S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 64–79 (2015) УДК 519.1
MSC 68R15

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ СЛОЖНОСТИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕКОТОРЫХ НЕРАВНОБЛОЧНЫХ БИНАРНЫХ МОРФИЗМОВ

А.А. ВАЛЮЖЕНИЧ

Abstract. We study properties of infinite permutations generated by fixed points of morphism $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$ for $k \geq 2$, and find the formula for their factor complexity.

Keywords: permutation complexity, infinite permutation, morphism.

1. Введение

В данной работе мы изучаем бесконечные перестановки, порожденные бесконечными словами. Понятие бесконечной перестановки было введено в [5], где, кроме этого, исследовались периодические перестановки. В работе [3] исследовались бесквадратные перестановки. Понятие бесконечной перестановки, порожденной бесконечным непериодическим словом, было введено Макаровым в [6].

В [6] Макаров ввел понятие перестановочной сложности бесконечного слова, равной количеству подперестановок длины n в порожденном словом бесконечной перестановке. Это понятие является модификацией классического понятия комбинаторной сложности бесконечного слова, равной количеству его подслов длины n, однако вычислить перестановочную сложность в большинстве случаев сложнее, чем комбинаторную сложность. В частности, для вычисления комбинаторной сложности разработан метод биспециальных слов [4]; для перестановочной же сложности такого метода до сих пор не найдено. В данной работе сделан шаг к разработке такого метода; для этого вычислена перестановочная сложность семейства бесконечных слов, порожденных как неподвижные точки морфизмов вида $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$ для $k \geq 2$. Таким образом,

Valuzhenich, A.A., On permutation complexity of fixed points of some nonuniform binary morphisms.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00089-а и 13-01-00463).

Поступила 17 сентября 2012 г., опубликована 1 февраля 2015 г.

работа продолжает исследования Макарова [7], Уидмера [9] и автора [8], в которых изучалась перестановочная сложность слов Штурма [7] и неподвижных точек морфизмов [9, 8].

В разделе 2 мы вводим основные определения. В разделах 3–7 мы доказываем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основной теоремы. В разделе 8 мы находим формулу для комбинаторной сложности перестановок, порожденных неподвижными точками морфизмов вида $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$ для $k \geq 2$. Отметим, что случай $k = 1$ соответствует известному морфизму Фибоначчи, и был рассмотрен в работе [7].

2. Основные определения

Пусть Σ — конечный алфавит. Всюду далее мы будем использовать только двухбуквенный алфавит $\Sigma = \{0, 1\}$.

Бесконечное слово над алфавитом Σ — это слово вида $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$, где $\omega_i \in \Sigma$. Конечное слово u называется *подсловом* или *фактором* бесконечного или конечного слова v, если $v = s_1us_2$ для некоторых слов s_1 и s_2, которые могут быть пустыми. Длину конечного слова u будем обозначать $|u|$. Множество всех подслов слова ω обозначим через $F(\omega)$. Подслово u слова ω называется *специальным вправо*, если $u0$ и $u1$ также являются подсловами слова ω.

Непериодическому слову ω сопоставим действительное число

$R_\omega(i) = 0.\omega_i\omega_{i+1}\ldots = \sum_{k\geq 0}\omega_{i+k}2^{-(k+1)}$. В дальнейшем мы будем писать $R(i)$ вместо $R_\omega(i)$. Отображение $h : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ называется морфизмом, если $h(xy) = h(x)h(y)$ для любых слов $x, y \in \Sigma^*$. Будем говорить, что ω — это *неподвижная точка* морфизма φ, если $\varphi(\omega) = \omega$. Очевидно, что любой морфизм однозначно определяется образами символов, которые называются *блоками.* Пусть $\varphi(\omega) = \omega$. Разбиение слова ω на блоки, которые являются образами его символов, назовем *правильным.* Слово $\varphi(0)$ будем называть блоком первого типа, а слово $\varphi(1)$ — блоком второго типа. Всюду далее мы будем рассматривать неподвижные точки морфизмов вида $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$ для $k \geq 2$.

Вхождение слова $u \in \Sigma^*$ в слово ω — это пара (u, m), такая что $u = \omega_{m+1}\omega_{m+2}\ldots\omega_{m+n}$. *Интерпретацией* слова $u \in \Sigma^*$ под действием морфизма φ назовем тройку $s = \langle v, i, j\rangle$, где $v = v_1\ldots v_k$ — некоторое слово над алфавитом Σ, i и j неотрицательные целые числа такие, что $0 \leq i < |\varphi(v_1)|$ и $0 \leq j < |\varphi(v_k)|$, и слово, полученное из $\varphi(v)$ удалением i символов слева и j символов справа, равно u. Слово v назовем *предком* слова u. Пусть u имеет интерпретацию $\langle v, i, j\rangle$. Тогда вхождение (v, p) слова v длины k называется *предком вхождения* (u, m) слова u, если $m = |\varphi(\omega_1\ldots\omega_p)| + i$.

Замечание 1.

1. Рассмотрим произвольное подслово u слова ω длины не менее $k+1$. Пусть $u = s\varphi(x)p$, где s — суффикс $\varphi(a)$, p — префикс $\varphi(b)$, a и b — некоторые символы и axb — подслово слова ω. Тогда так как либо $u = 0^{k+1}$, либо 1 является подсловом слова u, то возможны два случая. В первом случае слова axb, s и p однозначно определяются по слову u. Во втором случае мы имеем, что $p = 0$, $b = 0$ или $b = 1$, и слова ax и s однозначно определяются по слову u. Таким образом, u имеет либо одного, либо двух предков. Причем во втором случае эти предки имеют вид $v0$ и $v1$ для некоторого подслова v слова ω.

2. Пусть (u, m_1) и (u, m_2) — два вхождения слова u длины $n \geq k+1$, (u', m_1') и (u', m_2') — предки этих вхождений длины l. Пусть $u_1 = \omega_{m_1+1}\ldots\omega_{m_1+n}$ и

$u_2 = \omega_{m_2+1} \dots \omega_{m_2+n}$. Из определения предка вхождения получаем, что $u_1 = s_1\varphi(x)p_1$ и $u_2 = s_2\varphi(y)p_2$, где s_1 и s_2 — суффиксы $\varphi(\omega_{m_1'+1})$ и $\varphi(\omega_{m_2'+1})$, p_1 и p_2 — префиксы $\varphi(\omega_{m_1'+l})$ и $\varphi(\omega_{m_2'+l})$, $x = \omega_{m_1'+2} \dots \omega_{m_1'+l-1}$ и $y = \omega_{m_2'+2} \dots \omega_{m_2'+l-1}$. Так как $\omega_{m_1'+l} = \omega_{m_2'+l}$, то по пункту 1 получаем, что $s_1 = s_2$, $p_1 = p_2$ и $x = y$. Поэтому слова u_1 и u_2 имеют одинаковые разбиения в правильном разбиении ω на блоки.

Бесконечной перестановкой будем называть упорядоченную тройку $\delta = \langle \mathbb{N}, <_\delta, < \rangle$, где $<_\delta$ — некоторый порядок на множестве $\mathbb{N}$ и $<$ — естественный порядок на множестве $\mathbb{N}$. Таким образом, бесконечная перестановка — это некоторый линейный порядок на множестве натуральных чисел. В данной работе под *конечной перестановкой* x длины n мы будем понимать некоторый линейный порядок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, который может быть отличен от естественного порядка. В дальнейшем мы будем писать $x = x_1x_2 \dots x_k$, если $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ — это перестановка чисел $\{1, 2, \dots, k\}$ такая, что $x_i < x_j$ если и только если $i <_x j$. Пусть δ — бесконечная перестановка. Конечную перестановку x длины n такую, что $i <_x j$ если и только, если $m + i - 1 <_\delta m + j - 1$ обозначим через $\delta[m, m+n-1]$. Конечная перестановка π длины n называется *подперестановкой* длины n бесконечной перестановки δ, если $\pi = \delta[i, i+n-1]$ для некоторого $i > 0$.

Определим функцию $\gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,a) | a \in \mathbb{R}\} \mapsto \{<, >\}$, которая по двум различным действительным числам выдает их отношение: $\gamma(a,b) =<$, если и только если $a < b$. Пусть ω — бесконечное вправо непериодическое слово над алфавитом Σ. Тогда определим *бесконечную перестановку*, порождаемую словом ω, как упорядоченную тройку $\delta_\omega = \langle \mathbb{N}, <_{\delta_\omega}, < \rangle$, где $<_{\delta_\omega}$ и $<$ — линейные порядки на $\mathbb{N}$. При этом $<_{\delta_\omega}$ определяется следующим образом: $i <_{\delta_\omega} j$ тогда и только тогда, когда $R_\omega(i) < R_\omega(j)$. В силу непериодичности ω все $R_\omega(i)$ различны и данное выше определение корректно. Тогда конечная перестановка π длины n будет подперестановкой длины n бесконечной перестановки δ_ω, если $\pi = \delta_\omega[i, i+n-1]$ для некоторого $i > 0$. Определим *комбинаторную сложность* $\lambda(n)$ перестановки δ_ω (или *перестановочную сложность* слова ω), порождаемой некоторым словом ω, как число ее различных подперестановок длины n. Вхождение (u, m) слова u длины n *порождает* перестановку $\pi = \pi(u, m)$, если $\pi = \delta_\omega[m+1, m+n]$. Подслово u слова ω *порождает* перестановку π, если существует вхождение (u, m), которое порождает π. Через $f(u)$ обозначим число, а через H_u — множество перестановок, порождаемых словом u.

