S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 679–687 (2015) УДК 514.74, 519.85
DOI 10.17377/semi.2015.12.053 MSC 01A80

ТРИ СИНТЕТИЧЕСКИХ СЮЖЕТА ИЗ АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИИ

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

Abstract. This is a short overview of the synthetical problems of analysis and geometry which are connected with multiple objective problems of convex geometry, the theory of linear inequalities, and Boolean valued analysis. Some attention is paid to the related historical-philosophical aspects of the problems that were inspired by A.D. Alexandrov, L.V. Kantorovich, and S.L. Sobolev.

Keywords: multiple objective isoperimetric-type problem, Urysohn problem, Leidenfrost effect, Farkas lemma, polyhedral Lagrange principle.

Введение

Первый сюжет — Парето-оптимальные решения модельных задач изопериметрического типа, восходящих к задаче Дидоны и осложненных ограничениями включения. Второй сюжет — положительные решения операторного уравнения $\mathfrak{X}A = B$ или, в более привычных терминах, операторные версии леммы Фаркаша, ключевой для линейного программирования. Третий сюжет — математика в центре культуры, глашатай и инструмент прогресса.

Эти сюжеты связаны с творчеством А. Д. Александрова, Л. В. Канторовича и С. Л. Соболева (см. [1]–[3]).

1. Многоцелевые задачи изопериметрического типа

Выпуклым телом в $\mathbb{R}^N$ называют компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$ (= выпуклую фигуру) с непустой внутренностью. Границу выпуклого тела

Kutateladze, S.S., Three synthetical plots of analysis and geometry.

Расширенный вариант доклада на семинаре Ю. Г. Решетняка 2 октября 2015 г.

Поступила 22 сентября 2015 г., опубликована 24 сентября 2015 г.

называют (*полной*) *выпуклой поверхностью.* Класс эквивалентных с точностью до переноса выпуклых поверхностей $\{z + \mathfrak{x} \mid z \in \mathbb{R}^N\}$ отождествляют с соответствующей мерой на сфере — с *поверхностной функцией* этого класса $\mu(\mathfrak{x})$. Полной многогранной выпуклой поверхности $\mathfrak{x}$, заданной единичными нормалями $z_1, \dots, z_m$ её $(N-1)$-мерных граней, имеющих площади $s_1, \dots, s_m$, сопоставляют взвешенную сумму мер Дирака в точках $z_1, \dots, z_m$. Иными словами, $\mu(\mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^m s_k \varepsilon_{z_k}$. Поверхностную функцию произвольного выпуклого тела $\mathfrak{x}$ можно определить как слабый предел поверхностных функций сети вписанных в $\mathfrak{x}$ выпуклых многогранников. Поверхностная функция представляет собой *александровскую меру.* Так называют положительную меру на сфере, не сосредоточенную ни в одном сечении сферы гиперподпространством и аннулирующую точки (т. е. обращающуюся в нуль на следах линейных функционалов над $\mathbb{R}^N$ на сферу S_{N-1} — границу N-мерного единичного шара $\mathfrak{z}_N$). Корректность отождествления класса транслятов выпуклого тела и его поверхностной функции основана на классической теореме Александрова о возможности восстановления выпуклой поверхности по заданной поверхностной функции. Эта теорема опубликована в 1938 г.

Относительно сложения по Минковского *объем* $V(\mathfrak{x})$ фигуры $\mathfrak{x}$ является однородным полиномом степени N. По этой причине вычисление его субдифференциала не вызывает затруднений. При сложении поверхностей по Бляшке в пространстве размерности $N \geq 3$ объем перестает быть однородным полиномом.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $p : \mathfrak{x} \mapsto V^{1/N}(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\hat{p} : \mathfrak{x} \mapsto V^{(N-1)/N}(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathcal{A}_N$. Таким образом, *неравенство Минковского* переписывается в виде $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \geq p(\mathfrak{x})\hat{p}(\mathfrak{y})$. По теореме Брунна — Минковского функционал p, определенный на конусе $\mathcal{V}_N$, суперлинеен. Отсюда следует, что функционал $\hat{p}$, определенный на конусе $\mathcal{A}_N$, также суперлинеен. Поскольку *площадь поверхности* $\mathfrak{x}$ записывается в виде $S(\mathfrak{x}) = N\langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle$, то изопериметрическая задача в структуре Бляшке превращается в выпуклую программу.

