S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 698–703 (2015) УДК 517.53,517.55

DOI 10.17377/semi.2015.12.055 MSC 32A10,46E15

ОБ ОДНОМ ИЗ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАМЫКАНИЙ НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

А.Г. ПИНУС

Abstract. B. I. Plotkin has introduced some concepts of logical geometries on universal algebras. Here we study one of the related logical closure operators on sets of elements of an algebra definable by quantifier–free formulas using some quasiorder on the basic set of this algebra.

Keywords: algebraic geometry, universal algebra, closure operator.

В работах Б. И. Плоткина и В. Н. Ремесленникова с соавторами (см., к примеру, [1]–[3]) заложены основы алгебраической геометрии универсальных алгебр. Одним из основных понятий которой является понятие алгебраического множества алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ — совокупности решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы термальных уравнений сигнатуры σ. В работах автора (см., к примеру, [4, 5]) введено понятие условного терма, а в работе [6] на основе этого понятия — понятие условной алгебраической геометрии универсальной алгебры $\mathfrak{A}$, основанной на совокупностях решений в $\mathfrak{A}$ систем условно термальных уравнений. Там же замечено, что эта геометрия является частным случаем рассматриваемых Б. И. Плоткиным [7, 8] логических геометрий универсальных алгебр, а именно геометрией определяемой бескванторными не негативными типами элементов (совокупностями бескванторных формул логики первого порядка истинных на элементах порождающих одноэлементные подалгебры).

Pinus, A.G., On some of logical closures on universal algebras.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

Поступила 5 февраля 2015 г., опубликована 5 октября 2015 г.

В работе [9] автором, для изучения операции алгебраического замыкания на подмножествах универсальной алгебры $\mathfrak{A}$, предложено рассмотрение некоторого отношения квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ индуцированного на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$ ее внутренними гомоморфизмами (гомоморфизмами между подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}$). При этом, алгебраические множества алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ индуцируются главными идеалами квазиупорядоченного множества $< A';\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}'}>$ для некоторого канонического расширения $\mathfrak{A}' =< A';\sigma >$ алгебры $\mathfrak{A}$. Помимо того квазипорядок $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ оказался достаточно интересным алгебраическим объектом и сам по себе ([10]).

Пусть L_0 - фрагмент языка логики первого порядка состоящий из бескванторных формул рассматриваемой сигнатуры, для любой алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$, любого $B \subseteq A^n$ через $T_{pL_o}(B)$ обозначим совокупность L_0-формул вида $\Phi(\bar{x}) = \Phi(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что $\mathfrak{A} \vDash \Phi(\bar{a})$ для любых $\bar{a} \in B$ (L_0-тип множества B).

Определение 1. *Подмножество $B \subseteq A^n$ назовем (см. [7]) n*-мерным L_0-алгебраическим *тогда и только тогда, когда $B = \{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \vDash \Phi(\bar{a}), \Phi(\bar{x}) \in T_{pL_0}(B)\}$.*

Через $Alg^n_{L_0}(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех n-мерных L_0-алгебраических подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$. Очевидным образом пересечение любой совокупности n-мерных L_0-алгебраических подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$ и само является таковым. Тем самым имеет место

Замечание 1. Совокупность $Alg^n_{L_0}\mathfrak{A}$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. При этом, в то время как $\inf\{B_i\,|\,i \in I\} = \bigcap\limits_{i\in I} B_i$ для $\{B_i\,|\,i \in I\} \subseteq Alg^n_{L_0}\mathfrak{A}$, $\sup\{B_i|i \in I\}$, совпадающий с $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ для конечных совокупностей $\{B_i|i \in I\} \subseteq Alg^n_{L_0}\mathfrak{A}$, для бесконечных совокупностей $\{B_i|i \in I\} \subseteq Alg^n_{L_0}\mathfrak{A}$ может быть отличен от $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$.