Пусть $z = z_1z_2 \dots z_k$ — конечная перестановка. *Элементом* перестановки z будем называть z_i, где $1 \le i \le k$. Назовем две перестановки $x = x_1x_2 \dots x_k$ и $y = y_1y_2 \dots y_k$ *сопряженными*, если они отличаются только отношениями крайних элементов, то есть $\gamma(x_1, x_k) \ne \gamma(y_1, y_k)$. Будем обозначать сопряженность как $x \sim y$. Назовем слово u *плохим*, если u порождает хотя бы одну пару сопряженных перестановок. Через E_u обозначим множество пар сопряженных перестановок, порождаемых словом u.

Отметим, что всюду далее говоря о подсловах и их свойствах, мы будем иметь ввиду, что эти подслова являются подсловами слова $\omega = \varphi(\omega)$ — неподвижной точки морфизмов вида $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$ для $k \ge 2$.

В дальнейшем тексте нам несколько раз потребуется вычислить значение $\|A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — произвольный вектор, и под нормой вектора понимается сумма модулей его координат. Как нетрудно показать стандартными методами, $\|A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| = c_1(x,y)\lambda_1^n + c_2(x,y)\lambda_2^n$, где c_1 и c_2 — константы, зависящие только от x и y, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$ — собственные значения матрицы A. Подставляя $n = 0$ и $n = 1$, легко найти что $c_1 = \frac{(k+\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2})x+\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}y}{\sqrt{1+4k}}$ и $c_2 = \frac{(\frac{\sqrt{1+4k}-1}{2}-k)x+\frac{\sqrt{1+4k}-1}{2}y}{\sqrt{1+4k}}$.

3. Общая схема

Для начала, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть u и v — два различных подслова слова ω длины $n \geq k+2$. Тогда u и v не могут порождать одинаковые перестановки.*

Доказательство. В [6] (лемма 1) было доказано, что если u и v порождают одинаковые перестановки, то $u = xa$, $v = xb$, где x — некоторое слово, a и b — различные символы. Пусть, без ограничения общности, $a = 0$ и $b = 1$. Если $x = x_1 1$, то из условия $x0 = x_1 10 \in F(\omega)$ следует, что $x = x'1^k$ для некоторого слова x'. Но тогда $x1 = x'1^{k+1} \in F(\omega)$. Пришли к противоречию, а значит, $x = x_1 0$. Если $x = x_2 00$, то из того, что $x1 = x_2 001 \in F(\omega)$, следует, что $x = x'0^{k+1}$ для некоторого слова x'. Но тогда слово $x0 = x'0^{k+2}$ тоже является подсловом слова ω. Пришли к противоречию, а значит $x = x_2 10$. Пусть (u, m_1) и (v, m_2) — произвольные вхождения слов u и v. Тогда $\gamma(R_\omega(m_1 + |x_2| + 1), R_\omega(m_1 + |x_2| + 3)) = \gamma(0.1..., 0.0...) = \{>\}$ и $\gamma(R_\omega(m_2 + |x_2| + 1), R_\omega(m_2 + |x_2| + 3)) = \gamma(0.10..., 0.11...) = \{<\}$.

Отсюда $\pi(u, m_1) \neq \pi(v, m_2)$. □

Напомним, что через $f(u)$ мы обозначаем число, а через H_u — множество перестановок, порождаемых словом u. Из леммы 1 немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Если $n \geq k+2$, то $\lambda(n) = \sum_{|u|=n} f(u)$.*

Пусть $B(n)$ — множество специальных вправо слов длины n, $A(n)$ — множество неспециальных слов длины n. Тогда по следствию 1 при $n \geq k+2$ имеем $\lambda(n) = \sum_{u\in A(n)} f(u) + \sum_{v\in B(n)} f(u)$ и $\lambda(n+1) = \sum_{u\in A(n)} f(ua) + \sum_{v\in B(n)} (f(v0) + f(v1))$, где слово u продолжается вправо единственным образом символом $a = a(u)$. Отсюда получаем

$$\lambda(n+1) - \lambda(n) = \sum_{u\in A(n)} (f(ua) - f(u)) + \sum_{v\in B(n)} (f(v0) + f(v1) - f(v)).$$

Таким образом, для вычисления перестановочной сложности слова ω осталось понять, сколько перестановок порождает произвольное слово длины n.

4. Оценка $f(u) \leq 2$

В данном разделе мы докажем, что любое подслово u слова ω порождает либо одну, либо две перестановки.

Теорема 1. *Пусть u — подслово слова ω. Тогда $f(u) \leq 2$.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 1. *Пусть ω — неподвижная точка морфизма φ. Пусть $\omega_i = \omega_j$; ω_i и ω_j — символы с номерами i' и j', лежащие в блоках $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ соответственно. Если $a \neq b$, или $a = b$, но $i' \neq j'$, то отношение $\gamma(R_\omega(i), R_\omega(j))$ полностью определяется значениями a, b, i', j'.*

Доказательство. Если $\omega_i = \omega_j = 0$, то, без ограничения общности, можно считать что ω_i — первый символ некоторого блока первого типа, а ω_j — блок второго типа в разбиении ω на блоки. Поэтому $\omega_{i+1} = 1$ и $\omega_{j+1} = 0$, а значит $\gamma(R_\omega(i), R_\omega(j)) = \{>\}$.

Рассмотрим случай $\omega_i = \omega_j = 1$. Тогда без, ограничения общности, можно считать что ω_i это i'-й символ некоторого блока первого типа, а ω_j это j'-й символ некоторого блока первого типа в разбиении ω на блоки и $i' > j'$. Тогда $\gamma(R_\omega(i), R_\omega(j)) = \gamma(0.\omega_i 1^{k+1-i'}0\ldots, 0.\omega_j 1^{k+1-i'}1) = \{<\}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $\omega_i = \omega_j = a$ и $R_\omega(i) < R_\omega(j)$, $l_i = |\varphi(\omega_1 \ldots \omega_{i-1})|$ и $l_j = |\varphi(\omega_1 \ldots \omega_{j-1})|$. Тогда неравенство $R(l_i + r) > R(l_j + r)$ выполнено для любого $1 \leq r \leq |\varphi(a)|$.*

Доказательство. Так как $\omega_i = \omega_j$, то $\varphi(\omega_i) = \varphi(\omega_j)$. Отсюда получаем, что $\omega_{l_i+r} = \omega_{l_j+r}$ выполнено для любого $1 \leq r \leq |\varphi(\omega_i)|$. В силу того, что $R_\omega(i) < R_\omega(j)$ существует некоторое конечное слово x такое, что $R(i) = 0.\omega_i x0\ldots$ и $R(j) = 0.\omega_j x1\ldots$. Тогда имеем:

$$R(l_i + r) = 0.\omega_{l_i+r} \ldots \varphi(x)01\ldots$$

и

$$R(l_j + r) = 0.\omega_{l_j+r} \ldots \varphi(x)00\ldots$$

Значит $R(l_i + r) > R(l_j + r)$. Лемма доказана. $\square$

Всюду далее $|\varphi(\omega_1 \ldots \omega_{i-1})|$ будем обозначать через l_i.

Предложение 3. *Пусть (u, m_1) и (u, m_2) — два вхождения слова u длины $n \geq k+1$, (u', m_1') и (u', m_2') — предки этих вхождений. Тогда для $1 \leq t < s \leq n$ либо $\gamma(R(m_1+t), R(m_1+s)) = \gamma(R(m_2+t), R(m_2+s))$, либо существуют $1 \leq t' < s' \leq |u'|$ такие, что $m_1 + t = l_{m_1'+t'} + r$, $m_1 + s = l_{m_1'+s'} + r$, $m_2 + t = l_{m_2'+t'} + r$ и $m_2 + s = l_{m_2'+s'} + r$ для некоторого $1 \leq r \leq |\varphi(a)|$ и $\omega_{m_1'+t'} = \omega_{m_1'+s'} = \omega_{m_2'+t'} = \omega_{m_2'+s'} = a$.*

Доказательство. Пусть $1 \leq t < s \leq n$. Рассмотрим отношения $\gamma(R_\omega(m_1 + t), R_\omega(m_1+s))$ и $\gamma(R_\omega(m_2+t), R_\omega(m_2+s))$. Если $\omega_{m_1+t} \neq \omega_{m_1+s}$ и $\omega_{m_2+t} \neq \omega_{m_2+s}$, то $\gamma(R_\omega(m_1+t), R_\omega(m_1+s)) = \gamma(\omega_{m_1+t}, \omega_{m_1+s})$ и $\gamma(R_\omega(m_2+t), R_\omega(m_2+s)) = \gamma(\omega_{m_2+t}, \omega_{m_2+s})$. Поэтому $\gamma(R_\omega(m_1+t), R_\omega(m_1+s)) = \gamma(R_\omega(m_2+t), R_\omega(m_2+s))$.

