S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 7–20 (2015) УДК 510.6

MSC 03B45

WIP-МИНИМАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Л.Л. МАКСИМОВА, В.Ф. ЮН

Abstract. The paper is devoted to the problem of interpolation in extensions of the Johansson minimal logic J.

It is proved in [7] that the weak interpolation property WIP is decidable over the minimal logic. In this case all logics with WIP are divided into eight pairwise disjoint intervals. Tops of these intervals, later called as etalon logics, possess a stronger Craig's interpolation property CIP [7]. An axiomatization and a semantic characterization for WIP-minimal logics, that are the least logics of intervals, are found in [8]. The property CIP for six of the eight WIP-minimal logics is stated in [8]. In this paper it will be proved that the property CIP holds for the remaining two logics. Thus all WIP-minimal logics possess the Craig interpolation property CIP.

Keywords: minimal logic, interpolation, WIP-minimal logic.

1. Введение

Статья посвящена проблеме интерполяции в расширениях минимальной логики Йохансона J [1].

Интерполяционная теорема Крейга [2] явилась источником большого числа исследований по проблеме интерполяции в различных теориях [3, 4].

Различные варианты интерполяционного свойства достаточно подробно изучены на классе суперинтуиционистских логик и некоторых других логик. Так,

---

Maksimova, L.L., Yun, V.F., WIP-minimal logics and interpolation.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-860.2014.1).

Поступила 24 октября 2014 г., опубликована 22 января 2015 г.

существует лишь конечное число суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга CIP, и это свойство разрешимо над интуиционистской логикой Int [5]. Однако неизвестно, разрешимо ли CIP над J и какова мощность множества J-логик с CIP.

В [6] введена семантика минимальной логики, и на ее основе предложен метод для доказательства CIP в J-логиках.

В [7] было доказано, что существует континуум J-логик со слабым интерполяционым свойством WIP, тем не менее, WIP разрешимо над минимальной логикой. При этом все логики с WIP разбиваются на восемь попарно не пересекающихся интервалов. Верхние концы этих интервалов, названные позднее эталонными логиками, обладают и более сильным интерполяционным свойством Крейга CIP [7]. В [8] найдены аксиоматизация и семантическая характеризация WIP-минимальных логик, т.е. нижних концов интервалов с WIP. Свойство CIP для шести из восьми WIP-минимальных логик установлено в [8]. В этой статье мы докажем CIP для двух оставшихся логик. Таким образом, все WIP-минимальные логики обладают свойством CIP.

2. Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&, \vee, \to, \bot, \top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода modus ponens: $A, A \to B \ / \ B$ (см., например, [9]).

Под J-*логикой* мы понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p),\ \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot,\ \mathrm{For} = \mathrm{J} + p.$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской логикой* (с.и.л.) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* – J-логика, содержащая логику Neg. Для любой J-логики L обозначаем через $E(L)$ семейство всех J-логик, содержащих L.

Пусть L – логика, T – множество формул, A – формула. Пишем $T \vdash_L A$, если A выводима из $L \cup T$ с помощью правила модус поненс.

Если $\mathbf{p}$ – список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ – множество всех таких формул.

Пусть списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются.

Интерполяционное свойство Крейга CIP [2] определяется следующим образом:

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

Слабое интерполяционное свойство WIP определяется следующим образом:

WIP. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$.

Описание J-логик с WIP найдено в [7], там же доказана разрешимость WIP над J. Все логики с WIP разбиваются на восемь интервалов. Верхние концы, названные позднее эталонными логиками, обладают CIP [10]. Аксиоматизация нижних концов, называемых WIP-минимальными логиками, указана в [8]:

Neg, Neg $\downarrow$= J,

Od = J + $\neg\neg(\perp \to p)$,

NC $\downarrow$= J + $\neg\neg(\perp \to (p \to q) \vee (q \to p))$,

NE $\downarrow$= J + $\neg\neg(\perp \to p \vee (p \to q))$,

L $\Downarrow$= L $\downarrow$ $+\neg\neg((\perp \to p \vee q) \to (\perp \to p) \vee (\perp \to q))$, где L $\in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$.

Там же установлено CIP для шести из восьми WIP-минимальных логик.

В этой статье мы докажем CIP для двух оставшихся WIP-минимальных логик NC $\downarrow$ и NC $\Downarrow$.

3. Семантика

В [11] была доказана теорема о полноте логики J и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. В статье [6] была предложена некоторая модификация этой семантики, удобная для наших целей.

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию:

$x \in X,\ x \leq y \Rightarrow y \in X$.

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W – непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q – конус множества W, содержащий ∞.

Моделью языка $\mathcal{L}$ называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ – шкала, $\models$ – отношение между элементами множества W и формулами языка $\mathcal{L}$, удовлетворяющее условиям:

(1) $x \models p$, $x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p языка $\mathcal{L}$;

(2) $\infty \models p$ для любой переменной p языка $\mathcal{L}$;

(3) $x \models \perp \iff x \in Q$;

(4) $x \models (A\&B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;

(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;

(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Лемма 3.1. *Для любой модели M языка $\mathcal{L}$:*

(1) $\infty \models A$ для любой формулы A языка $\mathcal{L}$;

(2) $x \models A$, $x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A языка $\mathcal{L}$.

Доказательство индукцией по длине формулы.

Модель (или шкала) называется *инициальной*, если имеет наименьший элемент. Если x есть элемент шкалы W, через W^x обозначаем шкалу $\{y|\ x \leq y\}$ с индуцированным порядком; через M^x обозначаем ограничение модели M на шкалу W^x.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой, в модели* M, если $x \models A$ для любого $x \in M$.

Пусть $L \in E(\mathrm{J})$. Модель M языка $\mathcal{L}$ называется L-*моделью*, если $x \models A$ для любого $x \in M$ и любой формулы A языка $\mathcal{L}$, выводимой в L.

