задается следующим образом

$$A(\mu) = \int\limits_{-T}^{T} h(v)\mu(dv).$$

Так как сходимость в метрике L эквивалентна слабой сходимости мер, то в силу непрерывности функции $h(v)$ функционал $A(\mu)$ непрерывен.

Легко видеть, что

$$Y_{n,x}(\Delta) = \frac{1}{\Delta n}\int\limits_0^{\Delta n} h(X_x(u))du = \int\limits_{-T}^{T} h(v)\nu_{\Delta n,x}(dv) = A(\nu_{\Delta n,x}).$$

Поэтому, в силу леммы 3.1, последовательность $Y_{n,x}(\Delta)$ удовлетворяет п.б.у. с функционалом уклонений I_Δ, определяемого равенством (3.1). □

Замечание 3.1. Из леммы 3.2 следует, что для любого $x \in \mathcal{X}$ последовательность случайных величин $Y_{n,x}(\Delta)$ удовлетворяет локальному п.б.у. в $\mathbb{R}$ (см., например, замечание 3.1 [14]), а именно, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(Y_{n,x}(\Delta)\in(\alpha)_\varepsilon \right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(Y_{n,x}(\Delta)\in(\alpha)_\varepsilon \right)=-I_\Delta(\alpha),$$

где $(\alpha)_\varepsilon$ — ε-окрестность точки α.

Лемма 3.3. *Для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \sup_{x\in\mathcal{X}}\mathbf{P}(Y_{n,x}(\Delta)\in(\alpha)_\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \inf_{x\in\mathcal{X}}\mathbf{P}(Y_{n,x}(\Delta)\in(\alpha)_\varepsilon)=-I_\Delta(\alpha). \tag{3.2}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon>0$, при достаточно больших $n\in\mathbb{N}$, имеем $\frac{1}{\Delta n}\left|\int\limits_0^1 h(X_x(u))du\right| < \varepsilon/4$, следовательно, в силу аддитивности интеграла $\int\limits_0^{\Delta n}=\int\limits_0^1+\int\limits_1^{\Delta n}$, выполнено

$$p(\varepsilon):=\mathbf{P}\left(\frac{1}{\Delta n}\int\limits_1^{\Delta n}h(X_x(u))du\in(\alpha)_{3\varepsilon/4}\right)\le \mathbf{P}\left(Y_{n,x}(\Delta)\in(\alpha)_\varepsilon\right)$$

$$\le \mathbf{P}\left(\frac{1}{\Delta n}\int\limits_1^{\Delta n}h(X_x(u))du\in(\alpha)_{5\varepsilon/4}\right)=p\left(\frac{5\varepsilon}{3}\right). \tag{3.3}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ оценим снизу $p(\varepsilon)$. Так как процесс $X(t)$ марковский и однородный по времени, то для всех $x\in\mathcal{X}$ будем иметь

$$p(\varepsilon)=\int\limits_{-T}^{T}p(1,x,v)\mathbf{P}\left(\frac{1}{\Delta n}\int\limits_1^{\Delta n}h(X(u))du\in(\alpha)_{3\varepsilon/4}\middle|X(1)=v\right)\lambda(dv)$$

$$=\int\limits_{-T}^{T}p(1,x,v)\mathbf{P}\left(\frac{1}{\Delta n}\int\limits_0^{(\Delta-\frac{1}{n})n}h(X_v(u))du\in(\alpha)_{3\varepsilon/4}\right)\lambda(dv).$$

Так как $\frac{1}{\Delta n}\left|\int\limits_{(\Delta-\frac{1}{n})n}^{\Delta n}h(X_v(u))du\right|<\varepsilon/4$ при достаточно больших n, то

$$p(\varepsilon)\ge\int\limits_{-T}^{T}p(1,x,v)\mathbf{P}(Y_{n,v}(\Delta)\in(\alpha)_{\varepsilon/2})\lambda(dv).$$

