S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 732–742 (2015) УДК 517.956.6
DOI 10.17377/semi.2015.12.059 MSC 35M12

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ВРАГОВА

И.Е. ЕГОРОВ, И.М. ТИХОНОВА

Abstract. In this paper we consider Vragov problem for the equation of mixed type. We construct an approximate solution by solving a boundary value problem for the system of third-order ODE. The obtained error estimate for modified Galerkin method through the regularization parameter and the eigenvalues of the Dirichlet problem for the Laplas equation in the variables $x \in R^n$.

Keywords: equation of mixed type, approximate solution, modified Galerkin method, inequality, regularization.

1. Введение

Построение теории уравнений смешанного типа началось с работ Ф. Трикоми, С. Геллерстеда [1–3]. В 20-30-х годах они начали изучать краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа, где уравнения в одной части области определения — эллиптического типа, а в другой части — гиперболического типа. Такие задачи называются задачами Трикоми и Геллерстеда [4]. В 70-х годах В.Н.Врагов [5, 6] и др. [9, 10, 12] начали построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка с произвольным многообразием изменения типа. К исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись разные методы и подходы, такие, как теория сингулярных интегральных уравнений [1–4, 7, 8], функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галеркина [5, 6, 9, 10, 11, 17].

Метод Галеркина широко применяется к решению краевых задач для уравнений математической физики в работах [13, 14, 15, 17] и др. В работах [15, 16]

Egorov I.E., Tikhonova I.M., A modified Galerkin method for Vragov problem.

Работа поддержана Министерством образования и науки России (проект №3047).

Поступила 17 июля 2015 г., опубликована 28 октября 2015 г.

получены оценки погрешности метода Галеркина для эллиптических и параболических уравнений.

В работах [17, 18] стационарный метод Галеркина применен к решению краевой задачи Врагова в случаях, когда уравнение принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания, гиперболо-параболическому типу вблизи верхнего основания, и когда уравнение принадлежит эллиптическому типу вблизи обоих оснований цилиндрической области. В этих работах получены оценки погрешности стационарного метода Галеркина через собственные числа оператора Лапласа по переменным $x \in R^n$ и t.

В данной работе рассматривается краевая задача В.Н.Врагова [5]. Для исследования краевой задачи будем использовать модифицированный (нестационарный) метод Галеркина [19] с привлечением метода регуляризации. Для данной краевой задачи строим приближенное решение с помощью решения системы ОДУ третьего порядка. При этом получим оценку погрешности модифицированного метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по переменным $x \in R^n$. Эта работа является продолжением статьи [20].

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей $S, Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

В области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \triangle u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями.

Положим

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0. \tag{3}$$

При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения (1) в работе [20] с помощью модифицированного метода Галеркина была доказана регулярная разрешимость краевой задачи (1)–(3), когда уравнение смешанного типа принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперболо-параболическому типу на верхнем основании цилиндрической области. Была получена оценка погрешности модифицированного метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласса по переменным $x \in R^n$.

3. Априорные оценки и регулярная разрешимость

Для целого $k \geq 1$ через $||\cdot||_k$ будем обозначать норму пространства Соболева $W_2^k(Q)$.

Пусть C_L – класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3).

Справедлива следующая лемма [5, 6].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \ a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существует число $\lambda > 0$ *такое, что справедливо неравенство*

$$\int_Q e^{-2\lambda t} u_t Lu dQ \geq C_1(\lambda)||u||_1^2, \ \ C_1 > 0,$$

для всех $u(x,t)$ *из* C_L.