Определим понятие канонической модели M_L языка $\mathcal{L}$. Множество T формул языка $\mathcal{L}$ называется L-*теорией языка* $\mathcal{L}$, если оно содержит $L \cap \mathcal{L}$ и замкнуто относительно правила модус поненс; L-теория T называется *простой*, если удовлетворяет условию: $(A \vee B) \in T \Rightarrow (A \in T$ или $B \in T)$ для любых формул A, B. В частности, множество $F(\mathcal{L})$ всех формул языка $\mathcal{L}$ является простой L-теорией языка $\mathcal{L}$.

В дальнейшем нам потребуется следующая простая

Лемма 3.2. *Пусть T – множество формул языка $\mathcal{L}$. Тогда T является L-теорией языка $\mathcal{L}$ в том и только в том случае, если T содержит $L \cap \mathcal{L}$, замкнуто относительно взятия конъюнкции формул и для всех формул A, B языка $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию:*
$A \vdash_L B \Rightarrow (A \in T \Rightarrow B \in T)$.

Каноническая модель M_L языка $\mathcal{L}$ строится следующим образом. Обозначим через W_L множество всех простых L-теорий языка $\mathcal{L}$, где $\leq_L$ – отношение теоретико-множественного включения, $Q_L = \{T \in W_L | \perp \in T\}$. Полагаем

$$M_L = (W_L, \leq_L, Q_L, \models_L),$$

где для любой $T \in W_L$ и любой переменной p:

$$T \models_L p \iff p \in T.$$

Отметим, что $F(\mathcal{L})$ является наибольшим элементом шкалы W_L.

Определение канонической модели было введено Сегербергом [11]. Оно отличается от нашего определения тем, что теория $F(\mathcal{L})$ не включалась в W_L. Следующие теоремы, доказанные Сегербергом [11], справедливы и для моделей, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 3.3. (О канонической модели.) *Для любой* J*-логики L и языка $\mathcal{L}$ каноническая модель M_L языка $\mathcal{L}$ является L-моделью. Более того, для любой теории T из M_L и любой формулы A языка $\mathcal{L}$:*

$$T \models A \iff A \in T.$$

Отсюда сразу вытекает

Теорема 3.4. (О полноте.) *Для любой формулы A языка $\mathcal{L}$ и любой* J*-логики L следующие условия эквивалентны:*

(1) *A выводима в L;*
(2) *A общезначима во всех L-моделях языка $\mathcal{L}$.*

Семантическая характеризация WIP-минимальних логик найдена в [8]. Приведем семантику для логик NC $\downarrow$ и NC $\Downarrow$. Следуя [8], обозначим
$L1 = \mathrm{Neg}\Downarrow = \mathrm{J} + \neg\neg((\perp \to p \vee q) \to (\perp \to p) \vee (\perp \to q))$;
$L3 = \mathrm{NC}\downarrow = \mathrm{J} + \neg\neg(\perp \to (p \to q) \vee (q \to p))$.

Говорим, что шкала или модель удовлетворяет *условию максимальности*, если для любого элемента $x \in W - Q$ существует максимальный в $W - Q$ элемент $y \geq x$.

Лемма 3.5. [8] *Для любой* J*-логики L ее канонические модели удовлетворяют условию максимальности.*

Определим условия на шкалы:
(F1) Для любого x, максимального в $W - Q$, существует $y \in Q$, который является наименьшим в $W^x \cap Q$.
(F3) Для любого x, максимального в $W - Q$, и любого $y \in Q$:
$(x \leq y \leq z$ и $y \leq v) \Rightarrow (z \leq v$ или $v \leq z)$.

Заметим, что

$\mathrm{NC}\Downarrow = \mathrm{NC}\downarrow + \neg\neg((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q)) = L1 + L3$.

В [8] найдена семантическая характеризация WIP-минимальных логик. В частности, доказано следующее:

Лемма 3.6. *Пусть шкала W удовлетворяет условию максимальности. Если W удовлетворяет условию (F1) или (F3), то в ней общезначимы все формулы из L1 или L3 соответственно.*

Предложение 3.7. *Если логика L содержит логику $L1$ или $L3$, то все ее канонические модели удовлетворяют соответствующему условию (F1) или (F3).*

Из предложения 3.7 и лемм 3.6 и 3.5 сразу вытекает

Теорема 3.8. *Логика* $\mathrm{NC}\downarrow$ *полна относительно класса моделей с условием максимальности, удовлетворяющих (F3).*

Логика $\mathrm{NC}\Downarrow$ *полна относительно класса моделей с условием максимальности, удовлетворяющих (F1) и (F3).*

4. Достаточные условия для CIP

Для доказательства CIP мы применим метод из [6].

В [6] была доказана теорема, дающая достаточное условие для CIP в J-логиках. Сначала приведем определения.

Даны шкалы $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_0$. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *p-морфизмом шкал*, если удовлетворяет условиям:

(p1) $x, y \in W_1, x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$;

(p2) $x \in W_1, y \in W_0, \theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$;

(p3) $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_0$.

Заметим, что из (p1) следует, что для любого p-морфизма θ из W_1 на W_0 выполнены условия: $\theta(\infty_1) = \infty_0$, и если W_1 – инициальная шкала с наименьшим элементом a, то $\theta(a)$ – наименьший элемент в W_0.