Рассмотрим случай, когда $\omega_{m_1+t} = \omega_{m_1+s}$ и $\omega_{m_2+t} = \omega_{m_2+s}$. Пусть $u_1 = \omega_{m_1+1}\ldots\omega_{m_1+n}$ и $u_2 = \omega_{m_2+1}\ldots\omega_{m_2+n}$. Так как $|u_1| = |u_2| \geq k+1$, то по замечанию 1 слова u_1 и u_2 имеют одинаковые разбиения на блоки в правильном разбиении ω. Следовательно ω_{m_1+t}, ω_{m_1+s}, ω_{m_2+t} и ω_{m_2+s} лежат в блоках $\varphi(\omega_{m_1'+t'})$, $\varphi(\omega_{m_1'+s'})$, $\varphi(\omega_{m_2'+t'})$ и $\varphi(\omega_{m_2'+s'})$ в правильном разбиении ω для некоторых $1 \leq t' < s' \leq |u'|$. Более того, ω_{m_1+t} и ω_{m_2+t} расположены в блоках $\varphi(\omega_{m_1'+t'})$ и $\varphi(\omega_{m_2'+t'})$ на одинаковых позициях. Аналогично ω_{m_1+s} и ω_{m_2+s}

располжены в блоках $\varphi(\omega_{m'_1+s'})$ и $\varphi(\omega_{m'_2+s'})$ на одинаковых позициях. Поэтому $m_1+t = l_{m'_1+t'}+r$, $m_2+t = l_{m'_2+t'}+r$ и $m_1+s = l_{m'_1+s'}+r'$ и $m_2+s = l_{m'_2+s'}+r'$ для некоторых r и r'. Кроме того, $\omega_{m'_1+t'} = \omega_{m'_2+t'}$ и $\omega_{m'_1+s'} = \omega_{m'_2+s'}$.

Пусть $\omega_{m'_1+t'} = \omega_{m'_2+t'} = a$ и $\omega_{m'_1+s'} = \omega_{m'_2+s'} = b$. Если $a \neq b$, то ω_{m_1+t} и ω_{m_1+s} (ω_{m_2+t} и ω_{m_2+s}) расположены в блоках разного типа в правильном разбиении ω на блоки. Тогда по предложению 1 имеем $\gamma(R_\omega(m_1+t), R_\omega(m_1+s)) = \gamma(R_\omega(m_2+t), R_\omega(m_2+s))$. Если $a = b$ и $r \neq r'$, то опять по предложению 1 получаем, что $\gamma(R_\omega(m_1+t), R_\omega(m_1+s)) = \gamma(R_\omega(m_2+t), R_\omega(m_2+s))$.

Осталось рассмотреть случай $a = b$ и $r = r'$. Тогда $\omega_{m'_1+t'} = \omega_{m'_1+s'} = \omega_{m'_2+t'} = \omega_{m'_2+s'}$. Так как $r = r'$, то $m_1+t = l_{m'_1+t'}+r$, $m_1+s = l_{m'_1+s'}+r$, $m_2+t = l_{m'_2+t'}+r$ и $m_2+s = l_{m'_2+s'}+r$ для некоторого $1 \leq r \leq |\varphi(a)|$ и $\omega_{m'_1+t'} = \omega_{m'_1+s'} = \omega_{m'_2+t'} = \omega_{m'_2+s'} = a$. □

В следующих двух утверждениях (u, m_1) и (u, m_2) — два вхождения слова u длины $n \geq k+1$; (u'_1, m'_1) и (u'_2, m'_2) — предки вхождений (u, m_1) и (u, m_2).

Предложение 4. *Если $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$, то $\pi(u'_1, m'_1) \neq \pi(u'_2, m'_2)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $u'_1 = u'_2$. Так как $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$, то $\gamma(R(m_1+t), R(m_1+s)) \neq \gamma(R(m_2+t), R(m_2+s))$ для некоторых $1 \leq t < s \leq n$. Пусть $R(m_1+t) < R(m_1+s)$ и $R(m_2+t) > R(m_2+s)$. Тогда по предложению 3 существуют $1 \leq t' < s' \leq |u'|$ такие, что $m_1+t = l_{m'_1+t'}+r$, $m_1+s = l_{m'_1+s'}+r$, $m_2+t = l_{m'_2+t'}+r$ и $m_2+s = l_{m'_2+s'}+r$ для некоторого $1 \leq r \leq |\varphi(a)|$ и $\omega_{m'_1+t'} = \omega_{m'_1+s'} = \omega_{m'_2+t'} = \omega_{m'_2+s'} = a$. Отсюда по предложению 2 $R(m'_1+t') > R(m'_1+s'))$ и $R(m'_2+t') < R(m'_2+s')$. Поэтому $\gamma(R(m'_1+t'), R(m'_1+s')) \neq \gamma(R(m'_2+t'), R(m'_2+s'))$ и $\pi(u'_1, m'_1) \neq \pi(u'_2, m'_2)$.

Осталось рассмотреть случай $u'_1 \neq u'_2$, то есть когда u'_1 и u'_2 отличаются только последними символами. Предположим, что $\pi(u'_1, m'_1) = \pi(u'_2, m'_2)$. Тогда по лемме 1 можно считать, что $|u'_1| = |u'_2| \leq k+1$. Пусть $u'_1 = v0$ и $u'_2 = v1$ для некоторого v. Тогда $u'_1 = 1^l0$ и $u'_2 = 1^l1$ для некоторого $1 \leq l \leq k-1$, либо $u'_1 = 0^l0$ и $u'_2 = 0^l1$ для $0 \leq l \leq k$, либо $u'_1 = 1^l00$ и $u'_2 = 1^l01$ для $1 \leq l \leq k-1$. Нетрудно убедиться, что в первых двух случаях u задает только одну перестановку, а в третьем случае $\pi(u'_1, m'_1) \neq \pi(u'_2, m'_2)$, так как $\gamma(R(m'_1+l), R(m'_1+l+2)) \neq \gamma(R(m'_2+l), R(m'_2+l+2))$. □

Если, кроме того, выполнено условие $u'_1 = u'_2 = u'$, то выполнено следующее утверждение:

Предложение 5. (1) *Если $\pi(u', m'_1) \neq \pi(u', m'_2)$ и $\pi(u', m'_1) \nsim \pi(u', m'_2)$, то $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$ и $\pi(u, m_1) \nsim \pi(u, m_2)$.*

(2) *Если $\pi(u, m_1) \sim \pi(u, m_2)$, то $\pi(u', m'_1) \sim \pi(u', m'_2)$*

(3) *Пусть $u' = u'_1u'_2...u'_p$ и $u = x\varphi(u'_2...u'_p)$, где x — суффикс слова $\varphi(u'_1)$. Тогда если $\pi(u', m'_1) \neq \pi(u', m'_2)$, то $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$.*

Доказательство. Пусть $|u| = n$ и $|u'| = p$.

1. Так как $\pi(u', m'_1) \neq \pi(u', m'_2)$ и $\pi(u', m'_1) \nsim \pi(u', m'_2)$, мы имеем $\gamma(R(m'_1+t'), R(m'_1+s')) \neq \gamma(R(m'_2+t'), R(m'_2+s'))$ для некоторого $1 \leq t' < s' \leq p$, причем либо $t' \neq 1$, либо $s' \neq p$. Без ограничения общности предположим что $s' < p$: пусть $R(m'_1+t') < R(m'_1+s')$ и $R(m'_2+t') > R(m'_2+s')$. Очевидно, что $\omega_{m'_1+t'} = \omega_{m'_1+s'} = \omega_{m'_2+t'} = \omega_{m'_2+s'}$. Пусть $\omega_{m'_1+t'} = a$.

Тогда из предложения 2 следует что $R(l_{m_1'+t'}+r) > R(l_{m_1'+s'}+r)$ и $R(l_{m_2'+t'}+r) < R(l_{m_2'+s'}+r)$, где $r = |\varphi(a)|$. Кроме того, легко видеть, что $\omega_{l_{m_1'+s'}+r}$ и $\omega_{l_{m_2'+s'}+r}$ — это не последние символы слов $\omega_{m_1+1}\ldots\omega_{m_1+n}$ и $\omega_{m_2+1}\ldots\omega_{m_2+n}$ соответственно, а значит $\pi(u,m_1) \neq \pi(u,m_2)$ и $\pi(u,m_1) \nsim \pi(u,m_2)$.