1.1. Векторная изопериметрическая задача. Пусть заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется найти тело $\mathfrak{x}$, имеющее заданный объем и минимизирующее каждый из смешанных объемов $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1), \dots, V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_m)$. Символически:

$$\mathfrak{x} \in \mathcal{A}_N; \ \hat{p}(\mathfrak{x}) \geq \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}}); \ (\langle \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x} \rangle, \dots, \langle \mathfrak{y}_m, \mathfrak{x} \rangle) \to \inf.$$

Нетрудно видеть, что мы имеет дело с регулярной в смысле Слейтера выпуклой программой в структуре Бляшке. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

1.2. Теорема. *Любое Парето-оптимальное решение* $\bar{\mathfrak{x}}$ *векторной изопериметрической задачи имеет вид*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \alpha_1 \mathfrak{y}_1 + \ldots + \alpha_m \mathfrak{y}_m,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *— положительные числа.*

Поясним приведенный результат для *эффекта Лейденфроста* — сфероидального состояния капли жидкости на горизонтальной поверхности нагрева.

1.3. Задача Лейденфроста. В трехмерном пространстве при заданном объеме выпуклой фигуры минимизировать её площадь поверхности и вертикальную ширину.

В силу симметрии дело сводится к плоской двухкритериальной задаче, каждое Парето-оптимальное решение которой в силу уже сказанного представляет собой *стадион* — взвешенную сумму Минковского круга и горизонтального отрезка.

1.4. Теорема. *Плоский сфероид — Парето-оптимальное решение задачи Лейденфроста — представляет собой результат вращения стадиона вокруг вертикальной оси, проходящей через центр его симметрии.*

1.5. Внутренняя задача Урысона с уплощением. Пусть заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathcal{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Среди тел, лежащих в $\mathfrak{x}_0$ и имеющих данную интегральную ширину, найти тела $\mathfrak{x}$, максимизирующие объем и минимизирующие толщину в направлении уплощения:

$$\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_N;\ \mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \longrightarrow \inf.$$

1.6. Теорема. *Для того чтобы допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ было Парето-оптимальным решением внутренней задаче Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа α, β и критическая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \mu(\mathfrak{x}) + \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{spt}(\mu(\mathfrak{x}))).$$

Здесь $\operatorname{spt}(\mu(\mathfrak{x}))$ — носитель меры $\mu(\mathfrak{x})$.

Пусть плоская фигура $\mathfrak{x}_0 \in \mathcal{V}_2$ имеет ось симметрии $A_{\bar{z}}$ с направляющим вектором $\bar{z}$. Пусть, далее, $\mathfrak{x}_{00}$ — результат вращения $\mathfrak{x}_0$ вокруг оси симметрии $A_{\bar{z}}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. При этих данных возникает

1.7. Случай поверхностей вращения.

$$\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_3;\ \mathfrak{x} \text{ — тело вращения вокруг оси } A_{\bar{z}};$$
$$\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_{00};\ \langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle \geq \langle \mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}} \rangle;$$
$$(-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \longrightarrow \inf.$$

В силу вращательной симметрии пространственная задача сводится к аналогичной задаче в плоскости. На плоскости интегральная ширина и периметр выпуклой фигуры пропорциональны и мы приходим к уже рассмотренной задаче 1.5. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

1.8. Теорема. *Парето-оптимальные решения в случае 1.7 возникают в результате вращения вдоль оси симметрии Парето-оптимальных решений плоской внутренней задачи Урысона с уплощением вдоль этой оси.*

Относительно подобных задач в произвольных размерностях известно совсем немного. Плоский случай переоткрывается и в последние годы (см., например, [4]).