Даны модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_0 языка $\mathcal{L}_0$, содержащегося в языке $\mathcal{L}_1$. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *$\mathcal{L}_0$-морфизмом моделей*, если удовлетворяет условиям:

(m1) θ является p-морфизмом шкал;

(m2) для любого $x \in W_1$ и любой переменной p языка $\mathcal{L}_0$:

$$x \models_1 p \iff \theta(x) \models_0 p.$$

Индукцией по длине формулы доказывается

Лемма 4.1. *Пусть θ – $\mathcal{L}_0$-морфизм модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ на модель M_0 языка $\mathcal{L}_0$. Тогда для любого $x \in W_1$ и любой формулы A языка $\mathcal{L}_0$:*

$$x \models_1 A \iff \theta(x) \models_0 A.$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые естественные морфизмы канонических L-моделей. Справедлива следующая лемма

Лемма 4.2. (О канонических морфизмах.) *Пусть даны канонические L-модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_0 языка $\mathcal{L}_0$, содержащегося в языке $\mathcal{L}_1$. Тогда отображение*

$$\theta(T_1) = T_1 \cap \mathcal{L}_0,$$

где $T_1 \in M_1$, является $\mathcal{L}_0$-морфизмом из M_1 на M_0.

Отображение θ из леммы 4.2 называется *каноническим* $\mathcal{L}_0$-*морфизмом* из M_1 на M_0.

Класс моделей K называем *устойчивым*, если для любых инициальных моделей M_1 языка $\mathcal{L}_1$, M_2 языка $\mathcal{L}_2$ и M_0 языка $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ из K и любых $\mathcal{L}_0$-морфизмов $\theta_1 : M_1 \to M_0$, $\theta_2 : M_2 \to M_0$ существуют инициальная модель M языка $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, принадлежащая K, а также $\mathcal{L}_1$-морфизм φ из M на M_1 и $\mathcal{L}_2$-морфизм ψ из M на M_2 такие, что $\theta_1\varphi = \theta_2\psi$.

Такую модель вместе с морфизмами будем называть *амальгамой для* M_0, M_1, M_2.

Теорема 4.3. [6] *Пусть выбранный класс L-моделей содержит все инициальные конусы канонических L-моделей всех языков от различных конечных множеств переменных. Если этот класс является устойчивым, то L имеет CIP.*

Нам потребуется более сильное утверждение, где достаточно существования амальгамы для канонических моделей и морфизмов.

Теорема 4.4. *Пусть L – произвольная* J*-логика. Пусть для любых инициальных конусов M_1 канонической L-модели языка $\mathcal{L}_1$, M_2 канонической L-модели языка $\mathcal{L}_2$ и M_0 канонической L-модели языка $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ и любых канонических $\mathcal{L}_0$-морфизмов $\theta_1 : M_1 \to M_0$, $\theta_2 : M_2 \to M_0$ существуют инициальная L-модель M языка $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, а также $\mathcal{L}_1$-морфизм ϕ из M на M_1 и $\mathcal{L}_2$-морфизм ψ из M на M_2 такие, что $\theta_1\phi = \theta_2\psi$. Тогда L имеет CIP.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4.3. □

В следующих параграфах мы приведем конструкции, которые потребуются в доказательствах.

5. Операции над моделями

Для установления свойства CIP в интересующих нас логиках мы используем конструкции согласованного произведения из [6] и композиции моделей.

5.1. **Согласованные произведения.** В [6] было определено понятие согласованного произведения моделей. Пусть даны две модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_2 языка $\mathcal{L}_2$, имеющие общий $\mathcal{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, относительно $\mathcal{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно. Рассмотрим следующую модель

$$M = (W, \leq, Q, \models)$$

языка $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Положим

$$W = \{(a,b) |\ a \in W_1,\ b \in W_2,\ \theta_1(a) = \theta_2(b)\},$$

$$(a,b) \leq (a',b') \iff (a \leq_1 a' \text{ и } b \leq_2 b'),$$

$$Q = \{(a,b) \in W |\ a \in Q_1,\ b \in Q_2\},$$

$$(a,b) \models p \iff ((p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } a \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } b \models_2 p)).$$

Заметим, что $\theta_1(\infty_1) = \theta_2(\infty_2)$ ввиду монотонности p-морфизмов, поэтому пара $\infty = (\infty_1, \infty_2)$ принадлежит W и является наибольшим элементом в этом множестве. Кроме того, если M_1 и M_2 – инициальные модели, порожденные элементами a_1 и a_2 соответственно, то $\theta_1(a_1) = \theta_2(a_2)$ есть наименьший элемент модели M_0, пара (a_1, a_2) принадлежит W и является наименьшим элементом в модели M, а значит, M – инициальная модель.

Модель M называем *согласованным произведением* M_1 *и* M_2 *над* M_0.

По следующей лемме M с проекциями π_i является амальгамой для M_0, M_1, M_2.

Лемма 5.1. [6] *Если даны две модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_2 языка $\mathcal{L}_2$, имеющие общий $\mathcal{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, относительно $\mathcal{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно, и M – их согласованное произведение над M_0, то проекция π_1 является $\mathcal{L}_1$-морфизмом из M на M_1, а проекция π_2 – $\mathcal{L}_2$-морфизмом из M на M_2, причем $\theta_1\pi_1 = \theta_2\pi_2$.*

Заметим, что согласованное произведение инициальных моделей снова является инициальной моделью. Кроме того, в [8] доказано:

Лемма 5.2. *Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ – согласованное произведение моделей с условием максимальности. Тогда*

(1) *M также удовлетворяет условию максимальности;*
(2) *если $(x_1, x_2) \in W$, то элемент (x_1, x_2) является максимальным в $W - Q$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 являются максимальными в $W_1 - Q_1$ и $W_2 - Q_2$ соответственно.*

5.2. **Композиции шкал и моделей.** Для построения моделей, удовлетворяющих тем или иным условиям, определим понятие композиции шкал и моделей.