2. Так как $\pi(u,m_1) \sim \pi(u,m_2)$, то $\gamma(R(m_1+1), R(m_1+n)) \neq \gamma(R(m_2+1), R(m_2+n))$. Пусть $R(m_1+1) < R(m_1+n)$ и $R(m_2+1) > R(m_2+n)$. Тогда по предложению 3 получаем, что $m_1+1 = l_{m_1'+1}+r$, $m_1+n = l_{m_1'+p}+r$, $m_2+1 = l_{m_2'+1}+r$ и $m_2+n = l_{m_2'+p}+r$ для некоторого $1 \leq r \leq |\varphi(a)|$ и $\omega_{m_1'+1} = \omega_{m_1'+p} = \omega_{m_2'+1} = \omega_{m_2'+p}$. Отсюда по предложению 2 имеем $R(m_1'+1) > R(m_1'+p)$ и $R(m_2'+1) < R(m_2'+p)$, то есть $\gamma(R(m_1'+1), R(m_1'+p)) \neq \gamma(R(m_2'+1), R(m_2'+p))$.

Если $\omega_{m_1'+t'} \neq \omega_{m_1'+s'}$ для некоторого $1 \leq t' < s' \leq p$, то $\gamma(R(m_1'+t'), R(m_1'+s')) = \gamma(R(m_2'+t'), R(m_2'+s'))$. Рассмотрим случай $\omega_{m_1'+t'} = \omega_{m_1'+s'}$ для $1 \leq t' < s' \leq p$, где либо $t' \neq 1$, либо $s' \neq p$. Так как $\pi(u,m_1) \sim \pi(u,m_2)$, то $\gamma(R(l_{m_1'+t'}+r), R(l_{m_1'+s'}+r)) = \gamma(R(l_{m_2'+t'}+r), R(l_{m_2'+s'}+r))$ для $t' \neq 1$ или $s' \neq p$. Тогда по предложению 2 имеем $\gamma(R(m_1'+t'), R(m_1'+s')) = \gamma(R(m_2'+t'), R(m_2'+s'))$. Таким образом, $\pi(u',m_1') \sim \pi(u',m_2')$.

3. Так как $\pi(u',m_1') \neq \pi(u',m_2')$, мы имеем $\gamma(R(m_1'+t'), R(m_1'+s')) \neq \gamma(R(m_2'+t'), R(m_2'+s'))$ для некоторого $1 \leq t' < s' \leq p$. Без ограничения общности пусть $R(m_1'+t') < R(m_1'+s')$ и $R(m_2'+t') > R(m_2'+s')$. Очевидно, что $\omega_{m_1'+t'} = \omega_{m_1'+s'} = \omega_{m_2'+t'} = \omega_{m_2'+s'}$. Пусть $\omega_{m_1'+t'} = a$. Тогда из предложения 2 следует, что $R(l_{m_1'+t'}+r) > R(l_{m_1'+s'}+r)$ и $R(l_{m_2'+t'}+r) < R(l_{m_2'+s'}+r)$, где $r = |\varphi(a)|$.

Так как слова $\omega_{m_1+1}\ldots\omega_{m_1+n}$ и $\omega_{m_2+1}\ldots\omega_{m_2+n}$ содержат символы $\omega_{l_{m_1'+s'}+r}$ и $\omega_{l_{m_2'+s'}+r}$, то $\pi(u,m_1) \neq \pi(u,m_2)$. □

Рассмотрим произвольное подслово u слова ω. Для каждой перестановки π из H_u рассмотрим ее произвольное вхождение (u,m), такое что $\pi = \pi(u,m)$. Определим отображение $\Psi_u : H_u \to H_{u'}$ по правилу $\Psi_u(\pi) = \pi'$, где (u',m') — предок вхождения (u,m) и $\pi' = \pi(u',m')$.

Для каждой перестановки π' из $H_{u'}$ рассмотрим ее произвольное вхождение (u',m'), такое что $\pi' = \pi(u',m')$. Определим отображение $\Lambda_u : H_{u'} \to H_u$ по правилу $\Lambda_u(\pi') = \pi$, где (u',m') — предок вхождения (u,m) и $\pi = \pi(u,m)$.

Лемма 2. *Пусть u — подслово слова ω длины не менее $k+1$. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *Если u имеет одного предка u', то $f(u) \leq f(u')$.*
(2) *Если u имеет двух предков u_1' и u_2', то $f(u) \leq f(u_1') + f(u_2')$.*
(3) *Если u имеет одного предка u' и $E_{u'} = \emptyset$, то $E_u = \emptyset$ и $f(u) = f(u')$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим отображение $\Psi_u : H_u \to H_{u'}$, определенное выше. Пусть $\pi_1 = \pi(u,m_1)$ и $\pi_2 = \pi(u,m_2)$ — два различных элемента множества H_u. Тогда по предложению 4 $\Psi_u(\pi_1) \neq \Psi_u(\pi_2)$. Значит Ψ_u — инъекция и $f(u) = |H_u| \leq |H_{u'}| \leq f(u')$.

2. Рассмотрим отображение $\Psi_u : H_u \to H_{u_1'} \cup H_{u_2'}$, определенное выше. Пусть $\pi_1 = \pi(u,m_1)$ и $\pi_2 = \pi(u,m_2)$ — два различных элемента множества H_u. Тогда по предложению 4 $\Psi_u(\pi_1) \neq \Psi_u(\pi_2)$. Значит Ψ_u — инъекция и $f(u) = |H_u| \leq |H_{u_1'} \cup H_{u_2'}| \leq f(u_1') + f(u_2')$.

3. Рассмотрим отображение $\Lambda_u : H_{u'} \to H_u$, определенное выше. Пусть $\pi'_1 = \pi(u', m'_1)$ и $\pi'_2 = \pi(u', m'_2)$ — два различных элемента множества $H_{u'}$. Так как $E_{u'} = \emptyset$, мы имеем $\pi'_1 \nsim \pi'_2$. Отсюда по пункту 1 предложения 5 мы получаем что $\Lambda_u(\pi'_1) \neq \Lambda_u(\pi'_2)$. Значит Λ_u — инъекция и $f(u') = |H_{u'}| \leq |H_u| = f(u)$. Вместе с неравенством $f(u) \leq f(u')$ доказанным выше, мы получаем что $f(u) = f(u')$.

Докажем что $E_u = \emptyset$. Предположим противное. Тогда существуют вхождения (u, m_1) и (u, m_2) слова u такие, что $\pi(u, m_1) \sim \pi(u, m_2)$. Тогда по пункту 2 предложения 5 мы имеем $\pi(u', m'_1) \sim \pi(u', m'_2)$, что противоречит $E_{u'} = \emptyset$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $u0$ и $u1$ — подслова слова ω. Тогда $f(u0) = f(u1) = 1$.*

Для доказательства леммы 3 потребуется еще несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 6. *Пусть u — подслово слова ω и $|u| \leq k+1$. Тогда $f(u) = 1$.*

Доказательство. В этом случае $u = 0^l 1^r$ для $0 \leq l + r \leq k+1$, либо $u = 1^l 0^r$ для $0 \leq l + r \leq k+1$, либо $u = 1^l 0 1^r$ для $0 \leq l + r \leq k$. Нетрудно убедиться, что во всех случаях $f(u) = 1$. $\square$

Предложение 7. *Пусть $u0$ и $u11$ — подслова слова ω. Тогда $f(u0) = f(u11) = 1$.*

Доказательство. Пусть $u = u_1 1$. Так как 1^{k+1} не является подсловом слова ω, то $u = 1^l$ для $0 \leq l \leq k-2$. В этом случае $f(u0) = f(u11) = 1$. Пусть $u = u_1 0$. Если $u_1 = u_2 0$, то $u = 0^l$ для $0 \leq l \leq k$, так как 0^{k+2} не является подсловом ω. В этом случае также очевидно, что $f(u0) = f(u11) = 1$. Рассмотрим случай $u = u_2 10$. Пусть $u_1 = u_2 1$. Доказательство будем вести индукцией по длине слова u.

База индукции для $|u| \leq k-1$ следует из предложения 6. Теперь докажем переход для $|u| \geq k$. Очевидно, что $u0 = u_2 100 = u_1 00$ имеет ровно одного предка $u'_1 11$, а $u11 = u_1 011$ имеет ровно одного предка $u'_1 0$, где u'_1 — предок u_1. Так как $|u'_1| \leq |u_1| < |u_1| + 1 = |u|$, то по предположению индукции $f(u'_1 0) = f(u'_1 11) = 1$. Применяя лемму 2, мы получаем, что $f(u0) \leq f(u'_1 11) = 1$ и $f(u11) \leq f(u'_1 0) = 1$. Следовательно $f(u0) = f(u11) = 1$. $\square$

Доказательство Леммы 3. Пусть $u10 \in F(\omega)$. Тогда $|u| \leq k-1$, так как иначе $u = x01^{k-1}$ для некоторого слова x, и $u0 = x01^{k-1}0$ не является подсловом ω. Поэтому можно считать, что $u1$ продолжается вправо только единицей, то есть $u11$ — подслово слова ω. Тогда по предложению 7 $f(u0) = f(u11) = 1$. Докажем, что $f(u1) = 1$. Пусть это не так. Тогда существуют вхождения $(u1, m_1)$ и $(u1, m_2)$ слова $u1$ такие, что $\pi(u1, m_1) \neq \pi(u1, m_2)$. Тогда $\pi(u11, m_1) \neq \pi(u11, m_2)$. Противоречие. $\square$

Доказательство Теоремы 1. Пусть $|u| \geq k+1$ и u имеет двух предков. Тогда эти предки имеют вид $v0$ и $v1$. По лемме 3 $f(v0) = f(v1) = 1$. По пункту 2 леммы 2 мы получаем $f(u) \leq f(v0) + f(v1) = 2$.

