S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 723–731 (2015) УДК 512.532.2
DOI 10.17377/semi.2015.12.058 MSC 20M07

ДИСТРИБУТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП

Д.В. СКОКОВ

Abstract. We completely classify all distributive and standard elements of the lattice of epigroup varieties

Keywords: epigroup, variety, distributive element, standard element.

1. Введение

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т. е. принадлежит некоторой подгруппе в S. Обширную информацию об эпигруппах можно найти, например, в работах [4, 10]. Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя, в частности, все *периодические* полугруппы (которые можно определить как полугруппы, в которых некоторая степень каждого элемента лежит в некоторой конечной циклической подгруппе) и все *вполне регулярные* полугруппы (т. е. полугруппы, в которых каждый элемент является групповым).

Эпигруппы естественно рассматривать как *унарные полугруппы*, т. е. полугруппы с дополнительной унарной операцией, которая вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы, для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно (см., например, [4, 10]), что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$. Обозначим через $\overline{x}$

Skokov, D.V., Distributive elements of the lattice of epigroup varieties.

Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект №2248 Министерства образования и науки РФ), поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и РФФИ (грант 14-01-00524).

Поступила 10 октября 2015 г., опубликована 27 октября 2015 г.

элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Отображение $x \longmapsto \overline{x}$ и есть упомянутая выше унарная операция на эпигруппе S. Элемент $\overline{x}$ называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр в указанной сигнатуре. Хорошо известно, что во всякой периодической эпигруппе операция псевдообращения может быть выражена через умножение (см., например, [4, 10]). Таким образом, периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп.

За последние годы появилось большое число работ, посвященных изучению специальных элементов различных типов в решетке всех многообразий полугрупп и некоторых ее подрешетках. В целом ряде случаев получено полное описание таких многообразий. Обзору полученных в этом направлении результатов посвящена недавняя статья [13]. В частности, отметим, что в работе [1] полностью описаны дистрибутивные элементы решетки всех полугрупповых многообразий. Кроме того, из результатов этой работы легко вытекает, что в указанной решетке свойства быть дистрибутивным и стандартным элементом эквивалентны (см. комментарий к теореме 3.3 в [13]).

В самое последнее время некоторые из результатов о специальных элементах решетки полугрупповых многообразий удалось перенести на эпигрупповой случай. Этому посвящены работы [11, 9]. Напомним, что элемент x решетки L называется

дистрибутивным, если $\forall y, z \in L\colon \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$

стандартным, если $\forall y, z \in L\colon \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$

нейтральным, если $\forall y, z \in L\colon \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$

модулярным, если $\forall y, z \in L\colon \quad y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$

нижнемодулярным, если $\forall y, z \in L\colon \quad x \le y \longrightarrow x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y.$

Кодистрибутивные, *костандартные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно. Для краткости, мы будем называть многообразие эпигрупп *дистрибутивным*, если оно является дистрибутивным элементом решетки многообразий эпигрупп. Аналогичную договоренность будем применять и для всех остальных введенных только что типов элементов. В [9] полностью описаны нейтральные многообразия эпигрупп и найдена существеная информация о модулярных и верхнемодулярных многообразиях. В [11] полностью описаны нижнемодулярные и костандартные многообразия и найдена существеная информация о кодистрибутивных многообразиях. Данная статья продолжает работы [11, 9]. В ней полностью описаны дистрибутивные и стандартные многообразия эпигрупп.

Будем обозначать решетку всех многообразий эпигрупп через **EPI**. Через $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$ будем обозначать тривиальное многообразие и многообразие полурешеток соответственно. Как обычно, мы записываем пару тождеств вида $wx = xw = w$, где w — слово, а x — буква, не входящая в запись w, в виде символического тождества $w = 0$. Это обозначение естественно: ясно, что полугруппа удовлетворяет тождеству $w = 0$ тогда и только тогда, когда она содержит нуль и любое значение слова w в этой полугруппе равно нулю. Тождества вида $w = 0$ и многообразия, ими заданные, называются 0-*приведенными*. Очевидно, что всякое 0-приведенное является нильмногообразием. В частности, оно периодично и потому может рассматриваться как многообразие полугрупп. Положим $\mathcal{Q} = \mathrm{var}\,\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$, $\mathcal{Q}_n = \mathrm{var}\,\{x^2y = xyx = yx^2 = x_1x_2\cdots x_n = 0\}$, $\mathcal{R} = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyx = 0\}$ и $\mathcal{R}_n = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyx = x_1x_2\cdots x_n = 0\}$, где n — произвольное натуральное число. Заметим, что $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{R}_1 = \mathcal{T}$.