1.9. Внешняя задача Урысона с уплощением. Пусть заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathcal{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Среди тел, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих данную интегральную ширину, найти тела $\mathfrak{x}$, максимизирующие объем и минимизирующие толщину в направлении уплощения:

$$\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_N;\ \mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \longrightarrow \inf.$$

1.10. Теорема. *Для того чтобы допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ было Парето-оптимальным решением внешней задачи Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа α, β*

и критическая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$V(\bar{\mathfrak{x}}) + V_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = \alpha V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}) + 2N\beta b_{\bar{z}}(\bar{\mathfrak{x}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{spt}(\mu(\mathfrak{x}_0))).$$

Здесь $\gg_{\mathbb{R}^N}$ — специальное отношение мажорации мер, предложенное Ю. Г. Решетняком в 1954 г. Именно, $\mu \gg_{\mathbb{R}^N} \nu$ означает, что для каждого покрытия сферы S_{N-1} конечным числом непересекающихся борелевских множеств $U_1, \dots, U_m$ найдутся меры $\mu_1, \dots, \mu_m$, составляющие в сумме μ и такие, что каждая разность $\mu_k - \nu|_{U_k}$, где $k := 1, \dots, m$ аннулирует сужения всех линейных функционалов над $\mathbb{R}^N$.

1.11. Приведенный список может быть продолжен для многоцелевых обобщений многих скалярных задач, среди которых задачи с зонными ограничениями и текущими гиперплоскостями, задачи в классе центрально-симметричных фигур, задачи типа Линделёфа и др. Эти задачи, как правило, выпуклы в структуре Бляшке или Минковского. В заключение остановимся на задачах несколько иного типа, где поиск формы ведется для нескольких фигур одновременно.

1.12. Оптимальные выпуклые оболочки. В пространстве $\mathbb{R}^N$ заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется разместить выпуклую фигуру $\mathfrak{x}_k$ в $\mathfrak{y}_k$, где $k := 1, \dots, m$ так, чтобы одновременно максимизировать объем каждой из фигур $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ и минимизировать интегральную ширину выпуклой оболочки объединения этих фигур:

$$\mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{y}_k \ (k := 1, \dots, m);$$
$$(-p(\mathfrak{x}_1), \dots, -p(\mathfrak{x}_m), \langle \operatorname{co}\{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m\}, \mathfrak{z}_N \rangle) \longrightarrow \inf.$$

1.13. Теорема. *Для того чтобы допустимые выпуклые тела $\bar{\mathfrak{x}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{x}}_m$ представляли собой Парето-оптимальное решение задачи* 1.12*, необходимо и достаточно, чтобы нашлись неравные нулю одновременно положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и два набора положительных мер $\mu_1, \dots, \mu_m$ и $\nu_1, \dots, \nu_m$ такие, что*

$$\nu_1 + \ldots + \nu_m = \mu(\mathfrak{z}_N);$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_k(z) = \mathfrak{y}_k(z) \quad (z \in \operatorname{spt}(\mu_k)); \quad \alpha_k\mu(\bar{\mathfrak{x}}_k) = \mu_k + \nu_k \ (k := 1, \dots, m).$$

Детали см. в [5], [6].

2. Линейные операторные неравенства

Классическая лемма Фаркаша, известная также как лемма Фаркаша — Минковского, играет ключевую роль в линейном программировании и родственных разделах оптимизации. Скаляризация, предлагаемая булевозначным анализом, открывает некоторые довольно общие свойства систем операторных неравенств.

Пример. Пусть $A_1, \dots, A_N$ и B — ограниченные линейные операторы из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$, где μ — некоторая мера на T.

Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:

(1) Существуют $x \in L_p$ и измеримые подмножества $U, V \subset T$, причем $\mu(U) \neq 0$, $U \subset V$ такие, что

$$Bx(t) > 0 \ (t \in U), A_1x(t) \leq 0, \ldots, A_Nx(t) \leq 0 \ (t \in V).$$

(2) Найдутся положительные измеримые функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ на T, для которых

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y. Если X снабжено некоторой Y-полунормой, под $L^{(m)}(X, Y)$ мы будем понимать пространство мажорированных линейных операторов из X в Y. Для $T : X \longrightarrow Y$ и $y \in Y$, как обычно, полагаем $\{T \leq y\} := \{T(\cdot) \leq y\} := \{x \in X \mid Tx \leq y\}$ и $\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$.

Рассмотрим еще одно вещественное векторное пространство W и диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & W \arrow[dl, "\mathfrak{X}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Как известно,

(i) $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$;

(ii)[1] *Если W упорядочено конусом W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, т. е. $A(X)$ мажорирует W, то*

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

Пусть $\mathbb{B} := \mathbb{B}(Y)$ — *база* Y, т. е. полная булева алгебра проекторов в Y, а $m(Y)$ — максимальное расширение Y. Будем считать, что $W = Y$. В этой ситуации имеет место операторный аналог леммы Фаркаша.