Пусть u имеет одного предка. Доказательство будем вести индукцией по длине слова u. База для $|u| \leq k$ следует из предложения 6. Докажем переход для $|u| \geq k+1$. Очевидно что $|u'| \leq |u|$. Пусть $|u'| = |u|$. Тогда все некрайние символы слова u есть блоки второго типа, то есть нули. Поэтому в этом случае $u = a0^l b$ для $0 \leq l \leq k+1$, где a и b — некоторые символы. Нетрудно убедиться что в этом случае $f(u) = 1$. Осталось рассмотреть случай $|u'| < |u|$. Тогда по предположению индукции мы имеем $f(u') \leq 2$. Отсюда по пункту 1 леммы 2 $f(u) \leq f(u') \leq 2$.

□

Следствие 2. *Пусть слово u имеет единственного предка u' и $f(u) = 2$. Тогда $f(u') = 2$.*

Доказательство. По лемме 2 имеем $f(u) = 2 \leq f(u')$. С другой стороны, по теореме 1 $f(u') \leq 2$. Отсюда $f(u') = 2$. □

5. Вклад специальных слов

Лемма 4. *Пусть u — специальное вправо слово и $u \geq k+1$. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *$f(u) = 2$ если и только если u имеет предков $v0$ и $v1$, причем $v = v_2 10$ для некоторого слова v_2.*
(2) *Если $f(u) = 1$, то $u = s0$, где s — суффикс $(01^k)^k$.*
(3) *Если u — плохое слово, то $u = 001^k 0$.*

Доказательство. Если $u = u_1 1$, то $u = 1^l$ для некоторого $0 < l \leq k-1$. Тогда $f(u) = 1$. Рассмотрим случай $u = u_1 0$. Так как u — специальное вправо слово, то u имеет предков $v0$ и $v1$, где v — некоторое слово. Если $v = v_1 1$, то поскольку $v0$ и $v1$ — подслова ω, мы имеем $v = 1^l$ для $0 \leq l \leq k-1$. В этом случае $f(u) = f(0^l 0) = 1$. Пусть $v = v_1 0$. Если $v_1 = v_2 0$ то поскольку $v0$ и $v1$ — подслова ω, мы имеем $v = 0^l$ для $0 \leq l \leq k$. В этом случае $f(u) = 1$ и $u = s0$, где s — суффикс $(01^k)^k$. Рассмотрим случай $v = v_2 10$. Тогда $u = u_1 001^k 0$. Пусть (u, m_1) и (u, m_2) — произвольные вхождения слова u, имеющие предки $(v0, m'_1)$ и $(v1, m'_2)$ соответственно. Тогда $\gamma(R_\omega(m_1 + |u_1| + 1), R_\omega(m_1 + |u_1| + k + 3)) = \gamma(0.00..., 0.01...) = \{<\}$ и $\gamma(R_\omega(m_2 + |u_1| + 1), R_\omega(m_1 + |u_1| + k + 3)) = \gamma(0.001, 0.000...) = \{>\}$. Поэтому в этом случае $f(u) = 2$, причем u будет плохим только если $|u_1| = 0$, то есть v_2 — пустое слово и $u = 001^k 0$. □

Следствие 3. *Пусть v — специальное вправо слово длины $n \geq k+1$. Тогда либо $f(v0) + f(v1) - f(v) = 0$, либо $f(v0) + f(v1) - f(v) = 1$ и v — суффикс $(01^k)^k 0$.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из леммы 3 и леммы 4.

□

Лемма 5. *Пусть $f(u) = 2$ и u продолжается вправо символом a однозначно. Тогда $f(ua) = 2$.*

Доказательство. Рассмотрим вхождения (u, m_1) и (u, m_2) слова u такие, что $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$. Тогда $\gamma(R(m_1 + t), R(m_1 + s)) \neq \gamma(R(m_2 + t), R(m_2 + s))$ для некоторых $1 \leq t < s \leq |u|$, а значит $\pi(ua, m_1) \neq \pi(ua, m_2)$. □

Напомним, что при $n \geq k+2$ имеем

$$\lambda(n+1) - \lambda(n) = \sum_{u \in A(n)} (f(ua) - f(u)) + \sum_{v \in B(n)} (f(v0) + f(v1) - f(v));$$

где слово u продолжается вправо единственным образом символом a, $B(n)$ — множество специальных вправо слов длины n, $A(n)$ — множество неспециальных вправо слов длины n. По следствию 3 $f(v0) + f(v1) - f(v) = 0$, за исключением слов ограниченной длины. Кроме того, по лемме 5, если $f(u) = 2$ и u продолжается вправо символом a однозначно, то $f(ua) - f(u) = 0$. Таким образом, чтобы найти $\lambda(n+1) - \lambda(n)$, надо найти число слов $u \in A(n)$, таких что $f(ua) = 2$ и $f(u) = 1$.

6. Случай $f(u) = 1, f(ua) = 2$

Лемма 6. *Пусть u — слово длины $n \geq k+1$, которое продолжается вправо однозначно символом a. Тогда $f(ua) = 2$ и $f(u) = 1$ тогда и только тогда, когда ua — плохое слово или u — суффикс $\varphi^s((01^k)^k0)$, содержащий $\varphi^s(10)$ как собственный суффикс, и $a = 0$.*

Для доказательства леммы 6 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Пусть (u, m_1) и (u, m_2) — два вхождения слова u длины $n \geq k+1$, (u', m_1') и (u', m_2') — предки вхождений (u, m_1) и (u, m_2), $|u'| = p$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *Пусть $u' = 1x1$ и $u = 0\varphi(x)0$. Тогда если $\pi(u', m_1') \sim \pi(u', m_2')$, то $\pi(u, m_1) \sim \pi(u, m_2)$.*
2. *Пусть $u' = 0x0$ и $u = s_1\varphi(x)s_2$, где s_1 и s_2 — суффикс и префикс $\varphi(0)$ соответственно, и $|s_1| + |s_2| = k+2$. Тогда если $\pi(u', m_1') \sim \pi(u', m_2')$, то $\pi(u, m_1) \sim \pi(u, m_2)$.*
3. *Пусть $u' = 0x0$ и $u = s_1\varphi(x)s_2$, где s_1 и s_2 — суффикс и префикс $\varphi(0)$ соответственно, и $|s_1| + |s_2| \leq k+1$. Тогда если $\pi(u', m_1') \sim \pi(u', m_2')$, то $\pi(u, m_1) = \pi(u, m_2)$.*
4. *Пусть $u' = 0x0$ и $u = s_1\varphi(x)s_2$, где s_1 и s_2 — суффикс и префикс $\varphi(0)$ соответственно, и $|s_1| + |s_2| > k+2$. Тогда если $\pi(u', m_1') \sim \pi(u', m_2')$, то $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$.*

Доказательство. Все пункты доказываются аналогично. Поэтому докажем только пункт 1. Пусть $1 \leq t < s \leq n$. Тогда по предложению 3 $\gamma(R(m_1 + t), R(m_1+s)) \neq \gamma(R(m_2+t), R(m_2+s))$ возможно только если $m_1+t = l_{m_1'+t'} + r$, $m_1 + s = l_{m_1'+s'} + r$, $m_2 + t = l_{m_2'+t'} + r$, $m_2 + s = l_{m_2'+s'} + r$ для некоторого $1 \leq r \leq |\varphi(a)|$, где $\omega_{m_1'+t'} = \omega_{m_1'+s'} = \omega_{m_2'+t'} = \omega_{m_2'+s'} = a$. Пусть $R(m_1+t) < R(m_1+s)$ и $R(m_2+t) > R(m_2+s)$. Отсюда из предложения 2 следует, что $R(m_1'+t') > R(m_1'+s')$ и $R(m_2'+t') < R(m_2'+s')$. Так как $\pi(u', m_1') \sim \pi(u', m_2')$, то $\gamma(R(m_1+t), R(m_1+s)) = \gamma(R(m_2+t), R(m_2+s))$ для всех t' и s' кроме случая $t' = 1$ и $s' = p$. Рассмотрим случай $t' = 1$, $s' = p$. Так как $m_1+1 = l_{m_1'+1}+1$, $m_1+n = l_{m_1'+p}+1$, $m_2+1 = l_{m_2'+1}+1$, $m_2+n = l_{m_2'+p}+1$, то $\gamma(R(m_1+1), R(m_1+n)) \neq \gamma(R(m_2+1), R(m_2+n))$ по предложению 2. Поэтому $\pi(u, m_1) \sim \pi(u, m_2)$. □

Предложение 8. *Пусть слово $s = ua$ имеет единственного предка $s' = u'b$; $f(s) = 2$, $f(u) = 1$ и $E_{s'} = \emptyset$. Тогда $f(s') = 2$, $f(u') = 1$ и a — первый символ слова $\varphi(b)$.*

Доказательство. По следствию 2 имеем $f(s') = 2$. Докажем что u имеет только одного предка. Пусть это не так, тогда u специально вправо, то есть $u0$ и $u1$ — подслова ω. Тогда по лемме 3 $f(ua) = 1$, что противоречит условию леммы.