Действительно, пусть $B_1, B_2 \in Alg^n_{L_0}\mathfrak{A}$, тогда $B_1 \cup B_2 = \{\bar{a} \in A^n\,|\,\mathfrak{A} \vDash \Phi_1(\bar{a}) \vee \Phi_2(\bar{a}), \Phi_1(\bar{x}) \in T_{pL_0}(B_1), \Phi_2(\bar{x}) \in T_{pL_0}(B_2)\}$, т.е. $T_{pL_0}(B_1 \cup B_2) = \{\Phi_1(\bar{x}) \vee \Phi_2(\bar{x}) | \Phi_i(\bar{x}) \in TpL_0(B_i)\}$. С другой стороны, пусть сигнатура σ состоит из единственного символа f одноместной функции и $\mathfrak{A} =< \bigcup\limits_{n\in N} A_n \bigcup A_\infty;\sigma >$, где $< A_n;\sigma >$ - n-цикл и $< A_\infty;\sigma >$ изоморфна алгебре целых чисел с операцией $f(m) = m+1$. Тогда очевидно, что $A_n \in Alg^1_{L_0}\mathfrak{A}$ для любого $n \in N$, но $\bigcup\limits_{n\in N} A_n \notin Alg^1_{L_0}\mathfrak{A}$, так как для любой $\Phi(x) \in T_{pL_0}(\bigcup\limits_{n\in N} A_n)$ имеет место $\mathfrak{A} \vDash \Phi(a)$ для любого $a \in A_\infty$.

Для любого непустого $B \subseteq A^n$ через $\bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$ обозначим наименьшее L_0-алгебраическое подмножество алгебры $\mathfrak{A}$, включающее в себя B.

Определение 2. *Множество $\bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$ будем называть L_0-алгебраическим замыканием множества B. Положим $\bar{\varnothing}^{L_0}_{\mathfrak{A}} = \varnothing$.*

Без труда замечается, что операция $B \to \bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$ является операцией замыкания на $P(A^n) = \{B\,|\,B \subseteq A^n\}$, т.е. удовлетворяет условиям:

1) $B \subseteq \bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$, 2) $\overline{(\bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}})}^{L_0}_{\mathfrak{A}} = \bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$, 3) $B_1 \subseteq B_2 \to \bar{B}^{L_0}_{1\mathfrak{A}} \subseteq \bar{B}^{L_0}_{2\mathfrak{A}}$.

При этом, в силу замеченного выше, имеет место

Замечание 2. $\bar{B}^{L_0}_{1\mathfrak{A}} \cup \bar{B}^{L_0}_{2\mathfrak{A}} = \overline{B_1 \cup B_2}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$, в то время как $\bar{B}^{L_0}_{1\mathfrak{A}} \cap \bar{B}^{L_0}_{2\mathfrak{A}}$ может и не равняться $\overline{B_1 \cap B_2}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$.

К примеру для рассмотренного выше моноунара $\mathfrak{A}$ пусть $B_1 = \bigcup\limits_{n-\text{четное}} A_n$, $B_2 = \bigcup\limits_{n-\text{нечетное}} A_n$. Тогда $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и, значит, $\overline{B_1 \cap B_2}^{L_0}_{\mathfrak{A}} = \varnothing$, в то время как $\bar{B}^{L_0}_{1\mathfrak{A}} = B_1 \cup A_\infty$, $\bar{B}^{L_0}_{2\mathfrak{A}} = B_2 \cup A_\infty$, т.е. $\overline{B_1 \cap B_2}^{L_0}_{\mathfrak{A}} \neq \bar{B}^{L_0}_{1\mathfrak{A}} \cup \bar{B}^{L_0}_{2\mathfrak{A}}$.