Пусть $W = (W, \leq, Q)$, $W_1 = (W_1, \leq_1, Q_1)$ – шкалы, θ – p-морфизм из W на W_1, B – некоторое множество элементов из W. Для всех $b \in B$ даны шкалы $Y_b = (Y_b, \leq_b, Q_b)$, где $Y_b \cap W = \{b, \infty\}$, $Y_b \cap Y_{b'} = \{\infty\}$ при $b \neq b'$, b – наименьший, а ∞ – наибольший элементы в Y_b относительно $\leq_b$, α_b – p-морфизм из Y_b на $W_1^{\theta(b)}$.

Ясно, что $\alpha_b(b) = \theta(b)$, $\alpha_b(\infty) = \infty_1$.

Следующую шкалу $W^* = (W^*, \leq^*, Q^*)$ будем называть *композицией над* W. Положим

$$W^* = W \cup \bigcup_{b \in B} Y_b = (W - B) \cup \bigcup_{b \in B} Y_b,$$

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{b \in B} Q_b, \infty^* = \infty.$$

Для $x, y \in W^*$:

$$x \leq^* y \iff [(x, y \in W, x \notin B, x \leq y) \text{ или } (\exists b \in B)(x, y \in Y_b \text{ и } x \leq_b y) \text{ или } (x \in (W - B) \text{ и } (\exists b \in B)(y \in Y_b \text{ и } x \leq b))].$$

Для $x \in W^*$ положим:

$$\beta(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in W, \\ \alpha_b(x), & \text{если } x \in Y_b \text{ для } b \in B. \end{cases}$$

Отметим, что для $b \in B$ выполняется $\theta(b) = \alpha_b(b)$, $\theta(\infty) = \alpha_b(\infty) = \infty_1$. Поэтому β определено корректно.

Отметим простые свойства введенного отношения.

Лемма 5.3. *Пусть $x <^* y$.*

(1) *Если $x \in Y_b$ для некоторого $b \in B$, то $y \in Y_b$ и $x \leq_b y$.*

(2) *Если* $y \in W - \{\infty\}$, *то* $x \in W - B - \{\infty\}$.

Доказательство. (1) Пусть $x <^* y$ и $x \in Y_b$. Из $Y_b \cap W = \{b, \infty\}$ следует, что $x \notin (W - B)$. Поэтому существует $b' \in B$, такой что $x, y \in Y_{b'}$ и $x \leq_{b'} y$. Получаем $x \in Y_b \cap Y_{b'}$, поэтому $b = b'$.

(2) Сразу из (1). □

Построенную в следующей лемме модель M^* будем называть *композицией над* M.

Лемма 5.4 (о композиции). (1) *Отношение* $\leq^*$ *является частичным порядком на* W^*, *причем* $x \leq^* \infty$ *для всех* $x \in W^*$.

(2) β *есть p-морфизм из* W^* *на* W_1.

(3) *Пусть* $M = (W, \leq, Q, \models)$ *и все* $M_b = (Y_b, \leq_b, Q_b, \models_b)$ – *модели языка* $\mathcal{L}$, $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$ – *модель языка* $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ *и все* α_b *и* θ *являются* $\mathcal{L}_1$*-морфизмами.*

Тогда β *является* $\mathcal{L}_1$*-морфизмом модели* $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$ *на* M_1, *где для* $x \in W^*$, $p \in \mathcal{L}_1$*:*

$$x \models^* p \iff ((x \in W \text{ и } x \models p) \text{ или } (\exists b \in B)(x \in Y_b \text{ и } x \models_b p)).$$

Доказательство. (1) Если $x \in Y_b$ для некоторого $b \in B$, то $x \leq_b x$ и $x \leq_b \infty$. Если $x \in W - B$, то $x \leq x$ и $x \leq \infty$. Таким образом, $\leq^*$ рефлексивно и $x \leq^* \infty$.

Антисимметричность легко проверяется.

Докажем транзитивность. Достаточно проверить случай

$x <^* y, y <^* z <^* \infty$.

Пусть $z \in W - \{\infty\}$. Тогда по лемме 5.3 $y \in W - B$, $x \in W - B$, $x < y < z$, поэтому $x < z$ и $x <^* z$.

Пусть $z \in (Y_b - \{\infty\})$ для некоторого $b \in B$.

Если $y \in W - B$, то $x \in W - B$. Кроме того, $y \leq b$, $x < y$. Тогда $x \leq b$ и $x \leq^* z$.

Рассмотрим случай $y \in Y_{b'}$ для некоторого $b' \in B$. Тогда по лемме 5.3 $b = b'$ и $b \leq_b y \leq_b z$. Если $x \in W - B$, то $x \leq b$ и $x \leq^* z$. Если $x \in \bigcup_{b'' \in B} Y_{b''}$, то $x \in Y_b$, $x \leq_b y \leq_b z$ и $x \leq^* z$.

(2) (p1) Пусть $x, y \in W^*$, $x \leq^* y$. Расмотрим возможные случаи.

Если $x, y \in Y_b$, $x \leq_b y$ для некоторого $b \in B$, то $\alpha_b(x) \leq_1 \alpha_b(y)$, т.е. верно $\beta(x) \leq_1 \beta(y)$.

Если $x, y \in W$, то $x \leq y$, $\theta(x) \leq_1 \theta(y)$, т.е. $\beta(x) \leq_1 \beta(y)$.

Если $x \in (W - B)$, $y \in Y_b$, $x \leq b$ для некоторого $b \in B$, то $b \leq_b y$. Поэтому

$$\beta(x) = \theta(x) \leq_1 \theta(b) = \alpha_b(b) \leq_1 \alpha_b(y) = \beta(y).$$

(p2) Пусть $x \in W^*$, $\beta(x) <_1 y$, $y \in W_1$. Найдем $z >^* x$, такой что $\beta(z) = y$.