Итак, u имеет ровно одного предка. Легко видеть, что это либо u', либо s'. Пусть s' — предок u. Так как $f(s') = 2$ и $E_{s'} = \emptyset$, то по лемме 2 получаем $f(u) = f(s') = 2$. Пришли к противоречию.

Значит u' — предок u и a — первый символ слова $\varphi(b)$. Предположим, что $f(u') = 2$. Тогда существуют вхождения (u', m_1') и (u', m_2') слова u' такие, что $\pi(u', m_1') \neq \pi(u', m_2')$. Отсюда по случаю 3 предложения 5 мы имеем $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$, где (u', m_1') и (u', m_2') — предки вхождений (u, m_1) и (u, m_2), то есть $f(u) \geq 2$. Противоречие, а значит $f(u') = 1$. □

Предложение 9. *Пусть слово $s = ua$ имеет единственного предка s'; $f(s) = 2$, $f(u) = 1$ и s' — плохое слово. Тогда s — тоже плохое слово.*

Доказательство. Пусть $s' = 0x0$. Пусть $s = s_1\varphi(x)s_2$, где s_1 и s_2 — суффикс и префикс $\varphi(0)$ соответственно. Рассмотрим случай $|s_1| + |s_2| \leq k+1$. Покажем, что в этом случае $f(s)$=1. Пусть это не так. Тогда существуют вхождения (s, m_1) и (s, m_2) слова s такие, что $\pi(s, m_1) \neq \pi(s, m_2)$. Отсюда по предложению 4 получаем, что $\pi(s', m_1') \neq \pi(s', m_2')$. Так как $f(s') = 2$ и s' — плохое слово, то $\pi(s', m_1') \sim \pi(s', m_2')$. Отсюда по лемме 7 $\pi(s, m_1) = \pi(s, m_2)$ — получили противоречие, а значит $|s_1|+|s_2| \geq k+2$. Теперь рассмотрим случай $|s_1|+|s_2| > k+2$. Нетрудно видеть, что в этом случае слово u имеет предок s' и при этом $u = s_1\varphi(x)s_2'$, где $|s_1| + |s_2'| \geq k+2$ и $s_2 = s_2'a$. Так как s' — плохое слово, то существуют вхождения (s', m_1') и (s', m_2') слова s' такие, что $\pi(s', m_1') \sim \pi(s', m_2')$. Отсюда по лемме 7 имеем $\pi(u, m_1) \neq \pi(u, m_2)$, то есть $f(u) = 2$. Пришли к противоречию, а значит $|s_1| + |s_2| = k+2$. Отсюда из леммы 7 легко видеть, что s порождает пару сопряженных перестановок, то есть s — плохое слово. Осталось рассмотреть случай $s' = 1x1$. Тогда $s = 0\varphi(x)0$. Так как s' — плохое слово, то существуют вхождения (s', m_1') и (s', m_2') слова s' такие, что $\pi(s', m_1') \sim \pi(s', m_2')$. Отсюда по лемме 7 имеем $\pi(s, m_1) \sim \pi(s, m_2)$, то есть s — плохое слово. □

Предложение 10. *Пусть слово $u = u_10$ имеет двух предков, $f(u) = 2$ и $f(u_1) = 1$. Тогда u_1 — это суффикс слова $\varphi((01^k)^k0)$.*

Доказательство. Пусть слово u имеет предков $v0$ и $v1$. Так как $f(u) = 2$, то по лемме 4 $v = v_210$ для некоторого слова v_2. Если v_2 — суффикс 01^{k-1}, то все доказано. В противном случае, имеем $v_2 = v_301^{k-1}$ для некоторого слова v_3. Пусть $v_3 = v_40$. Тогда слово u_1 имеет предок $v = v_4001^k0$. Рассмотрим вхождения (v, m_1) и (v, m_2) слова v такие, что $\omega_{m_1+|v|+1} = 0$ и $\omega_{m_2+|v|+1} = 1$. Тогда легко видеть, что $\gamma(R_\omega(m_1 + |v_4| + 1), R_\omega(m_1 + |v_4| + k + 3)) = \{>\}$ и $\gamma(R_\omega(m_2 + |v_4| + 1), R_\omega(m_1 + |v_4| + k + 3)) = \{<\}$. Отсюда $f(v) = 2$. Тогда по пункту 3 предложения 5 имеем $f(u_1) = f(v) = 2$ — противоречие, а значит $v = v_4101^k0$.

Докажем, что v — суффикс слова $(01^k)^k0$. Пусть это не так. Тогда $v = x(01^k)^k0$ для некоторого слова x, что противоречит тому, что $v0$ и $v1$ — подслова слова ω. Значит v — суффикс слова $(01^k)^k0$. Отсюда u_1 — это суффикс слова $\varphi((01^k)^k0)$, что и требовалось доказать. □

Предложение 11. *Пусть u — слово длины $n \geq k+1$, которое продолжается вправо однозначно символом a; $f(ua) = 2$ и $f(u) = 1$. Тогда либо ua — плохое слово, либо u — суффикс $\varphi^s((01^k)^k0)$, содержащий $\varphi^s(10)$ как собственный суффикс, и $a = 0$.*

Доказательство. Пусть $s = ua$. Будем считать, что s не является плохим словом. Рассмотрим последовательность слов $s = s_0, s_1, \dots, s_m$ такую, что s_i является единственным предком s_{i-1} для $1 \le i \le m$, а слово s_m имеет двух предков. Пусть $s_i = s'_i a_i$, где a_i — некоторый символ. Докажем, что s_1 не является плохим. Предположим противное. Тогда по предложению 9 s тоже является плохим словом. Отсюда $E_{s_1} = \emptyset$. Отсюда по предложению 8 получаем, что $f(s_1) = 2$, $f(s'_1) = 1$ и a_0 — первый символ $\varphi(a_1)$. Аналогично рассматривая s_1 и s_2, получаем, что $E_{s_2} = \emptyset$, $f(s_2) = 2$, $f(s'_2) = 1$ и a_1 — первый символ $\varphi(a_2)$. Таким образом, $E_{s_i} = \emptyset$, $f(s_i) = 2$, $f(s'_i) = 1$ и a_{i-1} — первый символ $\varphi(a_i)$ для любого $1 \le i \le m$. Из того, что $a_m = 0$ следует, что $a = a_0 = 0$. Так как $f(s_m) = 2$ и $f(s'_m) = 1$, то по предложению 10 s'_m — суффикс слова $\varphi((01^k)^k 0)$. Отсюда по индукции легко доказать, что u — суффикс $\varphi^m((01^k)^k 0)$. При этом $E_{s_m} = \emptyset$. Отсюда по лемме 4 $s_m = x001^k 0$ для некоторого непустого x, то есть $s'_m = x001^k$. Поэтому $\varphi(10)$ — суффикс s'_m. Отсюда по индукции легко доказать, что $\varphi^m(10)$ — собственный суффикс u. □

Доказательство Леммы 6. Необходимость доказана в предложении 11. Докажем теперь достаточность. Пусть ua – плохое слово. Тогда $f(ua) = 2$. Если $f(u) = 2$, то существуют вхождения (u, m_1) и (u, m_2) слова u такие, что $\pi(u, m_1) \ne \pi(u, m_2)$. Тогда $\gamma(R(m_1 + t), R(m_1 + s)) \ne \gamma(R(m_2 + t), R(m_2 + s))$ для некоторых $1 \le t < s \le |u|$, а значит $\pi(ua, m_1) \nsim \pi(ua, m_2)$. Тогда ua не является плохим словом, то есть $f(u) = 1$.

Пусть u — суффикс слова $\varphi^s((01^k)^k 0)$, содержащий $\varphi^s(10)$ как собственный суффикс. Докажем, что $f(u0) = 2$, $f(u) = 1$, и $E_{u0} = \emptyset$ индукцией по s. Докажем базу индукции для $s = 1$. Слово $\varphi((01^k)^k 0)$ имеет предок $(01^k)^k 0$. Так как $f((01^k)^k 0) = 1$, то по пункту 1 леммы 2 имеем $f(\varphi((01^k)^k 0)) = 1$. Так $\varphi((01^k)^k 0)0$ имеет предки $(01^k)^k 00$ и $(01^k)^k 01$, то по лемме 4 $f(\varphi((01^k)^k 0)0) = 2$ и $E_{\varphi((01^k)^k 0)0} = \emptyset$. Докажем переход. Так как u — суффикс слова $\varphi^s((01^k)^k 0)$, то u имеет предок u' и u' — суффикс слова $\varphi^{s-1}((01^k)^k 0)$. По предположению индукции мы имеем $f(u'0) = 2$, $f(u') = 1$, и $E_{u'0} = \emptyset$. Отсюда по пункту 3 леммы 2 $f(u0) = 2$ и $E_{u0} = \emptyset$. По пункту 1 леммы 2 имеем $f(u) \le f(u') = 1$. Отсюда $f(u) = 1$, что и требовалось доказать. □

7. Характеризация и перечисление плохих слов

Обозначим через $C_{bad}(n)$ число плохих слов длины n. Основными результатами раздела являются леммы 8 и 9.