Напомним, что внутренним гомоморфизмом (изоморфизмом) алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм (изоморфизм) между ее подалгебрами. Для любого $B \subseteq A$ через $< B >_{\mathfrak{A}}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$, порожденную множеством B. Для $a \in A$ будем обозначать $< \{a\} >_{\mathfrak{A}}$ как $< a >_{\mathfrak{A}}$. На основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ рассмотрим отношение $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ ($\sim_{Iso\mathfrak{A}}$) определенное следующим образом: для $a, b \in A$ полагаем $a \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} b$ ($a \sim_{Iso\mathfrak{A}} b$) тогда и только тогда, когда существует некоторый внутренний гомоморфизм (изоморфизм) φ алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $\varphi(b) = a$ или иначе, когда существует гомоморфизм (изоморфизм) φ алгебры $< b >_{\mathfrak{A}}$ на $< a >_{\mathfrak{A}}$, такой что $\varphi(b) = a$. Очевидно, что $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ является отношением квазипорядка на множестве A, таким что соответствующая ему эквивалентность на A совпадает с отношением $\sim_{Iso\mathfrak{A}}$.

Для любой алгебраической системы $\mathfrak{L} =< B; \sigma >$ и любого $b \in B$ через $D^+_{b,\mathfrak{L}}(x)$ обозначим позитивную диаграмму элемента b в системе $\mathfrak{L}$, т.е. совокупность всех атомных формул (формул вида $t_1(x) = t_2(x)$, $P(t_1(x), \ldots, t_n(x))$, где $t_i(x)$ термы сигнатуры σ, P — n-местный предикат той же сигнатуры) истинных на элементе b в системе $\mathfrak{L}$. Через $D_{b,\mathfrak{L}}(x)$-диаграмму элемента b в системе $\mathfrak{L}$, т.е. совокупность всех атомных и отрицаний атомных формул истинных в системе $\mathfrak{L}$ на элементе b.

В работе [9] операция алгебраического замыкания $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}$ на универсальных алгебрах $\mathfrak{A}$ описана в терминах отношения $\leqslant Ihm\mathfrak{A}$ на некотором расширении $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$. В настоящей работе будет предложено подобное описание операции $B \to \bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$.

Имеет место

Лемма 1. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и любых $a, b \in A$ выполнено $b \in \overline{\{a\}}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда $b \sim_{Iso\mathfrak{A}} a$.*

Действительно, для любой алгебраической системы $\mathfrak{L} =< B; \sigma >$ и любых $a, b \in B$ имеем

а) $\mathfrak{L} \vDash D^+_{b,\mathfrak{L}}(a)$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм φ подсистемы $< b >_{\mathfrak{L}}$ системы $\mathfrak{L}$ на подсистему $< a >_{\mathfrak{A}}$, такой что $\varphi(b) = a$, т.е. тогда и только тогда, когда $a \leqslant_{Ihm\mathfrak{L}} b$;

б) $\mathfrak{L} \vDash D_{b,\mathfrak{L}}(a)$ тогда и только тогда, когда $a \sim_{Iso\mathfrak{L}} b$.

Пусть теперь $B \subseteq A$, тогда очевидно, что для $a \in A$ выполнено $a \in \bar{B}^{L_0}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \vDash \bigcap\limits_{b \in B} D_{b,\mathfrak{A}}(a)$.

Через $\mathfrak{A}^0$ обозначим обогащение алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ двуместным предикатом $P(x, y)$, таким что для $a, b \in A$ имеет место $\mathfrak{A}^\circ \vDash P(a, b)$ тогда и только тогда, когда $a \neq b$.

Определение 3. *Пусть $\leqslant$ некоторое фиксированное вполне упорядочение множества A. Для любого непустого $B \subseteq A$ через d_B обозначим элемент алгебраической системы $(\mathfrak{A}^0)^A$ (прямой степени системы $\mathfrak{A}^0$), такой что для $b \in B$ имеет место $d_B(b) = b$, а для $b \notin B$ — $d_B(b) = b_0$, где b_0 — наименьший элемент множества B относительно вполне упорядочения $\leqslant$.*

Тем самым, для любых термов $t_1(x), t_2(x)$ сигнатуры σ и любого $B \subseteq A$ имеет место: $(\mathfrak{A}^0)^A \models t_1(d_B) = t_2(d_B) \Leftrightarrow$ для любого $b \in B$ выполнено $\mathfrak{A} \models t_1(b) = t_2(b); (\mathfrak{A}^0)^A \models P(t_1(d_B, t_2(d_B)) \Leftrightarrow$ для любого $b \in B$ выполнено $\mathfrak{A} \models t_1(b) \neq t_2(b)$.