Если $x \in Y_b$ для некоторого $b \in B$, то $\alpha_b(x) <_1 y$. Поэтому существует $z \in Y_b$ такой, что $x \leq_b z$ и $\alpha_b(z) = y$. Отсюда $x <^* z$ и $\beta(z) = y$.

Пусть $x \in (W - B)$. Тогда $\theta(x) <_1 y$, поэтому $y = \theta(z)$ для некоторого $z \in W$. Так как $x \notin B$, получаем $x <^* z$. Кроме того, $\beta(z) = y$.

(p3) Пусть $x \in W^*$. Если $x \in (W - B)$, то

$$x \in Q^* \iff x \in Q \iff \theta(x) \in Q_1 \iff \beta(x) \in Q_1.$$

Пусть $x \in (Y_b - \{\infty\})$ для некоторого $b \in B$. Тогда

$$x \in Q^* \iff x \in Q_b \iff \alpha_b(x) \in Q_1 \iff \beta(x) \in Q_1.$$

(3) Легко следует из (2). Пусть p – переменная языка $\mathcal{L}_1$, $x \in W^*$. Если $x \in B$, то

$$x \models p \iff \theta(x) \models_1 p \iff \alpha_x(x) \models_1 p \iff \beta(x) \models_1 (p).$$

Поэтому $x \models^* p \iff \beta(x) \models_1 p$. При $x \in W^* - B$ такое же соотношение очевидно. □

Лемма 5.5 (о линейности)**.** *Пусть W_0, W_1, W_2 – линейно упорядоченные шкалы, θ_i – p-морфизмы из W_i на W_0 ($i = 1, 2$), a и b – инициальные элементы шкал W_1 и W_2 соответственно, $\theta_1(a) = \theta_2(b)$, для любого $z \in W_0$ множества $\theta_1^{-1}(z)$ и $\theta_2^{-1}(z)$ имеют наименьший и наибольший элементы. Тогда существуют линейно упорядоченная инициальная шкала $W = (W, \leq, Q)$ и p-морфизмы α и β из W на W_1 и W_2 соответственно, такие что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$.*

Доказательство. Пусть $z \in W_0$. Обозначаем через a_{1z} наименьший элемент в множестве $\theta_1^{-1}(z)$, а через b_{2z} – наибольший элемент в множестве $\theta_2^{-1}(z)$.

Полагаем
$S_z = \{(a_{1z}, v)|\ v \in \theta_2^{-1}(z)\} \cup \{(u, b_{2z})|\ u \in \theta_1^{-1}(z)\}$,
$W = \bigcup\{S_z|\ z \in W_0\}$,
$Q = \bigcup\{S_z|\ z \in Q_0\}$,
$\infty = (\infty_1, \infty_2)$.
Для $(u, v), (u', v') \in W$:
$(u, v) \leq (u', v') \iff (u \leq_1 u'$ и $v \leq_2 v')$,

Заметим, что S_z непусто для любого z, так как содержит пару (a_{1z}, b_{2z}). Кроме того, $(a, b) \in W$.

Очевидно, $\leq$ – частичный порядок на W. Покажем, что $\leq$ – линейный порядок. Пусть $(u, v), (u', v') \in W$. Тогда $(u, v) \in S_z$, $(u', v') \in S_{z'}$, где $z = \theta_1(u) = \theta_2(v)$, $z' = \theta_1(u') = \theta_2(v')$. Имеем $z \leq_0 z'$ или $z' \leq_0 z$.

Пусть $z = z'$. Допустим, что $(u, v) \not\leq (u', v')$. Тогда $u \not\leq_1 u'$ или $v \not\leq_2 v'$. В первом случае $u' <_1 u$, $u \neq a_{1z}$, а значит, $v = b_{2z}$. Поэтому $(u', v') \leq (u, v)$. Во втором случае $v' <_2 v$, $v' \neq b_{2z}$, а значит, $u' = a_{1z}$. Поэтому $(u', v') \leq (u, v)$.

Пусть $z <_0 z'$. Поскольку множества W_1 и W_2 линейно упорядочены, получаем $u <_1 u'$ и $v <_2 v'$, т.е. $(u, v) \leq (u', v')$. Аналогично, если $z' <_0 z$, то $(u', v') \leq (u, v)$. Итак, $\leq$ – линейный порядок.

Для $(u, v) \in W$ положим

$$\alpha(u, v) = u,\ \beta(u, v) = v.$$

Покажем, что α – p-морфизм из W на W_1. Условие (p1) очевидно, докажем (p2).

Пусть $(u, v) \in W$, $u \leq_1 u'$. Тогда $z = \theta_1(u) = \theta_2(v) \leq_0 \theta_1(u') = z'$. Получаем $(u', b_{2z'}) \in S_{z'} \subseteq W$ и $(u, v) \leq (u', b_{2z'})$; $\alpha(u', b_{2z'}) = u'$.

Покажем, что β – p-морфизм из W на W_2. Достаточно проверить условие (p2).

Пусть $(u, v) \in W$, $v <_2 v'$. Тогда $z = \theta_1(u) = \theta_2(v) \leq_0 \theta_2(v') = z'$. Кроме того, $(a_{1z'}, v') \in S_{z'} \subseteq W$. Если $z <_0 z'$, то $(u, v) < (a_{1z'}, v')$.

Расмотрим случай $z' = z$. Имеем $v \neq b_{1z}$, поэтому $u = a_{1z}$. Кроме того, $(a_{1z}, v') \in S_z$, $(u, v) < (a_{1z}, v')$ и $\beta(a_{1z}, v') = v'$.

Ясно, что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$. □

6. CIP в NC $\Downarrow$

Для доказательства CIP для NC $\Downarrow$ покажем, что эта логика удовлетворяет условиям теоремы 4.4.