Лемма 8. *Пусть $n = c_1(2,k)\lambda_1^s + c_2(2,k)\lambda_2^s + 1$ для некоторого натурального s. Тогда $C_{bad}(n) = c_1(1,0)\lambda_1^s + c_2(1,0)\lambda_2^s$. Для остальных n имеем $C_{bad}(n) = 0$.*

Лемма 9. *Пусть u — произвольное плохое слово, полученное из $001^k 0$ на n-ой итерации. Тогда $|u| = c_1(2,k)\lambda_1^n + c_2(2,k)\lambda_2^n + 1$.*

Для доказательства лемм 8 и 9 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 12. *Пусть u — плохое слово длины $n \ge k + 1$, u' — единственный предок u. Тогда u' — плохое слово и $f(u') = 2$.*

Доказательство. Так как u — плохое слово, то существуют вхождения (u, m_1) и (u, m_2) слова u такие, что $\pi(u, m_1) \sim \pi(u, m_2)$. Тогда по предложению 5 мы имеем $\pi(u', m'_1) \sim \pi(u', m'_2)$. Следовательно, u' порождает хотя бы одну пару сопряженных перестановок, то есть u' — плохое слово и $f(u') \geq 2$. Отсюда по теореме 1 $f(u') = 2$. □

Напомним, что в лемме 4 мы доказали, что если u — плохое слово, имеющее двух предков, то $u = 001^k0$.

Будем говорить, что плохое слово u получается из слова 001^k0 на n-ой итерации, если существует последовательность слов $u = u_0$, u_1, ..., $u_n = 001^k0$ такая, что u_i является единственным предком u_{i-1} для $1 \leq i \leq n$.

Предложение 13. *Пусть ω — неподвижная точка морфизма φ, u — плохое слово длины $n \geq k+1$. Тогда u получается из слова 001^k0 на некоторой итерации s.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из леммы 4 и предложения 12. □

Таким образом, все плохие слова получаются из слова 001^k0 неоднократным применением морфизма φ с обрезанием справа и слева некоторого количества символов.

Предложение 14. *Пусть ω — неподвижная точка морфизма φ, u' — единственный предок u и u' — плохое слово. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *Пусть $u' = 0x0$. Тогда u является плохим словом если и только если u — это одно из слов $01^k\varphi(x)0$, $1^l\varphi(x)01^{k+1-l}$, где $0 < l < k+1$.*
(2) *Пусть $u' = 1x1$. Тогда слово $u = 0\varphi(x)0$ является плохим.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из леммы 7. □

Пусть X_n и Y_n — множества плохих слов вида $0x0$ и $1y1$ соответственно, полученных из 001^k0 на n-ой итерации. Мощности множеств X_n и Y_n обозначим через x_n и y_n соответственно.

Пусть X'_n и Y'_n — множества слов, полученных из множеств X_n и Y_n соответственно удалением крайних символов.

Предложение 15. *Все слова из множества X'_n содержат d_n нулей и e_n единиц, и все слова из Y'_n содержат d_n+1 нулей и e_n-1 единиц. Для d_n и e_n выполнены рекуррентные соотношения $d_{n+1} = d_n + e_n, e_{n+1} = k(d_n+1)$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. База для $n=1$ следует из того что $X_1 = \{01^k\varphi(01^k)0\}$ и $Y_1 = \{1^l\varphi(01^k)01^{k+1-l} | 0 < l < k+1\}$. Докажем переход. Рассмотрим слово $v = 1y1 \in Y_{n+1}$. Тогда v имеет предок $v' = 0x0$ и $v = 1^l\varphi(x)01^{k+1-l}$ для $0 < l < k+1$. Так как $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$, то y содержит $d_n + e_n + 1$ нулей и $kd_n + k - 1$ единиц. Теперь рассмотрим слово $u = 0y0 \in X_{n+1}$. Если u имеет предок $u' = 0x0$, то $u = 01^k\varphi(x)0$. Тогда y содержит $d_n + e_n$ нулей и $kd_n + k$ единиц. Если u имеет предок $u' = 1x1$, то $u = 0\varphi(x)0$. По предположению индукции x содержит $d_n + 1$ нулей и $e_n - 1$ единиц. Тогда u содержит $d_n + e_n$ нулей и $kd_n + k$ единиц. Таким образом, любое слово из X'_{n+1} содержит $d_n + e_n$ нулей и $kd_n + k$ единиц, а любое слово из Y'_{n+1} содержит $d_n + e_n + 1$ нулей и $kd_n + k - 1$ единиц. Лемма доказана. □

Итак, мы доказали что выполнены рекуррентные соотношения $d_{n+1} = d_n + e_n, e_{n+1} = k(d_n+1)$. Сделаем замену $d_n = d'_n - 1$, $e_n = e'_n$. Тогда реккурентные соотношения примут следующий более удобный вид:

$$d'_{n+1} = d'_n + e'_n, d'_{n+1} = kd'_n.$$

Таким образом $\begin{pmatrix} d'_n \\ e'_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение 16. *Для x_n и y_n выполнены рекуррентные соотношения $x_{n+1} = x_n + y_n, y_{n+1} = kx_n$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольное слово $u = 0x0 \in X_n$. Тогда из него могут быть получены плохие слова $01^k\varphi(x)0$, $1^l\varphi(x)01^{k+1-l}$, то есть из u получается одно слово из X_{n+1} и k слов из Y_{n+1}. Если $u = 1y1 \in Y_n$, то из него может быть получено ровно одно плохое слово $0\varphi(y)0$. Таким образом, в этом случае из u получается одно слово из X_{n+1}. Отсюда $x_{n+1} = x_n + y_n, y_{n+1} = kx_n$. □

Доказательство Леммы 9. Пусть $u = 0x0$. Тогда по предложению 15 слово x содержит d_n нулей и e_n единиц. Тогда $|u| = d_n + e_n + 2 = d'_n + e'_n + 1$. Так как $\begin{pmatrix} d'_n \\ e'_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$, то $d'_n + e'_n = \|A^n \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}\|$, где под нормой вектора понимается сумма модулей его координат. Отсюда $|u| = c_1(2,k)\lambda_1^n + c_2(2,k)\lambda_2^n + 1$.

Пусть $u = 1x1$. Тогда по предложению 15 слово x содержит $d_n + 1$ нулей и $e_n - 1$ единиц. Тогда $|u| = d_n + e_n + 2 = d'_n + e'_n + 1$. Так как $\begin{pmatrix} d'_n \\ e'_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$, то $d'_n + e'_n = \|A^n \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}\|$, где под нормой вектора понимается сумма модулей его координат. Отсюда $|u| = c_1(2,k)\lambda_1^n + c_2(2,k)\lambda_2^n + 1$. □

Доказательство Леммы 8.

Рассмотрим произвольное плохое слово u длины n. Так как $n = c_1(2,k)\lambda_1^s + c_2(2,k)\lambda_2^s + 1$, то u получено из 001^k0 на s-ой итерации. Тогда $C_{bad}(n) = x_s + y_s$. Отсюда из предложения 16 мы получаем что $x_s + y_s = \|A^s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|$. Отсюда $C_{bad}(n) = c_1(1,0)\lambda_1^s + c_2(1,0)\lambda_2^s$. Лемма доказана. □

8. Основная теорема

Определим множества $T_n = \{y\varphi^n(10)0\}$, где y — произвольный непустой суффикс слова $\varphi^n((01^k)^{k-1}01^{k-1})$. Определим множество $T = \bigcup_{n\geq 1} T_n$. Докажем, что классы T_n не пересекаются.