Основным результатом работы является

Теорема 1.1. *Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ — дистрибутивный элемент решетки* **EPI***;*
б) *$\mathcal{V}$ — стандартный элемент решетки* **EPI***;*
в) *$\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$.*

Из теоремы 1.1 и результатов работы [1] вытекает следующее утверждение, в котором через **SEM** обозначена решетка всех многообразий полугрупп.

Следствие 1.2. *Для периодического многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ — дистрибутивный элемент решетки* **EPI***;*
б) *$\mathcal{V}$ — стандартный элемент решетки* **EPI***;*
в) *$\mathcal{V}$ — дистрибутивный элемент решетки* **SEM***;*
г) *$\mathcal{V}$ — стандартный элемент решетки* **SEM**. □

Работа состоит из пяти параграфов. В § 2 собраны необходимые для дальнейшего вспомогательные результаты, в § 3 доказывается импликация а) $\longrightarrow$ в) теоремы 1.1, в § 4 — импликация в) $\longrightarrow$ а), а в § 5 — эквивалентность условий а) и б).

2. Предварительные сведения

Пусть Σ — система тождеств, записанных в сигнатуре Ω, состоящей из ассоциативной бинарной операции умножения и унарной операции. Обозначим через K_Σ класс всех эпигрупп, удовлетворяющих Σ (мы предполагаем при этом, что сигнатурная унарная операция интерпретируется как псевдообращение). Класс K_Σ может не быть многообразием, поскольку он не обязан быть замкнут относительно бесконечных прямых произведений (см., например, [10, раздел 2.3]). Чтобы охарактеризовать системы тождеств Σ, для которых класс K_Σ является многообразием, нам понадобятся некоторые определения. Слово w, записанное в сигнатуре Ω, называется *полугрупповым*, если оно не содержит унарной операции. Тождество $u = v$ сигнатуры Ω, называется *полугрупповым*, если слова u и v являются полугрупповыми, и *смешанным*, если одно из этих слов — полугрупповое, а другое — нет. Полугрупповое тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в обе его части одинаковое число раз.

Лемма 2.1 ([7, предложение 2.15]). *Класс K_Σ является многообразием эпигрупп тогда и только тогда, когда Σ содержит либо полугрупповое неуравновешенное тождество, либо смешанное тождество.* $\square$

Если класс K_Σ является многообразием, то мы будем обозначать это многообразие через $\mathrm{var}\,\Sigma$. Всюду ниже в тех случаях, когда будет использоваться это обозначение, его корректность вытекает из леммы 2.1. Явные ссылки на это обстоятельство мы будем делать не всегда.

Напомним, что полугрупповое слово w называется *линейным*, если всякая буква входит в его запись не более одного раза. Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 2.2. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому полугрупповому тождеству $u = v$ такому, что слово u линейно, а слово v не линейно, то многообразие $\mathcal{V}$ является периодическим.* $\square$

Лемма 2.3. *Всякая нильполугруппа удовлетворяет тождеству $\overline{x} = 0$.* $\square$

Всюду далее через F обозначается свободная унарная полугруппа счетного ранга над алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$. Если $w \in F$, то через $c(w)$ обозначается множество всех букв, входящих в запись слова w. Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется.