Лемма 6.1. *Пусть M, M_0 – инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathcal{L}, L_0$, где $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, и θ – канонический $\mathcal{L}_0$-морфизм из M на M_0. Пусть $x \in W$, W^x линейно упорядочено и $\theta(x) = x_0$. Тогда $W_0^{x_0}$ линейно упорядочено и для любого $z \geq_0 x_0$ множество $W^x \cap \theta^{-1}(z)$ имеет наименьший элемент a_z и наибольший элемент b_z.*

Доказательство. Линейная упорядоченность следует из (p1). Далее, вспомним, что $\theta(x) = x \cap \mathcal{L}_0$. Пересечение цепи простых теорий и объединение цепи простых теорий из $W^x \cap \theta^{-1}(z)$ снова являются простыми теориями и принадлежат тому же множеству. $\square$

Предложение 6.2. *Пусть L содержит формулы $\neg\neg(\bot \to (p \to q) \vee (q \to p))$ и $\neg\neg((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$. Пусть M_0, M_1, M_2 – инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, и θ_1, θ_2 – канонические $\mathcal{L}_0$-морфизмы из M_1, M_2 на M_0. Тогда существуют инициальная модель M^*, удовлетворяющая условиям (F1) и (F3) и условию максимальности, а также $\mathcal{L}_1$-морфизм α из M^* на M_1 и $\mathcal{L}_2$-морфизм β из M^* на M_2, такие что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, и M_0, M_1, M_2 – инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ соответственно. Пусть $M_i = (W_i, \leq_i, Q_i)$ для $i = 1, 2, 3$ и θ_1, θ_2 – канонические $\mathcal{L}_0$-морфизмы из M_1, M_2 на M_0.

По лемме 3.5 все канонические модели логики L, и следовательно, все W_i удовлетворяют условию максимальности, а по предложению 3.7 – условиям (F1) и (F3). Поэтому для любого максимального в $W_i - Q_i$ элемента x множество W_i^x линейно упорядочено.

Обозначим через $M = (W, \leq, \models)$ согласованное произведение моделей M_1 и M_2 над M_0.

По лемме 5.1 проекции π_i являются $\mathcal{L}_i$-морфизмами из M на M_i, причем $\theta_1\pi_1(x, y) = \theta_2\pi_2(x, y)$ для любой пары $(x, y) \in W$.

Пусть a, b – максимальные элементы в $W_1 - Q_1$ и $W_2 - Q_2$ соответственно и $\theta_1(a) = \theta_2(b)$. По лемме 6.1 для любого $z \geq_0 \theta_1(a)$ множества $W_1^a \cap \theta_1^{-1}(z)$ и $W_2^b \cap \theta_2^{-1}(z)$ имеют наименьшие и наибольшие элементы.

Тогда по лемме 5.5 существуют линейно упорядоченная инициальная шкала $Y_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab})$ и p-морфизмы α_{ab} и β_{ab} из Y_{ab} на W_1^a и W_2^b, такие что $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$. Из доказательства леммы 5.5 вытекает, что (a, b) – наименьший элемент в Y_{ab}, $Q_{ab} = Y_{ab} - \{(a, b)\}$ и Q_{ab} имеет наименьший элемент. Заменяя в случае необходимости множества их изоморфными копиями, можно считать, что $Y_{ab} \cap W = \{(a, b), \infty\}$ и $Y_{ab} \cap Y_{dc} = \{\infty\}$ при $(a, b) \neq (d, c)$.

Определим модель $M_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab}, \models_{ab})$, полагая для $x \in Y_{ab}$ и переменной $p \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$:

$$x \models_{ab} p \iff [(p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } \alpha_{ab}(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } \beta_{ab}(x) \models_2 p)].$$

Учитывая условие $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$, нетрудно проверить, что тогда α_{ab} является $\mathcal{L}_1$-морфизмом из M_{ab} на M_1, а β_{ab} –$\mathcal{L}_2$-морфизмом из M_{ab} на M_2.

Построим композицию над W, где B – множество максимальных элементов в множестве $W-Q$. По лемме 5.2 множество B состоит из всех пар (a,b), таких что a – максимальный в W_1-Q_1, b – максимальный в W_2-Q_2 и $\theta_1(a)=\theta_2(b)$. Таким образом,

$$W^* = W \cup \bigcup_{(a,b)\in B} Y_{ab},$$

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{(a,b)\in B} Q_{ab}, \infty^* = \infty.$$

Для $x,y\in W^*$:

$$x \le^* y \iff [(x,y\in W, x\notin B, x\le y) \text{ или } (\exists (a,b)\in B)(x,y\in Y_{ab} \text{ и } x\le_{ab} y) \text{ или }$$

$$(x\in (W-B) \text{ и } (\exists (a,b)\in B)(y\in Y_{ab} \text{ и } x\le (a,b))].$$

По лемме 5.4 W^* частично упорядочено отношением $\le^*$. Для $x\in W^*$ положим:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \pi_1(x), & \text{если } x\in W, \\ \alpha_{ab}(x), & \text{если } x\in Y_{ab} \text{ для } (a,b)\in B, \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \pi_2(x), & \text{если } x\in W, \\ \beta_{ab}(x), & \text{если } x\in Y_{ab} \text{ для } (a,b)\in B. \end{cases}$$

Определим $M^*=(W^*,\le^*,Q^*,\models^*)$, где для $x\in W^*$ и переменной $p\in\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$:

$$x\models^* p \iff [(p\in\mathcal{L}_1 \text{ и } \alpha(x)\models_1 p) \text{ или } (p\in\mathcal{L}_2 \text{ и } \beta(x)\models_2 p)].$$

Тогда по лемме 5.4 α является $\mathcal{L}_1$-морфизмом из M^* на M_1, а β – $\mathcal{L}_2$-морфизмом из M^* на M_2. Очевидно, $\theta_1\alpha=\theta_2\beta$.