Через $\bar{a}$ для любого $a \in A$ обозначим элемент из $(\mathfrak{A})^A$, такой что $\bar{a}(b) = a$ для любого $b \in A$.

Тогда имеет место следующее описание операции $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$ на подмножествах универсальных алгебр $\mathfrak{A}$.

Предложение 1. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и для любых $a \in A$, $B \subseteq A$ включение $a \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{a} \leqslant_{Ihm(\mathfrak{A}^0)^A} d_B$.*

Доказательство. Пусть $\bar{a} \leqslant_{Ihm(\mathfrak{A}^0)^A} d_B$. Тогда, если $\mathfrak{A} \models t_1(b) = t_2(b)$ для любого $b \in B$, то $(\mathfrak{A}^0)^A \models t_1(d_B) = t_2(d_B)$ и значит, в силу неравенства $\bar{a} \leqslant_{Ihm(\circ)^A} d_B$, имеем $(\mathfrak{A}^0)^A \models t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a})$, т.е. $\mathfrak{A} \models t_1(a) = t_2(a)$. Если же $\mathfrak{A} \models t_1(b) \neq t_2(b)$ для любого $b \in B$, то $\mathfrak{A}^0 \models P(t_1(b), t_2(b))$ для каждого $b \in B$, значит, $(\mathfrak{A}^0)^A \models P(t_1(d_B), t_2(d_B))$ и, в силу неравенства $\bar{a} \leqslant_{Ihm(\circ)^A} d_B$, получаем $(\mathfrak{A}^0)^A \models P(t_1(\bar{a}), t_2(\bar{a}))$. Тем самым, $\mathfrak{A} \models P(t_1(a), t_2(a))$, т.е. $\mathfrak{A} \models t_1(a) \neq t_2(a)$. Итак, для любых термов $t_1(x), t_2(x)$ сигнатуры σ выполнено $\mathfrak{A} \models t_1(a) = t_2(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models t_1(b) = t_2(b)$ для любого $b \in B$. Тем самым, для любой формулы $\Phi(x) \in L_0$ справедливо $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \Phi(b)$ для любого $b \in B$, т.е. $a \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$ в этом случае.

Покажем обратное. Пусть $a \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$, т.е. $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$ для любой L_0-формулы $\Phi(x)$, истинной в $\mathfrak{A}$ на каждом элементе b из B. В частности, $\mathfrak{A} \models t_1(a) = t_2(a)$, если $\mathfrak{A} \models t_1(b) = t_2(b)$ для любого $b \in B$ и $\mathfrak{A} \models P(t_1(a), t_2(a))$ (т.е. $\mathfrak{A} \models t_1(a) \neq t_2(a)$), если $\mathfrak{A} \models P(t_1(b), t_2(b))$ (т.е. $\mathfrak{A} \models t_1(b) \neq t_2(b)$) для любого $b \in B$. Тем самым, $(\mathfrak{A}^0)^A \models t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a})$, если $(\mathfrak{A}^0)^A \models t_1(d_B) = t_2(d_B)$ и $(\mathfrak{A}^0)^A \models P(t_1(\bar{a}), t_2(\bar{a}))$, если $(\mathfrak{A}^0)^A \models P(t_1(d_B), t_2(d_B))$. Следовательно, $\bar{a} \leqslant_{Ihm(\circ)^A} d_B$ и утверждение доказано. □

Так же как в работе [8], рассмотрение унарного обеднения $\mathfrak{A}^{[n]*}$ матричной степени $\mathfrak{A}^{[n]}$ алгебры $\mathfrak{A}$ позволяет перенести результат об одномерных L_0-замкнутых множествах алгебры $\mathfrak{A}$ на ее n-мерные L_0-замкнутые множества.