Вспомним, что в силу условия 3, существуют постоянные $0 < a(1) \leq A(1) < \infty$ такие, что $a(1) \leq p(1, x, v) \leq A(1)$ для всех $v, x \in \mathcal{X}$, тогда

$$p(\varepsilon) \geq a(1) \int_{-T}^{T} \mathbf{P}(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon/2}) \lambda(dv). \tag{3.4}$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим оценку сверху:

$$p\left(\frac{5\varepsilon}{3}\right) \leq A(1) \int_{-T}^{T} \mathbf{P}(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{3\varepsilon/2}) \lambda(dv). \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.3), (3.4), (3.5) следует, что для всех $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{X}$

$$a(1) \int_{-T}^{T} \mathbf{P}(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon/2}) \lambda(dv) \leq \mathbf{P}(Y_{n,x}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon})$$

$$\leq A(1) \int_{-T}^{T} \mathbf{P}(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{3\varepsilon/2}) \lambda(dv). \tag{3.6}$$

Заметим, что правая и левая часть неравенств (3.6) не зависят от начального значения $x \in \mathcal{X}$. Используя неравенства (3.6), получим для любых $x, y \in \mathcal{X}, \varepsilon > 0$ выполнено

$$\frac{1}{A(1)} \mathbf{P}(Y_{n,x}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon/3}) \leq \int_{-T}^{T} \mathbf{P}(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon/2}) \lambda(dv)$$

$$\leq \frac{1}{a(1)} \mathbf{P}(Y_{n,y}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon}).$$

Из последнего, применяя замечание 3.1, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\int_{-T}^{T} \mathbf{P}\left(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon}\right) \lambda(dv) \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\int_{-T}^{T} \mathbf{P}\left(Y_{n,v}(\Delta) \in (\alpha)_{\varepsilon}\right) \lambda(dv) \right) = -I_{\Delta}(\alpha). \tag{3.7}$$

Для установления (3.2) осталось снова воспользоваться неравенствами (3.6) и равенствами (3.7). □

Рассмотрим разбиение

$$\mathbf{t}_m = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}, \ t_0 = 0 < t_1 < \ldots t_{m-1} < t_m = 1,$$

отрезка $[0, 1]$ на непересекающиеся полуинтервалы $\Delta_k[t_{k-1}) = [t_{k-1}, t_{k-1} + \Delta_k)$, $k = 1, \ldots, m$, где $\Delta_k := t_k - t_{k-1}$. Последовательность $\{\mathbf{t}_m\}$ таких разбиений при $m \to \infty$ будем называть *плотной,* если

$$\max_{1 \leq k \leq m} \Delta_k \to 0, \ \text{при} \ \ m \to \infty.$$

Лемма 3.4. *Для любых $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ и для любого разбиения $\{\mathbf{t}_m\}$ выполняется*

(3.8)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right\}\right) = -\sum_{k=1}^{m} I_{\Delta_k}\left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k}\right),$$

(3.9)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right\}\right) = -\sum_{k=1}^{m} I_{\Delta_k}\left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $X(t)$ однородный по времени марковский процесс, то для всех $0 \le t_{k-1} < t_k \le 1$ выполнено

$$\mathbf{P}\left(\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon \middle| X(nt_{k-1}) = x\right) = \mathbf{P}\left(\int\limits_{0}^{n(t_k-t_{k-1})} h(X_x(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right).$$

Тогда для всех $0 \le t_{k-1} < t_k < t_{k+1} \le 1$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon; \frac{1}{n}\int\limits_{nt_k}^{nt_{k+1}} h(X(u))du \in (\alpha_{k+1})_\varepsilon\right)$$
$$= \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon; X(nt_k) \in dx; \frac{1}{n}\int\limits_{nt_k}^{nt_{k+1}} h(X(u))du \in (\alpha_{k+1})_\varepsilon\right)$$
$$= \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon; X(nt_k) \in dx\right) \times \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{n\Delta_{k+1}} h(X_x(u))du \in (\alpha_{k+1})_\varepsilon\right).$$

И, следовательно, легко получить следующие два неравенства

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right)\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathbf{P}\left(\Delta_{k+1}Y_{n,x}(\Delta_{k+1}) \in (\alpha_{k+1})_\varepsilon\right)$$
$$\le \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon; \frac{1}{n}\int\limits_{nt_k}^{nt_{k+1}} h(X(u))du \in (\alpha_{k+1})_\varepsilon\right)$$

$$\le \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right) \sup_{x\in\mathcal{X}} \mathbf{P}\left(\Delta_{k+1}Y_{n,x}(\Delta_{k+1}) \in (\alpha_{k+1})_\varepsilon\right).$$