Покажем, что M^* удовлетворяет условию максимальности, а также условиям (F1) и (F3).

Заметим, что множество максимальных элементов в W^*-Q^* относительно $\le^*$ совпадает с B. В самом деле, пусть $x\in B$, тогда $x=(a,b)$ для некоторого a, максимального в W_1-Q_1, и некоторого b, максимального в W_2-Q_2, причем $\theta_1(a)=\theta_2(b)$. Пусть $x\le^* y$ для некоторого $y\in W^*-Q^*$. Тогда $y\in W_{ab}$ и $x\le_{ab} y$. Так как $y\notin Q^*$, получаем $x=y$, т.е. x – максимальный в W^*-Q^*. Если x не является максимальным в $W-Q$, то $x<y$ для некоторого $y\in W-Q$. Тогда $y\in W^*-Q^*$ и $x<^* y$, т.е. x не является максимальным в W^*-Q^*.

Пусть $x\in W^*-Q^*$. Тогда $x\in W-Q$ и по лемме 5.2 существует максимальный в $W-Q$ элемент $y\ge x$. Тогда y является максимальным в W^*-Q^* и $x\le^* y$.

Если $(a,b)\in B$, то $\{x|\ x\in Q^* \text{ и } (a,b)\le^* x\}=Q_{ab}$. Это множество имеет наименьший элемент относительно порядка $\le_{ab}$, а значит, и относительно $\le^*$. Кроме того, оно линейно упорядочено отношением $\le^*$. Таким образом, выполнены условия (F1) и (F3).

Заметим, что если a_0 – инициальный элемент в W_1, b_0 – инициальный в W_2 и $(a_0,b_0)\notin B$, то (a_0,b_0) является инициальным элементом в шкале W^*.

В случае, если $(a_0,b_0)\in B$, то в качестве M^* надо брать $M_{a_0b_0}$. Нетрудно доказать, что и в этом случае M^* удовлетворяет условию максимальности и условиям (F1), (F3). □

Теорема 6.3. *Логика* NC$\Downarrow$ *имеет CIP.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.8 логика $\mathrm{NC}\Downarrow$ полна относительно класса моделей с условием максимальности, удовлетворяющих (F1) и (F3). Из предложения 6.2 следует, что логика $\mathrm{NC}\Downarrow$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4, поэтому она имеет CIP. $\square$

7. CIP в $\mathrm{NC}\downarrow$

Как и в предыдущем параграфе, покажем, что $\mathrm{NC}\downarrow$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4.

Предложение 7.1. *Пусть логика L содержит формулу*

$$\neg\neg(\bot \to (p \to q) \vee (q \to p)).$$

Пусть M_0, M_1, M_2 – инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, и θ_1, θ_2 – канонические $\mathcal{L}_0$-морфизмы из M_1, M_2 на M_0. Тогда существуют инициальная модель M^*, удовлетворяющая условиям максимальности и (F3), а также $\mathcal{L}_1$-морфизм α из M^* на M_1 и $\mathcal{L}_2$-морфизм β из M^* на M_2, такие что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, и M_0, M_1, M_2 – инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ соответственно. Пусть $M_i = (W_i, \leq_i, Q_i)$ для $i = 1, 2, 3$ и θ_1, θ_2 – канонические $\mathcal{L}_0$-морфизмы из M_1, M_2 на M_0.

По лемме 3.5 все канонические модели логики L, и следовательно, все W_i удовлетворяют условию максимальности, а по предложению 3.7 – условию (F3).

Обозначим через $M = (W, \leq, \models)$ согласованное произведение моделей M_1 и M_2 над M_0.

По лемме 5.1 проекции π_i являются $\mathcal{L}_i$-морфизмами из M на M_i, причем $\theta_1\pi_1(x, y) = \theta_2\pi_2(x, y)$ для любой пары $(x, y) \in W$. По лемме 5.2 M удовлетворяет условию максимальности.

Построим композицию M^* над M. Обозначим через X множество всех максимальных элементов в $W - Q$ и положим

$$B = \{y \in W |\ (\exists x \in X)(x < y)\}.$$

По лемме 5.2 множество X состоит из всех пар $(c, d) \in W$, таких что c – максимальный элемент в $W_1 - Q_1$, а d – максимальный в $W_2 - Q_2$. Далее, $y \in B$, если и только если существуют $a \in W_1$, $b \in W_2$, такие что $\theta_1(a) = \theta_2(b)$, $y = (a, b)$ и $(c, d) < (a, b)$ для подходящей пары $(c, d) \in X$. Учитывая максимальность пары (c, d) в $W - Q$, получаем $(a, b) \in Q$, а значит, $a \in Q_1$, $b \in Q_2$, $c <_1 a$, $d <_2 b$. Таким образом,

$$B = \{(a, b) \in Q |\ (\exists (c, d) \in X)(c <_1 a \text{ и } d <_2 b)\}.$$

Пусть c, d – максимальные элементы в $W_1 - Q_1$ и $W_2 - Q_2$ соответственно, $\theta_1(c) = \theta_2(d)$, $c <_1 a$, $d <_2 b$ и $\theta_1(a) = \theta_2(b)$. Так как M_1 и M_2 удовлетворяют условию (F3), множества W_1^a и W_2^b линейно упорядочены. По лемме 6.1 для любого $z \geq_0 \theta_1(a)$ множества $W_1^a \cap \theta_1^{-1}(z)$ и $W_2^b \cap \theta_2^{-1}(z)$ имеют наименьшие и наибольшие элементы. Тогда по лемме 5.5 существуют линейно упорядоченная инициальная шкала $Y_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab})$ и p-морфизмы α_{ab} и β_{ab} из Y_{ab} на W_1^a и W_2^b, такие что $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$. Из доказательства леммы 5.5 вытекает, что (a, b) – наименьший элемент в Y_{ab}, $Q_{ab} = Y_{ab}$. Заменяя в случае необходимости множества их изоморфными копиями, можно считать, что $Y_{ab} \cap W = \{(a,b), \infty\}$ и $Y_{ab} \cap Y_{a'b'} = \{\infty\}$ при $(a,b) \neq (a'b')$.