Прежде всего имеет место

Лемма 2. *Для любой алгебры $\mathfrak{A}$ и любого натурального n имеет место равенство $Alg_{L_0}^n \mathfrak{A} = Alg_{L_0}^1 \mathfrak{A}^{[n]*}$.*

Действительно, напомним, что основным множеством матричной степени $\mathfrak{A}^{[n]}$ алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ служит множество A^n, а ее сигнатура $\sigma^{[n]}$ состоит из любых k-местных символов m_t, где t любая последовательность $< t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x}) >$ kn-местных термов сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$ и при этом для любого $\bar{a} \in A^{kn}$ (при отождествлении A^{kn} с $(A^n)^k$, считая $\bar{a} = < \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k >$, где $\bar{a}_i \in A^n$) имеет место $m_t(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k) = t_1(\bar{a}), \ldots, t_n(\bar{a}) >$. Через $\mathfrak{A}^{[n]*}$ обозначим обеднение алгебры $\mathfrak{A}^{[n]}$ до части $\sigma^{[n]*}$ сигнатуры $\sigma^{[n]}$, состоящей из всех унарных символов последней. Тем самым, для любых последовательностей $t^1 =< t_1^1(\bar{x}), \ldots, t_n^1(\bar{x}) >$, $t^2 =< t_1^2(\bar{x}), \ldots, t_n^2(\bar{x}) >$ n-местных термов сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$ и любого $\bar{a} \in A^n$ имеем

$$\mathfrak{A}^{[n]*} \models m_{t^1}(\bar{a}) = m_{t^2}(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathop{\&}_{i=1}^{n} t_i^1(\bar{a}) = t_i^2(\bar{a})$$

и для $t^1 =< t'(\bar{x}), \ldots, t'(\bar{x}) >, t^2 =< t''(\bar{x}), \ldots, t''(\bar{x}) >$, где $t'(\bar{x}), t''(\bar{x})$ — n-местные термы сигнатуры σ, получаем

$$\mathfrak{A}^{[n]*} \models m_{t^1}(\bar{a}) \neq m_{t^2}(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models t'(\bar{a}) \neq t''(\bar{a}).$$

В силу чего для любых $B \subseteq A^n$ и $\bar{c} \in A^n$ включение $\bar{c} \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$ равносильно включению $\bar{c} \in \bar{B}_{\mathfrak{A}^{[n]*}}^{L_0}$.

В совокупности с утверждением 1 утверждение этой леммы влечет утверждение следующей теоремы

Теорема 1. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ и для любых $\bar{a} \in A^n$, $B \subseteq A^n$ включение $\bar{a} \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{\bar{a}} \leqslant_{Ihm(\mathfrak{A}^{[n]*0})^{A^n}} d_B$.*

Здесь d_B элемент множества $(A^n)^{A^n}$, такой что $d_B(\bar{b}) = \bar{b}$ для $\bar{b} \in B$ и $d_B(\bar{b}) = \bar{b}_0$ для $\bar{b} \in A^n \setminus B$, где $\bar{b}_0$ — наименьший элемент множества B относительно некоторого фиксированного вполне упорядочения $\leqslant$ множества A^n, а $\bar{\bar{a}} \in (A^n)^{A^n}$ удовлетворяет условию $\bar{\bar{a}}(\bar{b}) = \bar{a}$ для любого $\bar{b} \in A^n$.

В заключение остановимся еще на одном вопросе, связанном с затронутой здесь темой. Квазипорядок $\leqslant$ на множестве A называется (см. [10]) *Ihm-дозволенным (Ihm-запрещенным)*, если существует универсальная алгебра

$$\mathfrak{A} =< A; \sigma >,$$

такая что квазипорядок $\leqslant$ на A совпадает с квазипорядком $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ (если $\leqslant$ не совпадает с $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ на для какой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$). В работе [10] доказано существование Ihm-запрещенных квазипорядков на любом более чем трехэлементном множестве. В связи с утверждением леммы 1 и тем, что $\sim_{Iso\mathfrak{A}}$ является отношением эквивалентности порожденным квазипорядком $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ представляется естественным следующее определение: отношение эквивалентности $\sim$ на множестве A назовем *Iso-дозволенным*, если существует универсальная алгебра $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$, такая что $\sim$ совпадает с $\sim_{Iso\mathfrak{A}}$. В отличии от квазипорядков $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ имеет место