Теорема 2.1. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Заданы мажорированные полиэдральные сублинейные операторы $P_1, \ldots, P_N \in \mathrm{PSub}^{(m)}(X, Y)$ и мажорированный сублинейный оператор $P \in \mathrm{Sub}^{(m)}(X, Y)$. Пусть, далее, $v \in Y$ и элементы $u_1, \ldots, u_N$ таковы, что неоднородная система*

$$P_1(x) \leq u_1, \ldots, P_N(x) \leq u_N$$

совместна.

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) *для всех $b \in \mathbb{B}$, где $\mathbb{B}$ — база Y, неоднородное сублинейное операторное неравенство $bP(x) \geq bv$ является следствием системы полиэдральных сублинейных операторных неравенств $bP_1(x) \leq bu_1, \ldots, bP_N(x) \leq bu_N$, т. е.*

$$\{bP \geq bv\} \supset \{bP_1 \leq bu_1\} \cap \ldots \cap \{bP_N \leq bu_N\};$$

(2) *найдутся положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ такие, что*

$$(\forall x \in X)\ P(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k P_k(x) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \leq -v.$$

---

[1] Теорема Канторовича.

Теорема 2.2. *Для полиэдральной экстремальной задачи*

$$P_1(x) \leq u_1, \dots, P_N(x) \leq u_N, \quad P(x) \longrightarrow \inf$$

справедлив принцип Лагранжа для значений — конечное значение задачи минимизации с ограничениями является значением безусловной задачи минимизации подходящего лагранжиана.

Дополнительной к полиэдральности квалификации ограничений при этом не предполагается. В то же время важно подчеркнуть, что условие Слейтера позволяет отказаться как от полиэдральности, так и от условий связи областей прибытия ограничений и цели. Это обстоятельство давно известно в практически предельной общности.

В случае следствий одного неравенства не нужны никаких предположений, ограничивающих класс рассматриваемых функционалов. Аналогичный вариант леммы Фаркаша для двух неравенств в общем случае просто неверен. В самом деле, включение $\{f = 0\} \subset \{g \leq 0\}$, эквивалентное включению $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$, не обеспечивает пропорциональности f и g в случае произвольного подполя поля $\mathbb{R}$. Достаточно рассмотреть, скажем, $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, взять разрывный $\mathbb{Q}$-линейный функционал на $\mathbb{R}$ и тождественное отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

В этой связи уместно сформулировать такой результат.

Теорема 2.2. *Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича и $A, B \in L(X, Y)$. Эквивалентны утверждения:*

(1) $(\exists \alpha \in \operatorname{Orth}(m(Y)))\ B = \alpha A$*;*

(2) *Существует проектор $\varkappa \in \mathbb{B}$ такой, что для всякого $b \in \mathbb{B}$ выполнено*[2]

$$\{\varkappa b B \leq 0\} \supset \{\varkappa b A \leq 0\}, \quad \{\neg\varkappa b B \leq 0\} \supset \{\neg\varkappa b A \geq 0\}.$$

Теорема об альтернативе. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Пусть также заданы мажорированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$. Тогда имеет место в точности одна из следующих возможностей.*

(1) *Найдутся точка $x \in X$ и проекторы $b, b' \in \mathbb{B}$ такие, что $b' \leq b$ и*

$$b'Bx > 0,\ bA_1x \leq 0,\ \dots,\ bA_Nx \leq 0.$$

(2) *Существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))$ такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Остановимся немного на исследовании линейных неравенств с неточными данными в духе интервального анализа.

Предположим дополнительно, что X является векторной решеткой. Напомним, под *интервальным оператором* $\mathbf{T}$ из X в Y понимают просто порядковый интервал $[\underline{T}, \overline{T}]$ в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$. По умолчанию разумеется, что $\underline{T} \leq \overline{T}$. Говорят, что интервальное уравнение $\mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$ имеет *слабое интервальное решение*, если для некоторых $A \in \mathbf{A}$ и

[2] Как обычно, $\neg\varkappa := \mathbb{1} - \varkappa$.