Лемма 2.4. *Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$.* $\square$

Пусть I — решеточное тождество вида $s = t$, где s и t — решеточные термы от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если

$$\forall x_1, \dots, x_n \in L\colon \quad s(x, x_1, \dots, x_n) = t(x, x_1, \dots, x_n).$$

Лемма 2.5 ([3, следствие 2.1]). *Пусть I — решеточное тождество, выполненное в 2-элементной решетке, L — решетка с 0, а a — атом и нейтральный элемент решетки L. Элемент $x \in L$ является I-элементом решетки L тогда и только тогда, когда этим свойством обладает элемент $x \vee a$.* $\square$

Лемма 2.6 ([1, лемма 2.2]). *Пусть x, y и z — элементы решетки L с 0, а a — атом и нейтральный элемент этой решетки. Если*

$$x \vee (y \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$y' = y \vee a$ и $z' = z \vee a$, то $x \vee (y' \wedge z') \neq (x \vee y') \wedge (x \vee z')$. $\square$

Первое из двух свойств многообразия $\mathcal{SL}$, указанных в следующей лемме, общеизвестно, а второе доказано в [9, предложение 3.1].

Лемма 2.7. *Многообразие $\mathcal{SL}$ является атомом и нейтральным элементом решетки* **EPI**. $\square$

3. Дистрибутивные элементы: необходимость

В этом параграфе доказывается импликация а) $\longrightarrow$ в) теоремы 1.1.

Через F_m будет обозначаться свободная унарная полугруппа над алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Если $\sigma \in S_m$, где S_m — группа перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$, а $u \in F_m$, то через $\sigma(u)$ будем обозначать образ слова u

при автоморфизме унарной полугруппы F_m, индуцированном действием перестановки σ на индексах переменных. Символом $\equiv$ мы обозначаем отношение равенства на унарной полугруппе F. В доказательстве необходимости в теореме 1.1 нам понадобится следующее утверждение, справедливость которого немедленно вытекает из доказательства леммы 5.1 работы [1].

Лемма 3.1. *Пусть u и v — полугрупповые слова из F_m такие, что тождество $u = v$ неуравновешенно и ни одно из слов u и v не содержит образ другого относительно некоторого эндоморфизма абсолютно свободной полугруппы а σ — произвольная перестановка из S_m. Если многообразие $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{u = v\}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $\sigma(u) = w$, где w — полугрупповое слово, то $w \equiv \sigma(v)$.* □

Отметим, что если тождество $u = v$ уравновешенно, то класс всех эпигрупп, удовлетворяющих этому тождеству, не является многообразием эпигрупп (см. лемму 2.1). Именно этим объясняется требование о неуравновешенности тождества $u = v$ в формулировке леммы 3.1.

Если w — полугрупповое слово, то через $\ell(w)$ обозначается длина этого слова. Следующее утверждение является «эпигрупповым аналогом» леммы 5.2 работы [1].

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, являющееся дистрибутивным элементом решетки* **EPI**, *а u, v — полугрупповые слова такие, что $c(u) = c(v)$ и выполнено одно из следующих условий:*

(i) *слово u не содержит образа слова v, а слово v не содержит образа слова u;*

(ii) $\ell(u) = \ell(v)$.

Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, то оно удовлетворяет и тождеству $v = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $u, v \in F_m$ для некоторого натурального m. Предположим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.

(i) Если $m = 1$, то $u \equiv x^q$ и $v \equiv x^r$ для некоторых q и r. Но тогда одно из слов u и v содержит образ другого, что противоречит условию. Следовательно, $m > 1$, и потому группа S_m содержит нетривиальную перестановку α. Положим $w \equiv \alpha(u)$. Тогда в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $w = 0$, а значит и тождество $u = w$. Если тождество $u = v$ неуравновешенно, то доказательство можно завершить дословным повторением соответствующей части доказательства п. (i) леммы 5.2 работы [1]. Поэтому далее можно считать, что тождество $u = v$ уравновешенно. Пусть x — буква, не входящая в слово u. Тогда тождества $xu = v$ и $v = xw$ не уравновешенны. В силу леммы 2.1, мы можем рассмотреть многообразия $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{xu = v\}$ и $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\{v = xw\}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно, выполнено равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}).$$

Очевидно, что многообразие $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$ удовлетворяет тождеству $xu = xw$. Следовательно, ему удовлетворяет и многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Это означает, что существует вывод тождества $xu = xw$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, одно из этих многообразий должно удовлетворять нетривиальному тождеству вида $xu = w_1$.