Предложение 2. *Любое отношение эквивалентности $\sim$ на произвольном множестве A является Iso-дозволенным.*

Доказательство. Пусть $\sim$ некоторое отношение эквивалентности на произвольном множестве A. Для любого $a \in A$ на A определим функцию $f_a(x)$ следующим образом. Если $|a/_{\sim}| = n$ для некоторого натурального $n > 1$, то $< a/_{\sim}; f_{a_1} >$ — n-цикл для некоторого фиксированного $a_1 \in a/_{\sim}$, а для всех иных $b \in A$ функция $f_b(x)$ тождественна на $a/_{\sim}$. Если $a/_{\sim}$ бесконечно, то пусть $\{a_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение $a/_{\sim}$ на счетные множества A_i, φ_i — некоторые биекции множеств A_i на множество Z целых чисел и a_1 — некоторый фиксированный элемент из $a/_{\sim}$. Тогда для любого $c \in A_i$ пусть $f_{a_1}(c) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(c) + 1)$ и $f_b(x)$ тождественна на $a/_{\sim}$ для всех иных $b \in A$. Наконец, если $|a/_{\sim}| = 1$ и $a/_{\sim}$ — единственный одноэлементный класс эквивалентности $\sim$, то $f_a(x)$ тождественна на A. Если же $C = \{c \in A | \, |a/_{\sim}| = 1\}$ не одноэлементно, то пусть ψ —

некоторая биекция C на C без неподвижных точек. Тогда положим $f_c(c) = \psi(c)$ для любого $c \in C$ и $f_c(b) = b$ для любого $b \in A \setminus \{c\}$. Пусть сигнатура σ состоит из одноместных функций $f_a(x)$ для $a \in A$. Непосредственно замечается, что $\sim$ совпадает с $\sim_{Iso\mathfrak{A}}$ для алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$, что и доказывает утверждение 2. $\square$

References

[1] Б. И. Плоткин, *Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре*, Алгебра и анализ, **9**:4 (1997), 224–248. MR1604318

[2] B. Plotkin, *Some results and problems related to universal algebraic geometry*, Int. J. Algebra Comput., **17**:5–6 (2007), 1133–1164. MR2355690

[3] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*, in: B.Fine (ed) et al., Aspects of infinite groups, Hackensack, NJ, World Sci, 2008, 80–111. MR2571513

[4] А. Г. Пинус, *Условные термы и их приложение в алгебре и теории вычислений*, Успехи математ. наук, **56**:4 (2001), 35–72. MR1861440

[5] А. Г. Пинус, *Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений* Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2002.

[6] А. Г. Пинус, *Новые алгебраические инварианты для формульных подмножеств универсальных алгебр*, Алгебра и логика, **50**:2 (2011), 209–230. MR2849307

[7] B. Plotkin, *Unityped algebras*, Proc. of the Steklov Institut of Math., **278**:1 (2012), 91–115. Zbl 06351794

[8] B. Plotkin, G. Zhitomirski, *Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras*, Алгебра и анализ, **19**:5 (2007),214–245. MR2381947

[9] А. Г. Пинус, *О квазипорядке индуцированном внутренними гомоморфизмами универсальных алгебр и об операторе алгебраического замыкания на множестве из этих алгбр*, Сибирский математический журнал, **56**:3 (2015).

[10] А. Г. Пинус, *О Ihm-дозволенных и Ihm-запрещенных квазипорядках*, Известия ВУЗов. Математика. (В печати).

Alexandr Georgievich Pinus
Novosibirsk State Technical University,
pr. K. Marxa, 20,
630073, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ag.pinus@gmail.com