Откуда, по индукции, получаем следующие неравенства

$$\prod_{k=1}^{m} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathbf{P}\left(\Delta_k Y_{n,x}(\Delta_k) \in (\alpha_k)_\varepsilon\right) \le \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right\}\right)$$

$$\le \prod_{k=1}^{m} \sup_{x\in\mathcal{X}} \mathbf{P}\left(\Delta_k Y_{n,x}(\Delta_k) \in (\alpha_k)_\varepsilon\right). \tag{3.10}$$

Обозначим $\varepsilon_k = \varepsilon/\Delta_k$. Из леммы 3.3 и (3.10) следует, что

$$-\sum_{k=1}^{m} I_{\Delta_k}\left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{m}\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathbf{P}\left(Y_{n,x}(\Delta_k) \in \left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k}\right)_{\varepsilon_k}\right)$$

$$\le \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{nt_{k-1}}^{nt_k} h(X(u))du \in (\alpha_k)_\varepsilon\right\}\right)$$

$$\le \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{m}\sup_{x\in\mathcal{X}}\mathbf{P}\left(Y_{n,x}(\Delta_k) \in \left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k}\right)_{\varepsilon_k}\right) = -\sum_{k=1}^{m} I_{\Delta_k}\left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k}\right).$$

Откуда следует (3.8). Равенство (3.9) получается аналогично из (3.10), взятием нижнего предела. □

Для последующего доказательства теоремы 2.1 нам потребуется несколько известных определений и утверждений, впервые полученных Пухальским в [12]:

Определение 3.1. Последовательность случайных элементов η_n является экспоненциально плотной в м.п. (Y, d), если для любого $\alpha < \infty$ найдется компакт $K_\alpha \subset Y$ такой, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\,\eta_n \notin K_\alpha\,) < \alpha.$$

Известно следующее свойство экспоненциально плотных последовательностей (см., например, замечание 3.1 в [14] и лемму 4.1.23 в [13]):

Замечание 3.2. Если экспоненциально плотная последовательность η_n удовлетворяет локальному п.б.у. в м.п. (Y, d), то η_n удовлетворяет п.б.у. в (Y, d) с тем же функционалом уклонений.

Обозначим через $\mathbb{D}$ — пространство непрерывных справа и имеющих предел слева функций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, с метрикой Скорохода.

Определение 3.2. Последовательность случайных процессов $Y_n(t)$, $t \in [0, 1]$ является $C-$экспоненциально плотной в $\mathbb{D}$, если она экспоненциально плотна в $\mathbb{D}$ и для всех $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(\sup_{0\le s\le 1}\rho(Y_n(s), Y_n(s-)) \ge \varepsilon\,) = \infty.$$

Комбинируя Теоремы 4.30, 4.14 из [14] и лемму 3.2 из [2], можно получить следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть T_0 всюду плотное множество отрезка $[0,1]$ и последовательность процессов $Y_n(t), t \in [0,1]$ является $C-$экспоненциально плотной в $\mathbb{D}$. Если для всех разбиений $\mathbf{t}_m \in T_0$ случайный вектор $(Y_n(t_1), \cdots, Y_n(t_m))$ удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{R}^m$ с функцией уклонений $I_{t_1,\cdots,t_m}$, то $Y_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{C}$ с функционалом уклонений*

$$I(f) := \sup_{\mathbf{t}_m \subset T_0} I_{t_1,\cdots,t_m}(f(t_1), \cdots, f(t_m)).$$

Для произвольной выпуклой, полунепрерывной снизу функции $G(y) \; : \; R \to [0,\infty]$ определим *интеграл уклонений*

$$I(f) := \begin{cases} \int\limits_0^1 G(f'(t))dt, \text{ если } f \in \mathbb{C}_a, \\ +\infty, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из Теоремы 2.1 работы [15] очевидным образом вытекает следующая

Теорема 3.2. *Для любой функции $f \in \mathbb{D}$, любого плотного разбиения $\mathbf{t}_m$ выполнено*

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m G\left(\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sup_{\mathbf{t}_m \subset T_0} \sum_{k=1}^m G\left(\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $h_- \le Y_n(t) \le h_+$ п.н., то для любого разбиения $\mathbf{t}_m$ последовательность случайных векторов

$$\overline{Y}_n = \big(Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1), \cdots, Y_n(t_m) - Y_n(t_{m-1})\big)$$