Предположим, что это тождество выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. В частности, оно выполнено в $\mathcal{Y}$. Применяя лемму 3.1 в случае, когда σ — тривиальная перестановка из S_m, мы получаем, что $w_1 \equiv v$. Поскольку $xu = w_1$ в $\mathcal{V}$, это означает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $v = xu$, а вместе с ним и тождество $v = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда тождество $xu = w_1$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, оно выполнено в $\mathcal{Z}$. Пусть σ — перестановка, действующая на множестве $c(u)$ как перестановка α^{-1} и оставляющая на месте букву $x \notin c(u)$. Применим лемму 3.1 для перестановки σ. В результате мы получаем, что $w_1 \equiv \sigma(v)$. Но тождество $xu = w_1$ выполнено в $\mathcal{V}$. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xu = \sigma(v)$, а вместе с ним и тождествам $\sigma(v) = 0$ и $v = 0$.

(ii) В этом случае доказательство проводится точно так же, как при рассмотрении п. (ii) в [1, лемма 5.2]. □

Завершим доказательство импликации а) $\longrightarrow$ в) теоремы 1.1. Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное многообразие эпигрупп. Очевидно, что всякий дистрибутивный элемент нижнемодулярен. Нижнемодулярные элементы решетки **EPI** полностью описаны в [11, теорема 1]. Из этого результата вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие. Леммы 2.5 и 2.7 показывают, что многообразие $\mathcal{N}$ дистрибутивно. В силу своей 0-приведенности, это многообразие удовлетворяет тождеству $u = 0$ для некоторого слова u. Можно считать, что это тождество не выполнено в классе всех нильмногообразий. В силу леммы 2.3, это означает, что слово u — полугрупповое. Можно считать, что $c(u) = \{x, y\}$. В самом деле, если u зависит от одной буквы, то можно подставить вместо этой буквы слово xy, если u зависит от двух или более букв — приравнять одну из них к x, а все остальные — к y. Дословно повторяя соответствующую часть рассуждений из доказательства предложения 3.2 работы [1], но ссылаясь при этом на леммы 3.1 и 3.2 настоящей работы вместо лемм 5.1 и 5.2 работы [1] соответственно, можно показать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = c(u)$ и $\ell(v) \geq 3$. В частности, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0. \tag{1}$$

Таким образом, $\mathcal{N}$ — 0-приведенное подмногообразие многообразия $\mathcal{Q}$. Если $\mathcal{N} = \mathcal{Q}$, то доказывать нечего. Пусть теперь $\mathcal{N} \subset \mathcal{Q}$. Тогда $\mathcal{N}$ задается внутри $\mathcal{Q}$ некоторым набором 0-приведенных тождеств. В силу леммы 2.3, всякое не полугрупповое слово равно нулю в $\mathcal{Q}$. Очевидно, что всякое полугрупповое нелинейное слово, отличное от x^2, также равно нулю в $\mathcal{Q}$. Следовательно, $\mathcal{N}$ задается внутри $\mathcal{Q}$ либо тождеством $x^2 = 0$, либо тождеством $x_1x_2 \cdots x_n = 0$ для некоторого n, либо совокупностью этих двух тождеств. Таким образом, $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$. Импликация а) $\longrightarrow$ в) теоремы 1.1 доказана.

4. Дистрибутивные элементы: достаточность

В этом параграфе доказывается импликация в) $\longrightarrow$ а) теоремы 1.1. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$. Требуется доказать, что многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно. Леммы 2.5 и 2.7 показывают, что достаточно убедиться в дистрибутивности многообразия $\mathcal{N}$. Иными словами, далее можно считать, что $\mathcal{V}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$. Таким образом, $\mathcal{V}$ — 0-приведенное многообразие, удовлетворяющее тождествам (1). В частности, многообразие $\mathcal{V}$ периодично и потому может рассматриваться как многообразие полугрупп.

Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия эпигрупп. Требуется доказать, что $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Достаточно доказать, что

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}),$$

поскольку противоположное включение очевидно. Иными словами, требуется проверить, что произвольное тождество, выполненное в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$, выполнено и в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Леммы 2.6 и 2.7 позволяют всюду далее считать, что $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$.