$B \in \mathbf{B}$ решение имеет уравнение $B = \mathfrak{X}A$. Принято рассматривать и иные типы решений. В целях иллюстрации механизма исследований такого рода ограничимся слабыми интервальными решениями уравнений, уравновешивая объем и идеи.

С каждым интервальным оператором $\mathbf{T}$ свяжем сублинейный оператор $P_{\mathbf{T}}$. Заметим, что $\mathbf{T} = [0, \overline{T} - \underline{T}] + \underline{T}$. Стало быть, для $x \in X$ будет

$$P_{\mathbf{T}}(x) = P_{[0,\overline{T}-\underline{T}]}x + \underline{T}x = (\overline{T} - \underline{T})x_+ + \underline{T}x = \overline{T}x_+ - \underline{T}x_-.$$

Оператор $\mathbf{T}$ назовем *адаптированным*, если $P_{\mathbf{T}} \in \mathrm{PSub}(X, Y)$, т. е. если $P_{\mathbf{T}}$ поточечный супремум конечного числа операторов. Отметим, что если X и Y — конечномерные пространства, то все интервальные операторы из X в Y адаптированы. Наконец, положим $\sim (x) := -x$ для всех $x \in X$.

Теорема 2.3. *Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$ заданы адаптированные интервальные операторы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ и произвольный интервальный оператор $\mathbf{B}$.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) *Интервальное уравнение*

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

имеет слабое интервальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(Y)_+$.

(2) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ будет*

$$\{b\mathfrak{B} \geq 0\} \supset \{b\mathfrak{A}_1^{\sim} \leq 0\} \cap \ldots \cap \{b\mathfrak{A}_N^{\sim} \leq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_k^{\sim} := P_{\mathbf{A}_k} \circ \sim$ для $k := 1, \dots, N$ и $\mathfrak{B} := P_{\mathbf{B}}$.

Детали см. в [7], [8].

3. Математика в центре культуры

Этот сюжет заключительный. Конкретные математические факты являются как результатом, так и исходным пунктом общих воззрений исследователя. В. И. Вернадский ещё в 1912 г. писал (см. [9, с. 203]):

> Натуралист и математик всегда должен знать прошлое своей науки, чтобы понимать её настоящее. Только этим путем возможна правильная и полная оценка того, что добывается современной наукой, что выставляется ею, как важное, истинное или нужное. В сущности, мы имеем два критерия оценки научной истины, отличия преходящего от вечного. Один путь — путь философской критики, связанный с теорией познания, другой путь — путь исторической критики, связанный с историей науки.

Математика — древнейшая наука. На интеллектуальном поле не действует закон убывающего плодородия. Чем больше мы узнаём, тем значительнее становится граница с незнаемым, тем чаще мы сталкиваемся с неведомым. XX век обогатил геометрические представления понятиями пространства-времени и фрактальности. Каждое конкретное знание — это событие, элемент пространства Минковского. Познанное образует явно ограниченное множество знаний. Рубежи науки составляют границу познанного с неведомым, которая несомненно фрактальна, и у нас нет никаких оснований предполагать её спрямляемость или измеримость. Стоит при этом отметить, что маршруты к передовым границам науки, прокладываемые преподавателями в сфере образования, достаточно гладкие. Педагогика не любит скачков и резкой смены сложившейся парадигмы. Возможно, что эти топологические препятствия отражают объективные трудности модернизации образования. Не счесть доказательств фрактальности границы знания и незнания. Среди них такие негативные явления, как безудержный рост псевдонауки, мистицизма и иных форм мракобесия, заползающих во все лакуны непознанного. Проявлениями фрактальности служат также самые неожиданные, прекрасные и поразительные взаимосвязи внешне далеких отраслей и разделов науки.

Оперируя простейшими универсальными формами мышления, математика представляет собой науку доказательных исчислений, реализующую бесконечные возможности конечного человека. Число — мера количества. Исчисление — сведение к числу. Математика была и остается ремеслом формул, искусством вычисления, наукой исчислять. Анализ возник как дифференциальное и интегральное исчисление. Дифференцирование — определение тенденций, а интегрирование — предсказание будущего по тенденциям. Геометрия и топология — исчисление пространственных форм. Алгебра — исчисление неизвестных, а логика — исчисление истин и доказательств.