Лемма 10. *Пусть $m, l \in \mathbb{N}$, $m \neq l$. Тогда $T_m \bigcap T_l = \emptyset$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существует слово x, такое, что $x \in T_m$ и $x \in T_l$. Пусть $m > l$. Так как $x \in T_m$ и $x \in T_l$, то $\varphi^l(10)$ — суффикс слова $\varphi^m(10)$. Поэтому $\varphi^m(10) = z\varphi^l(10)$ для некоторого слова z. Нетрудно заметить, что $z = \varphi^l(z')$ для некоторого слова z'. Отсюда $\varphi^{m-l}(10) = z'10$. Но, как нетрудно заметить, $\varphi^n(10)$ заканчивается либо на 01^k, либо на 0^k. Пришли к противоречию, а значит $T_m \bigcap T_l = \emptyset$. □

Введем последовательность $a_s = |\varphi^s((01^k)^k 0)0|$ — последовательность длин самых длинных слов из T_s. Используя стандартную технику, нетрудно получить, что $a_s = c_1(k+1, k^2)\lambda_1^s + c_2(k+1, k^2)\lambda_2^s + 1$. Пусть b_s — длина плохих слов, полученных из 001^k0 на $s-1$-ой итерации. Тогда по лемме 9 имеем $b_s = c_1(2,k)\lambda_1^{s-1} + c_2(2,k)\lambda_2^{s-1} + 1$. Отсюда $b_s = c_1(1,1)\lambda_1^s + c_2(1,1)\lambda_2^s + 1$. Введем последовательность $m_s = C_{bad}(b_s)$. По лемме 8 $m_s = c_1(1,0)\lambda_1^{s-1} + c_2(1,0)\lambda_2^{s-1}$.

Можно показать, что, начиная с $s = 2$, при $k \geq 3$ выполняется неравенство $b_{s+2} < a_s < b_{s+3}$. Заметим также, что $|\varphi^s(10)0| = b_s$.

Лемма 11. *Пусть $n > k^2 + k + 1$ и $k > 3$. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *Если $a_s < n < b_{s+3}$, то $\lambda(n) - \lambda(n-1) = 2$.*
(2) *Если $n = b_{s+3}$, то $\lambda(n) - \lambda(n-1) = 2 + m_{s+3}$.*
(3) *Если $b_{s+3} < n \leq a_{s+1}$, то $\lambda(n) - \lambda(n-1) = 3$.*

Доказательство. Все случаи аналогичны, поэтому рассмотрим только первый случай. Так как $n > k^2 + k + 1$, то по следствию 3 $f(v0) + f(v1) - f(v) = 0$ для любого специального вправо слова v длины n. Отсюда $\lambda(n) - \lambda(n-1) = \sum_{u \in A(n)}(f(ua) - f(u))$, где $A(n)$ — множество неспециальных вправо слов длины n и слово u продолжается вправо единственным образом символом a. Таким образом, чтобы найти $\lambda(n) - \lambda(n-1)$, надо найти число слов $u \in A(n)$ таких, что $f(ua) = 2$ и $f(u) = 1$. По лемме 6 мы получаем, что в этом случае либо ua — плохое слово, либо $u0 \in T_s$ для некоторого s. Из определения T_m следует, что для любого $t \in [b_m + 1, a_m]$ существует ровно одно слово из T_m, длина которого равна t, для остальных t в T_m нет слов длины t. Поэтому, если $a_s < n < b_{s+3}$ и ua имеет длину n, то $u0 \in T_{s+1}$ или $u0 \in T_{s+2}$. По лемме 10 получаем, что таких слов всего два. Поэтому для $a_s < n < b_{s+3}$ имеем $\lambda(n) - \lambda(n-1) = C_{bad}(n) + 2 = 2$. □

Предложение 17. *Сумма $\sum_{j=1}^{s} a_j - \sum_{j=1}^{s+2}(b_j - m_j)$ может быть представлена в виде $M_1\lambda_1^{s+1} + M_2\lambda_2^{s+1} + W$, где $M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 1}(c_1(1+k, k^2) + c_1(1,0)\lambda_1 - c_1(1,1)\lambda_1^2)$, $M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - 1}(c_2(1+k, k^2) + c_2(1,0)\lambda_2 - c_2(1,1)\lambda_2^2)$ и W — некоторая константа.*

Доказательство. Доказательство проверятся непосредственными вычислениями, используя определения чисел a_j, b_j и m_j. □

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 2. *Пусть $n > k^2 + k + 1$ и $k > 2$. Тогда комбинаторная сложность перестановки δ_ω может быть вычислена следующим образом: при $a_s < n < b_{s+3}$ $\lambda(n) = 2n + M_1\lambda_1^{s+1} + M_2\lambda_2^{s+1} + W_1$, где $M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 1}(c_1(1+k, k^2) + c_1(1,0)\lambda_1 - c_1(1,1)\lambda_1^2)$, $M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - 1}(c_2(1+k, k^2) + c_2(1,0)\lambda_2 - c_2(1,1)\lambda_2^2)$ и W_1 — некоторая константа; при $b_{s+3} \leq n \leq a_{s+1}$ $\lambda(n) = 3n - a_{s+1} + M_1\lambda_1^{s+2} + M_2\lambda_2^{s+2} + W_2$, где $M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 1}(c_1(1+k, k^2) + c_1(1,0)\lambda_1 - c_1(1,1)\lambda_1^2)$, $M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - 1}(c_2(1+k, k^2) + c_2(1,0)\lambda_2 - c_2(1,1)\lambda_2^2)$ и W_2 — некоторая константа.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из леммы 11 и предложения 17. □

Как следует из теоремы 2, перестановочная сложность представляет собой кусочно-линейную функцию с перегибами в точках a_s, $b_s - 1$ и b_s. В частности, при $k = 6$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = \lim_{s\to\infty} \frac{\lambda(a_s)}{a_s} = 2\frac{15}{19}$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = \lim_{s\to\infty} \frac{\lambda(b_{s+3}-1)}{b_{s+3}-1} = 2\frac{5}{12}$.

При $k = 2$ последовательности a_s и b_s связаны неравенствами $b_{s+1} < a_s < b_{s+2}$. Аналогично случаю $k > 2$ можно доказать, что при $a_s < n < b_{s+2}$ $\lambda(n) = n + N_1\lambda_1^{s+1} + N_2\lambda_2^{s+1} + Q_1$, где $N_1 = \frac{1}{\lambda_1-1}(c_1(1+k,k^2) + c_1(1,0) - c_1(1,1)\lambda_1)$, $N_2 = \frac{1}{\lambda_2-1}(c_2(1+k,k^2) + c_2(1,0) - c_2(1,1)\lambda_2)$ и Q_1 — некоторая константа; при $b_{s+2} \le n \le a_{s+1}$ $\lambda(n) = 2n - a_{s+1} + N_1\lambda_1^{s+2} + N_2\lambda_2^{s+2} + Q_2$, где $N_1 = \frac{1}{\lambda_1-1}(c_1(1+k,k^2) + c_1(1,0) - c_1(1,1)\lambda_1)$, $N_2 = \frac{1}{\lambda_2-1}(c_2(1+k,k^2) + c_2(1,0) - c_2(1,1)\lambda_1)$ и Q_2 — некоторая константа.

Кроме того, в данном случае мы имеем $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = \lim_{s\to\infty} \frac{\lambda(b_{s+3})}{b_{s+3}} = 2\frac{1}{3}$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = \lim_{s\to\infty} \frac{\lambda(b_{s+3}-1)}{b_{s+3}-1} = 2$.

9. Связи с комбинаторной сложностью

Комбинаторная сложность $C(n)$ может быть вычислена с помощью стандартной техники [4] и также может быть выражена через собственные числа матрицы A. В частности, при $k = 6$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = 2\frac{6}{13}$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = 2\frac{2}{9}$. При $k = 2$ имеем $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = 1\frac{2}{3}$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = 1\frac{1}{2}$. Таким образом, перестановочная сложность неподвижных точек морфизмов вида $\varphi(0) = 01^k, \varphi(1) = 0$ для $k \ge 2$ асимптотически приблизительно в полтора раза больше комбинаторной.

Список литературы

[1] S.V. Avgustinovich, *The number of distinct subwords of fixed length in the Morse-Hedlund sequence*, Sibirsk. zhurnal issledovaniya operatsii. **1**:2 (1994), 3–7. MR1304871

[2] S.V. Avgustinovich, A. Frid, T. Kamae, P. Salimov, *Infinite permutations of lowest maximal pattern complexity*, Theoretical Computer Science, **412** (2011), 2911–2921. MR2830255

[3] S.V. Avgustinovich, S. Kitaev, A. Pyatkin and A. Valyuzhenich, *On squarefree permutations*, Journal of Automata, Languages and Combinatorics, **16**:1 (2011), 3–10.

[4] J. Cassaigne, *Complexité et facteurs spéciaux*, Bull. Belg. Math. Soc., **4** (1997), 67–88. MR1440670

[5] D.G. Fon-Der-Flaass and A.E. Frid, *On periodicity and low complexity of infinite permutations*, European J. Combin., **28**:8 (2007), 2106–2114. MR2351513

[6] M.A. Makarov, *On permutations generated by infinite binary words*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **3** (2006), 304–311. (in Russian). MR2276028

[7] M.A. Makarov, *On the permutations generated by the Sturmian words*, Sib. Math. J., **50**:3 (2009), 674–680. Zbl 1224.68068

[8] A. Valyuzhenich, *Permutation complexity of the fixed points of some uniform binary morphisms*, EPTCS **63** (2011), 257–264.

[9] S. Widmer, *Permutation complexity of the Thue-Morse word*, Adv. in Appl. Math., **47**:2 (2011), 309–329. MR2803805

Александр Андреевич Валюженич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: graphkiper@mail.ru