Обозначим скалярное произведение в $L_2(Q)$ через (u,v), $||u||^2 = (u,u)$ для u,v из $L_2(Q)$ и

$$(f,g)_0 = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \ ||f||_0^2 = (f,f)_0, \ f,g \in L_2(\Omega).$$

Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются собственными функциями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \ x \in \Omega, \ \varphi|_s = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \tag{4}$$

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0 \tag{5^1}$$

для случая $k(x,0) > 0, \ k(x,T) \geqslant 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0 \tag{5^2}$$

для случая $k(x,0) > 0, \ k(x,T) < 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \ D_t c^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0 \tag{5^3}$$

для случая $k(x,0) < 0, \ k(x,T) < 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0 \tag{5^4}$$

для случая $k(x,0) < 0, \ k(x,T) \geqslant 0$.

В силу леммы 1 для уравнения (4) с краевыми условиями (5^p), где $p = \overline{1,4}$, при достаточном малом $\lambda > 0$ устанавливается

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$, либо $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$, либо $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$, либо $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$.*

Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что имеет место неравенство

$$\varepsilon\|u_{tt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_1^2 \leqslant C_2\|f\|^2,\ C_2 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично части доказательства теоремы 1 в работе авторов [20].

Умножим (4) на $e^{-2\lambda t}c_{kt}^{N,\varepsilon}$ и просуммируем полученное равенство по k от 1 до N:

$$-\varepsilon\int_Q u_{ttt}^{N,\varepsilon}u_t^{N,\varepsilon}e^{-2\lambda t}dQ + (Lu^{N,\varepsilon}, e^{-2\lambda t}u_t^{N,\varepsilon}) = \int_Q fu_t^{N,\varepsilon}e^{-2\lambda t}dQ.$$

Далее, используя лемму 1 и неравенство Коши, получаем оценку

$$\varepsilon\|u_{tt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_1^2 \leqslant C_2\|f\|^2,\ C_2 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \frac{C_1}{4\lambda^2}. \tag{6}$$

□

Оценка (6) гарантирует существование единственного решения краевой задачи (4), (5^p), где $p = \overline{1,4}$. Следовательно, приближенные решения $u^{N,\varepsilon}$ однозначно определяются краевой задачей (4), (5^p), где $p = \overline{1,4}$, и имеет место $c_k^{N,\varepsilon} \in W_2^3(0,T)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия лемм $1, 2$ и*

$$a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существует неотрицательные гладкие функции $\xi(t),\ \eta(t)$ и число $\varepsilon_1 > 0$ такие, что имеет место неравенство

$$-(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi D_t^3 u^{N,\varepsilon} + \eta D_t^2 u^{N,\varepsilon}) \geqslant C_3\int_Q\left((u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + \sigma\sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2\right)dQ - C_4||u^{N,\varepsilon}||_1^2,$$
$$C_3 > 0,\ C_4 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\sigma = 1$ для $k(x,T) < 0$ и $\sigma = 0$ для $k(x,T) \geqslant 0$.

Доказательство. Умножим (4) на $-(\xi D_t^3 c_l^{N,\varepsilon} + \eta D_t^2 c_l^{N,\varepsilon})$ и просуммируем полученное равенство по l от 1 до N:

$$-(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi u_{ttt}^{N,\varepsilon} + \eta u_{tt}^{N,\varepsilon}) = \varepsilon\int_Q \xi(u_{ttt}^{N,\varepsilon})^2 dQ + \varepsilon\int_Q \eta u_{ttt}^{N,\varepsilon}u_{tt}^{N,\varepsilon}dQ$$
$$-(Lu^{N,\varepsilon}, \xi u_{ttt}^{N,\varepsilon} + \eta u_{tt}^{N,\varepsilon}),$$

где ξ, η – неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции.