Пусть тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. Тогда оно выполнено в $\mathcal{V}$ и существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Предположим, что последовательность слов

$$u \equiv w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k \equiv v \tag{2}$$

является кратчайшим выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Поскольку $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$, из леммы 2.4 вытекает, что $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$.

Будем вести доказательство индукцией по длине вывода (2). База индукции очевидна: если $k = 1$, то тождество $u = v$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$, а значит и в их пересечении. Пусть теперь $k > 1$. Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{V}$. Поскольку это многообразие является 0-приведенным, в $\mathcal{V}$ выполнены и тождества $u = v = 0$. Случай, когда $w_i = 0$ в $\mathcal{V}$ для некоторого $0 < i < k$, разбирается точно так же, как в доказательстве предложения 3.3 в работе [1]. Поэтому далее можно считать, что каждое из слов $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ является полугрупповым и либо линейно, либо совпадает со словом x^2.

Предположим, что $w_i \equiv x^2$ для некоторого $0 < i < k$. Из того, что (2) — кратчайший вывод тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, вытекает, что слова $w_0, w_1, \ldots, w_k$ попарно различны. С другой стороны, $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k) = \{x\}$. Следовательно, каждое из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $x^m = x^n$, и потому эти многообразияя периодичны. Следовательно, их можно рассматривать как многообразия полугрупп. Это позволяет завершить рассмотрения, повторив соответствующую часть доказательства предложения 3.3 работы [1].

Осталось рассмотреть случай, когда слова $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ линейны. При этом можно считать, что слова u и v не линейны. В самом деле, если хотя бы одно из слов u и v линейно, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2 \cdots x_m = 0$. Но тогда $u = w_1 = \cdots = w_{k-1} = v = 0$ в $\mathcal{V}$, и (2) является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. Без ограничения общности будем считать также, что тождество $u = w_1$ выполнено в многообразии $\mathcal{Y}$, а значит тождество $w_1 = w_2$ выполнено в многообразии $\mathcal{Z}$. Можно считать, что $w_1 \equiv x_1x_2 \cdots x_m$. Дальнейшие рассуждения распадаются на три случая в зависимости от значения k.

Случай 1: $k = 2$. Вывод (2) имеет в этом случае вид $u \to w_1 \to v$, причем $u = w_1$ в $\mathcal{Y}$ и $w_1 = v$ в $\mathcal{Z}$. Поскольку слова u и v нелинейны, то, согласно лемме 2.2, многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ периодичны, и потому их можно рассматривать как многообразия полугрупп. Это позволяет завершить рассмотрение данного случая, повторив рассуждения, проведенные при рассмотрении случая 1 в доказательстве предложения 3.3 работы [1].

Случай 2: $k = 3$. В этом случае вывод (2) имеет вид $u \to w_1 \to w_2 \to v$, причем тождества $u = w_1$ и $w_2 = v$ выполнены в $\mathcal{Y}$. Поскольку слова u и v нелинейны, то, согласно лемме 2.2, многообразие $\mathcal{Y}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. В этом многообразии выполнено тождество $x_1x_2 \cdots x_m = u$ и $\ell(u) > m$. Отсюда легко вытекает, что все нильполугруппы в $\mathcal{Y}$ нильпотентны (см. [2, лемма 1]). В силу [12, предложение 2.11], получаем, что многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству вида

$$x_1x_2 \cdots x_m = x_1x_2 \cdots x_{i-1}(x_i \cdots x_j)^t x_{j+1} \cdots x_m$$

для некоторого $t > 1$ и некоторых $0 \le i \le j \le m$. Это позволяет завершить рассмотрение случая 2 аналогично тому, как это сделано при рассмотрении случая 2 в доказательстве предложения 3.3 работы [1].

Случай 3: $k > 3$. Этот случай разбирается точно так же, как случай 3 в доказательстве предложения 3.3 работы [1].

Импликация в) $\longrightarrow$ а) теоремы 1.1 доказана.