является экспоненциально плотной. Из леммы 3.4 следует, что она также удовлетворяет локальному п.б.у. в $\mathbb{R}^m$. Поэтому, в силу замечания 3.2, последовательность $\overline{Y}_n$ удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{R}^m$ с функционалом уклонений

$$\tilde{J}_m(\overline{y}) = \sum_{k=1}^m I_{\Delta_k}\left(\frac{y_k}{\Delta_k}\right) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^m \Delta_k V\big(\frac{y_k}{\Delta_k}\big), \; h_- \le \frac{y_k}{\Delta_k} \le h_+, \\ +\infty, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрев непрерывный оператор A, действующий из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$ по принципу

$$A(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \left(y_1, \; y_1 + y_2, \; y_1 + y_2 + y_3, \cdots, \sum_{k=1}^m y_k\right),$$

и применив лемму 3.1 получим, что случайный вектор

$$\big(Y_n(t_1), Y_n(t_2), \cdots, Y_n(t_m)\big)$$

удовлетворяет п.б.у. с функционалом уклонений

$$J_m(\overline{y}) = \inf_{\overline{x}: \; x_1 = y_1, x_1 + x_2 = y_2, \cdots, \sum\limits_{k=1}^m x_k = y_m} \tilde{J}_m(\overline{x}) \tilde{J}_m((y_1, y_2 - y_1, \cdots, y_m - y_{m-1}))$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \Delta_k V\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta_k}\right), \ h_- \le \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta_k} \le h_+, \\ +\infty, \ \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Так как функция $h(x)$ непрерывна на отрезке [-T,T], то последовательность случайных процессов $Y_n(t)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, поэтому, в силу теоремы Асколи-Арцела, принадлежит компакту с вероятностью 1. Значит, последовательность процессов $Y_n(t)$ экспоненциально плотна в $\mathbb{C}$. При этом $Y_n(t)$ также будет $C-$экспоненциально плотной в $\mathbb{D}$, в силу непрерывности.

Поэтому из (3.11) и теоремы 3.1 следует, что последовательность процессов удовлетворяет п.б.у. с функционалом уклонений

$$J(f) = \sup_{\{t_k\} \subset T_0} \sum_{k=1}^{m} V\left(\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)(t_k - t_{k-1}),$$

где $T_0 \subseteq [0,1]$ – всюду плотное подмножество. Который, в свою очередь, в силу теоремы 3.2, принимает вид

$$J(f) = \begin{cases} \int\limits_0^1 V(f'(t))dt, \ \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \ h_- \le f'(t) \le h_+, \\ +\infty, \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

□

4. Принцип больших уклонений для интеграла от процесса телеграфного сигнала

В этом параграфе мы будем рассматривать марковский однородный по времени процесс $X(t) = (-1)^{\nu(t)}$, где $\nu(t)$ – пуассоновский процесс с $\mathbf{E}\nu(t) = \lambda t$. Очевидно, что фазовое пространство процесса $(-1)^{\nu(t)}$ имеет вид $\mathcal{X} = \{-1\} \cup \{1\} \subseteq [-1, 1]$.

Нас будет интересовать п.б.у. для последовательности процессов

$$Y_n(t) = \frac{1}{n} \int\limits_0^{nt} (-1)^{\nu(u)} du, \quad t \in [0,1].$$

Заметим, что принцип умеренно больших уклонений $\big($ т.е. когда нормирующий множитель равен $\sqrt{n}\varphi(n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0, \ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty\big)$ следует из работы [2].

Теорема 4.1. *Последовательность процессов $Y_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{C}$ с функционалом уклонений*

$$J(f) = \begin{cases} \lambda \int\limits_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - (f'(t))^2}\right)dt, \ \textit{если } f \in \mathbb{C}_a, \ |f'(t)| \le 1, \\ +\infty, \ \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем инфинитезимальный оператор процесса $(-1)^{\nu(t)}$. Для произвольной ограниченной на $\mathcal{X}$ функции $u(x)$

$$\mathcal{A}u(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E_x} u(X(t)) - u(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E} u(x(-1)^{\nu(t)}) - u(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{u(x)e^{-\lambda t}\cosh(\lambda t) + u(-x)e^{-\lambda t}\sinh(\lambda t) - u(x)}{t} = \lambda(u(-x) - u(x)),$$

где $x \in \{-1\} \cup \{1\}$.