Определим модель $M_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab}, \models_{ab})$, полагая для $x \in Y_{ab}$ и переменной $p \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$:

$$x \models_{ab} p \iff [(p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } \alpha_{ab}(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } \beta_{ab}(x) \models_2 p)].$$

Учитывая условие $\theta_1 \alpha_{ab} = \theta_2 \beta_{ab}$, нетрудно проверить, что тогда α_{ab} является $\mathcal{L}_1$-морфизмом из M_{ab} на M_1, а β_{ab} –$\mathcal{L}_2$-морфизмом из M_{ab} на M_2.

Строим композицию W^* над W. Получаем

$$W^* = W \cup \bigcup_{(a,b) \in B} Y_{ab},$$

$$Q^* = Q \cup \bigcup_{(a,b) \in B} Q_{ab}, \infty^* = \infty.$$

Для $x, y \in W^*$:

$$x \leq^* y \iff [(x, y \in W, x \notin B, x \leq y) \text{ или } (\exists (a,b) \in B)(x, y \in Y_{ab} \text{ и } x \leq_{ab} y) \text{ или } (x \in (W - B) \text{ и } (\exists (a,b) \in B)(y \in Y_{ab} \text{ и } x \leq (a,b))].$$

По лемме 5.4 W^* частично упорядочено отношением $\leq^*$. Для $x \in W^*$ положим:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \pi_1(x), & \text{если } x \in W, \\ \alpha_{ab}(x), & \text{если } x \in Y_{ab} \text{ для } (a,b) \in B, \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \pi_2(x), & \text{если } x \in W, \\ \beta_{ab}(x), & \text{если } x \in Y_{ab} \text{ для } (a,b) \in B. \end{cases}$$

Определим $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$, где для $x \in W^*$ и переменной $p \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$:

$$x \models^* p \iff [(p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } \alpha(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } \beta(x) \models_2 p)].$$

Тогда по лемме 5.4 α является $\mathcal{L}_1$-морфизмом из M^* на M_1, а β – $\mathcal{L}_2$-морфизмом из M^* на M_2. Очевидно, $\theta_1 \alpha = \theta_2 \beta$.

Поскольку $W^* - Q^* = W - Q$ и отношение $\leq^*$ совпадает на этом подмножестве с $\leq$, получаем, что модель M^* удовлетворяет условию максимальности и множество максимальных элементов в $W^* - Q^*$ совпадает с X. Покажем, что M^* удовлетворяет условию (F3).

Пусть $x = (c,d)$ – максимальный элемент в $W^* - Q^*$ и $x <^* y <^* \infty$. Тогда $y \in Q^*$. Если $y \in Q$, то $x < y$ и $y = (a,b)$ для некоторых $a >_1 c$, $b >_2 d$, а значит, $y \in B$ и $y \in Y_{ab}$. Если $y \notin Q$, то $y \in Y_{ab}$ для некоторых $a >_1 c$, $b >_2 d$.

Допустим $y <^* z$ и $y <^* t$. По лемме 5.3 заключаем, что $z, t \in Y_{ab}$. Поскольку Y_{ab} линейно упорядочено, элементы z и t сравнимы по $\leq_{ab}$, а значит, и по $\leq^*$. Условие (F3) доказано.

Если a_0 – инициальный элемент в W_1, b_0 – инициальный в W_2, то $(a_0, b_0) \notin B$, поэтому (a_0, b_0) является инициальным элементом в W^*.

□

Теорема 7.2. *Логика* NC ↓ *имеет CIP.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.8 логика NC ↓ полна относительно класса моделей с условием максимальности, удовлетворяющих (F3). Из предложения 7.1 следует, что логика NC ↓ удовлетворяет условиям теоремы 4.4, поэтому она имеет CIP. □

Список литературы

[1] I. Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Mathematica, **4** (1937), 119–136. MR1556966

[2] W. Craig, *Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory*, J. Symbolic Logic, **22** (1957), 269–285. MR0104565

[3] *Model-theoretic logic*. J. Barwaise, S. Feferman, eds. New York: Springer-Verl., 1985. MR0819531

[4] D.M. Gabbay, L. Maksimova, *Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics*, Clarendon Press, Oxford, 2005. MR2153890

[5] Л.Л. Максимова, *Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия*, Алгебра и логика, **16**:6 (1977), 643–681. MR0516426

[6] Л.Л. Максимова, *Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики*, Алгебра и логика, **46**:5 (2007), 627–648. MR2378634

[7] Л.Л. Максимова, *Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой*, Алгебра и логика, **50**:2 (2011), 152–188. MR2849305

[8] Л.Л. Максимова, *Негативная эквивалентность над минимальной логикой и интерполяция*, Сиб. электрон. матем. изв., **11** (2014), 1–17.

[9] S.Odintsov, *Constructive negations and paraconsistency. Series: Trends in Logic*, Volume 26. Springer, Dordrecht, 2008, 242 pp. MR2680932

[10] L. Maksimova, *Interpolation and Definability over the logic GL*, Studia Logica, **99**:1–3 (2011), 249–267. MR2836442

[11] K.Segerberg, *Propositional Logics related to Heyting's and Johansson's. Theoria*, **34** (1968), 26–61. MR0241275

Лариса Львовна Максимова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: lmaksi@math.nsc.ru

Вета Федоровна Юн
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: veta_v@mail.ru