После интегрирования по частям с учетом условий (5^p), где $p = \overline{1,4}$, получаем:

$$-(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi u_{ttt}^{N,\varepsilon} + \eta u_{tt}^{N,\varepsilon}) = \varepsilon\|\sqrt{\xi}u_{ttt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \tag{7}$$
$$+\int_Q\left\{\left[(a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t)\right](u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + (\eta - \frac{3}{2}\xi_t)\sum_{i=1}^n (u_{tx_1}^{N,\varepsilon})^2\right\}dQ$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int_Q \eta_t (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dQ + \int_Q \left[(a\xi)_t + c\xi - a\eta\right] u_{tt}^{N,\varepsilon} u_t^{N,\varepsilon} dQ$$

$$+\int_Q (c\xi_t - c\eta)\, u_{tt}^{N,\varepsilon} u^{N,\varepsilon} dQ + \int_Q (\eta_t - \xi_{tt}) \sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} u_{x_i}^{N,\varepsilon} dQ + A,$$

где

$$A \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\varepsilon\eta - k\xi)(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + \xi \sum_{i=1}^{n} (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 - 2a\xi u_{tt}^{N,\varepsilon} u_t^{N,\varepsilon}\right] dx\Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$+\int_{\Omega_T} \left\{\left[(\Delta u^{N,\varepsilon} - cu^{N,\varepsilon})\xi u_{tt}^{N,\varepsilon}\right] + (\xi_t - \eta)\sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^{N,\varepsilon} u_{x_i}^{N,\varepsilon}\right\} dx.$$

1. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0$. В данном случае достаточно рассмотреть ситуацию, когда $\xi(t) = 1,\ \eta(t) = 0$. Доказательство приведено в [20].

2. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) \geqslant k_0 > 0,\ k(x,T) < 0$.

Тогда существуют положительные числа $T_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(x,t) \leq -\delta_1 < 0,\ \ T_0 \leq t \leq T.$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0,\ \ \xi(T) = 0,\ \ \xi(t) = \mu,\ \ 0 \leq t \leq T_0,$$
$$\xi_t \leq 0,\ \ T_0 \leq t \leq T,$$
$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_0, \\ 1 - \frac{1}{2}\xi_t, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Найдется $\mu > 0$ такое, что $\delta\mu > \max|k|$. С учетом свойств выбранных функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

a) когда $0 \leq t \leq T_0$,

$$I = (a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geqslant \delta_2 = \delta\mu - \max|k| > 0,$$

$$\eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1;$$

b) когда $T_0 \leq t \leq T$,

$$I \geqslant \delta_1,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 1.$$

С учетом условий леммы и (5^2) получаем, что $I \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и

$$A = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \eta (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (k\xi - \varepsilon\eta)(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx.$$

Теперь выбираем положительное число ε_1 так, чтобы

$$\varepsilon_1 \leqslant k_0\mu,\ \min\{\delta_1, \delta_2\} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \max|\eta_t| \geqslant \delta_3 > 0.$$

Тогда величина $A \geqslant 0$, т. е. граничные интегралы в (7) будут неотрицательными, и

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon|\eta_t| \geqslant \delta_3,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Применяя неравенство Коши в подчиненных членах равенства (7), получим априорную оценку леммы 3.

3. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$.

Тогда существуют положительные числа $0 < t_0 < T_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0,\ \ t \in [0,t_0] \bigcup [T_0,T].$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \ge 0,\ \ \xi(0) = \xi(T) = 0,\ \ \xi(t) = \mu,\ \ t_0 \le t \le T_0,$$
$$\xi_t \geqslant 0,\ \ 0 \le t \le t_0,\ \xi_t \leqslant 0,\ \ T_0 \le t \le T,$$
$$\eta(t) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}\xi_t, & 0 \le t \le t_0, \\ 1, & t_0 \le t \le T_0, \\ 1 - \frac{1}{2}\xi_t, & T_0 \le t \le T. \end{cases}$$

Найдется $\mu > 0$ такое, что $\delta\mu > \max|k|$. С учетом свойств выбранных функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

a) если $0 \le t \le t_0$, то

$$I \geqslant \delta_1,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1;$$

b) если $t_0 \le t \le T_0$, то

$$I \geqslant \delta_2,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1;$$

c) если $T_0 \le t \le T$, то

$$I \geqslant \delta_1,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 1.$$

В силу условий леммы и (5^3), получаем:

$$I \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\},\ A = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \eta(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

Теперь утверждения леммы 3 следует из аналогичных рассуждений пункта 2.