5. Эквивалентность дистрибутивности и стандартности

Хорошо известно, что всякий стандартный элемент решетки дистрибутивен в ней (см., например, [5, теорема 253]). Отсюда немедленно вытекает импликация б) $\longrightarrow$ а) теоремы 1.1. Докажем импликацию а) $\longrightarrow$ б). Тем самым, доказательство теремы 1.1 будет завершено. Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное многообразие. В силу уже доказанной импликации а) $\longrightarrow$ в), $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие. Леммы 2.5 и 2.7 показывают, что многообразие $\mathcal{N}$ дистрибутивно. В силу тех же двух лемм достаточно убедиться в том, что $\mathcal{N}$ стандартно. Как показано в [6, лемма II.1.1], если элемент произвольной решетки дистрибутивен и модулярен, то он стандартен. Поэтому требуемое утверждение вытекает из следующего факта.

Предложение 5.1. *Всякое* 0*-приведенное многообразие эпигрупп является модулярным элементом решетки* **EPI**.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие эпигрупп, а ν — отвечающая ему вполне инвариантная конгруэнция на унарной полугруппе F. Конгруэнция ν имеет ровно один неодноэлементный класс (состоящий из тех и только тех слов, которые равны 0 в $\mathcal{N}$). Решетка всех многообразий унарных полугрупп антиизоморфна решетке всех вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F, которая, в свою очередь, вкладывается в решетку эквивалентностей на множестве F. Как проверено в [8, предложение 2.2], если отношение эквивалентности на некотором множестве X имеет ровно один неодноэлементный класс, то оно является модулярным элементом в решетке эквивалентностей на X. Таким образом, ν — модулярный элемент в решетке эквивалентностей на множестве F, а значит и в решетке вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F. Учитывая, что понятие модулярного элемента самодвойственно, получаем, что многообразие $\mathcal{N}$ является модулярным элементом в решетке всех многообразий унарных полугрупп, и тем более в ее подрешетке **EPI**. □

Теорема 1.1 доказана. □

References

[1] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский, *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп*, Алгебра и логика, **49**:3 (2010), 303-–330. MR2766391

[2] М. В. Сапир, Е. В. Суханов, *О многообразиях периодических полугрупп*, Изв. вузов. Матем., **4** (1981), 48–55. MR0624862

[3] В. Ю. Шапрынский, *Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп*, Изв. вузов. Матем. **7** (2011), 67–79. MR2931718

[4] Л. Н. Шеврин, *К теории эпигрупп.* I, II, Матем. сб., **185**:8 (1994), 129–160; **185**:9 (1994), 153–176. MR1302627; MR1305760

[5] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation.* Birkhäuser, Springer Basel AG, 2011. MR2768581

[6] G. Grätzer, E. T. Schmidt, *Standard ideals in lattices*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12**:1 (1961), 17-–86. MR0133265

[7] S. V. Gusev, B. M. Vernikov, *Epimorphisms of the lattice of epigroup varieties*, Электрон. ресурс. 11.06.2015. http://arxiv.org/abs/1404.0478v4. 1—22.

[8] J. Ježek, *The lattice of equational theories.* I: *modular elements*, Czechosl. Math. J. **31**:1 (1981), 127–152. MR0604120

[9] V. Yu. Shaprynskiĭ, D. V. Skokov, B. M. Vernikov B. M., *Special elements of the lattice of epigroup varieties*, Электрон. ресурс. 02.08.2014. http://arxiv.org/abs/arXiv:1408.0356v1. [1–27.]

[10] Shevrin L. N. *Epigroups* Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra, Dordrecht: Springer, 2005, 331–380. MR2210135

[11] D. V. Skokov, *Special elements of the lattice of epigroup varieties*, Groups and Graphs, Algorithms and Automata: Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School in honour of the 80th Birthday of Professor V.A.Belonogov and of the 70th Birthday of Professor V.A.Baransky. Ekaterinburg, (2015) ,86.

[12] B. M. Vernikov, *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties*, Algebra Universalis, **59**:3–4 (2008), 405–428. MR2470588

[13] B. M. Vernikov, *Special elements in lattices of semigroup varieties*, Acta Sci. Math. (Szeged), **81**:1–2 (2015), 79–109.

Skokov Dmitry Vyacheslavovich
Ural Federal University,
Institute of mathematics and computer sciences,
pr. Lenina, 51,
620000, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: dmitry.skokov@gmail.com