Используя лемму 2.1, получаем для мер $\mu: \ \mu(\{-1\}) + \mu(\{1\}) = 1$

$$I(\mu) = -\inf_{u>0, u\in\mathfrak{D}} \int_{\mathcal{X}} \frac{\mathcal{A}u(x)}{u(x)}\mu(dx)$$

$$= -\lambda \inf_{u>0, u\in\mathfrak{D}} \left(\frac{u(-1) - u(1)}{u(1)}\mu(\{1\}) + \frac{u(1) - u(-1)}{u(-1)}\mu(\{-1\}) \right)$$

$$= -\lambda \inf_{u>0, u\in\mathfrak{D}} \left(\frac{u(-1)}{u(1)}\mu(\{1\}) + \frac{u(1)}{u(-1)}\mu(\{-1\}) - 1 \right)$$

$$= \lambda\big(1 - 2\sqrt{\mu(\{1\})\mu(\{-1\})}\big).$$

Используя теорему 2.1 для функции $h(x) = x$, получаем для $y \in [-1, 1]$

$$V(y) = \inf_{\mu: \int\limits_{\mathcal{X}} x\mu(dx) = y} I(\mu) = \inf_{\mu:\ \mu(\{1\}) - \mu(\{-1\}) = y} I(\mu)$$

$$= \lambda(1 - \sqrt{1 - y^2}).$$

Откуда следует, что для последовательности $Y_n(t)$ выполнен п.б.у. с функционалом уклонений $J(f)$. □

Авторы выражают искреннюю благодарность А. А. Могульскому за поставленную задачу и ценные советы в процессе выполнения данной работы.

References

[1] M.D. Donsker, R.S. Varadhan, *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I*, Communications on pure and applied mathematics, **28** (1975), 1–47. MR0386024

[2] A.V. Logachov, S.Y. Makhno, *Large deviations for integrals of telegraph processes type*, Random Oper. Stoch. Eqs., **22**:1 (2014), 43–52. MR3245298

[3] R. Liptser, V. Spokoiny, *Moderate deviations type evaluation for integral functionals of diffusion processes*, Electron. J. Probab., **4** (1999), 1–25. MR1741723

[4] A. Oprisan, A. Korzeniowski, *Large Deviations via Almost Sure CLT for Functionals of Markov Processes*, Stochastic Analysis and Applications, **30** (2012), 933–947. MR2966107

[5] A. Guillin, *Moderate deviations of inhomogeneous functionals of Markov processes and application to averaging*, Stochastic processes and their applications, **92**:2 (2001), 287–313. MR1817590

[6] M. Takeda, *A variational formula for Dirichlet forms and existence of ground states*, Journal of Functional Analysis. **266**:2 (2014), 660–675. MR3132724

[7] N.C. Jain, *Large deviation lower bounds for additive functionals of Markov processes*, The Annals of Probability, **18**:3 (1990), 1071–1098. MR1062059

[8] Yu.V. Prohorov, *Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory*, Theory of Probability and its Applications, **1** (1956), 157–214. MR0084896

[9] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, [in Russian], Nauka, Moscow, 1977. MR0494353

[10] A.D. Wentzell, M.I. Freidlin, *Fluctuations in dynamical systems caused by small random perturbations*, [in Russian], Nauka, Moscow, 1979.

[11] R.S. Varadhan, *Large deviations and applications*, Pennsylvania, 1984. MR0758258

[12] A.A. Puhal'skii, *On functional principle of large deviations*, New Trends in Probability and Statistics, **1** (Bakuriani, 1990), 198–219.

[13] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Springer, New York, 2nd edition, 1998.

[14] J. Feng, T. Kurtz, *Large deviations for stochastic processes*, American Mathematical Society, 2006.

[15] A.A. Borovkov, A.A. Mogul'skii, *Properties of a functional of trajectories which arises in studying the probabilities of large deviations of random walks*, Siberian mathematical journal, **52** (2011), 777–795.

Artem Vasil'evich Logachov
Novosibirsk State University,
2 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: omboldovskaya@mail.ru

Evgeny Igorevich Prokopenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com