Ищущий и нашедший истину человек — вот источник и цель науки. Расположенная в центре культуры, наука помогает преодолевать тяготы жизни, показывает границы человеческих знаний и умений, раскрывает необъятность неведомого и раздвигает пределы разума. В центре науки расположена математика — самая человечная из наук. Как любая наука, математика никого не разделяет, а всех соединяет.

Свобода — неотъемлемое право человека и, стало быть, сущность математики. Свобода математики не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования, а проявляется в немалой мере в предоставляемых ею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости. Математика немыслима без математиков. Поэтому не будет большой натяжкой перефразировать утверждение Г. Кантора и сказать, что *сущность математика заключается в его свободе*. Математик тем больше, чем более он свободен. Математиком быть не стыдно, хотя математики и обречены на забвение. Математика — лучшая форма эвтаназии, ибо рождена человечеством и исчезнет только вместе с ним.

XX век отмечен двумя мировыми войнами, революциями и противостоянием политических и экономических систем. Эти обстоятельства существенно воздействуют на позиционирование математики в системе наук, историю и значение математических идей. В настоящее время происходит переосмысление истоков, оснований и тенденций математики. Необходимо преодолеть догматизм и шовинизм, ведущие к деформациям в развитии науки. Неимоверно важны проблемы восстановления реальной истории фундаментальных математических идей, механизмов организации и функционирования научных исследований. Принципиальными можно считать установки одного международного коллектива математиков, историков и философов науки [10].

Процессы переосмысления истории и философии математики связаны в большой мере с научными установками классиков анализа и геометрии, работавших в Сибири. Лейтмотив творчества С. Л. Соболева — математика и свобода [11], А. Д. Александрова — математика и диалектика [12], Л. В. Канторовича — синтез культур [13]. Об этом смотри также [14], [15].

References

[1] A.D. Alexandrov, *Geometry and Applications*, Nauka Publishers, Novosibirsk, 2006. Zbl 1234.01015

[2] L.V. Kantorovich, *Selected Works. Parts 1 and 2*, Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 1996. MR1631293, MR1800892

[3] S.L. Sobolev, *Selected Works. Vols. 1 and 2*, Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2006. MR2265365

[4] G. Strang, *Maximum area with Minkowski measures of perimeter*, Proc. Royal Soc. Edinburg, **138**:1 (2008), 189–199. MR2388943

[5] S.S. Kutateladze, *Multiobjective problems of convex geometry*, Sib. Math. J., **50**:5 (2009), 887–897. MR2603856

[6] S.S. Kutateladze, *Multiple criteria problems over Minkowski balls*, J. Appl. Indust. Math., **7**:2 (2013), 208–214. Zbl 1290.49086

[7] S.S. Kutateladze, *The Farkas lemma revisited*, Sib. Math. J., **51**:1 (2010), 78–87. MR2654525

[8] S.S. Kutateladze, *The polyhedral Lagrange principle*, Sib. Math. J., **52**:3 (2011), 484–486. MR2858646

[9] V.I. Vernadsky, *Essays on the Universal History of Science*, Nauka Publishers, Moscow, 1988.

[10] J. Bair, P. Błaszczyk, R. Ely, V. Henry, V. Kanovei, K. Katz, M. Katz, S. Kutateladze, T. McGaffey, D. Schaps, D. Sherry, and S. Shnider, *Is mathematical history written by the victors?* Notices of the AMS, **60**:7 (2013), 886–904). MR3086638

[11] S.L. Sobolev, *Wisdom of symbols*, Sib. Math, J., **49**:5 (2008), 765-770. MR2469045

[12] A.D. Alexandrov, *Articles of Various Years*, Nauka Publishers, Novosibirsk, 2008. Новосибирск: Наука, 2008.

[13] L.V. Kantorovich, *Mathematical-Economic Articles*, Nauka Publishers, Novosibirsk, 2011.

[14] S.S. Kutateladze, *Science and Its People*, Southern Math. Inst., Vladikavkaz, 2010. MR2850531

[15] S.S. Kutateladze, *Science at a Crossroads*, Southern Math. Inst., Vladikavkaz, 2015.

Semen Samsonovich Kutateladze
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Av.
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sskut@math.nsc.ru