4. Рассмотрим случай, когда $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$.

Также считаем, что существуют положительные числа $0 < t_0 < T$ и δ_1 такие, что

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0,\ \ 0 \le t \le t_0.$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \ge 0,\ \ \xi(0) = 0,\ \ \xi(t) = \mu,\ \ t_0 \le t \le T,$$
$$\xi_t \ge 0,\ \ 0 \le t \le t_0,$$
$$\eta(t) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}\xi_t, & 0 \le t \le t_0, \\ \geqslant 0, & t_0 \le t \le T, \end{cases}$$
$$\eta(T) = \eta'(T) = 0.$$

Найдется $\mu > 0$ такое, что $\delta\mu > \max|k|$. С учетом выбранных функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем:

a) когда $0 \le t \le t_0$,

$$I \geqslant \delta_1,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t = 1$$

b) когда $t_0 \leq t \leq T$,

$$I \geqslant \delta_2,\ \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geqslant 0.$$

В силу условий леммы и (5^4) получаем:

$$I \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\},\ A = \frac{\mu}{2}\int_{\Omega_T}\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

Далее доказательство оценки леммы 3 проводится аналогично пункту 2.

□

Лемма 4. *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0,\ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0,\ f(x,0) = 0$, *либо* $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0,\ f(x,0) = 0,\ f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0,\ f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0,\ f(x,T) = 0$. *Тогда справедливы априорные оценки*

$$\int_Q \left[(u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + \sigma\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_1}^{N,\varepsilon})^2\right] dQ \leqslant C_5[\|f\|^2 + \|f_t\|^2], \quad C_5 > 0 \tag{8}$$

$$\|\Delta u^{N,\varepsilon}\|^2 \leqslant C_6(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_6 > 0. \tag{9}$$

Доказательство. Случай $k(x,0) > 0,\ k(x,T) \geqslant 0,\ f(x,0) = 0$ рассмотрен в [20].

Если учесть условия леммы 4, то правая часть равенства (7) принимает вид

$$\int_Q [(f\xi)_t - f\eta]\, u_{tt}^{N,\varepsilon} dQ.$$

Тогда в силу неравенства Коши и леммы 2 неравенство (8) следует из оценки леммы 3.

Умножим (4) на $e^{-2\lambda t}\lambda_l D_t c_l^{N,\varepsilon},\ \lambda > 0$ и просуммируем полученное равенство по l от 1 до N, затем полученное равенство проинтегрируем по t от 0 до T.

Тогда получим

$$(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon}, e^{-2\lambda t}\Delta u_t^{N,\varepsilon}) - (Lu^{N,\varepsilon}, e^{-2\lambda t}\Delta u_t^{N,\varepsilon}) = -(f, e^{-2\lambda t}\Delta u_t^{N,\varepsilon}).$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, будем иметь:

$$\big((fe^{-2\lambda t})_t, \Delta u^{N,\varepsilon}\big) = \varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}\sum_{i=1}^{n}(u_{ttx_i}^{N,\varepsilon})^2 dQ +$$

$$+\lambda\int_Q e^{-2\lambda t}(\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dQ + \int_Q e^{-2\lambda t}\left(a - \frac{1}{2}k_t + \lambda k\right)\sum_{i=1}^{n}(u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dQ$$

$$+\int_Q e^{-2\lambda t}\left(\sum_{i=1}^{n}k_{x_i}u_{tx_i}^{N,\varepsilon}u_{tt}^{N,\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n}a_{x_i}u_{tx_i}^{N,\varepsilon}u_t^{N,\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n}(cu^{N,\varepsilon})_{x_i}u_{tx_i}^{N,\varepsilon}\right) dQ$$

$$-2\lambda\varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}\sum_{i=1}^{n}u_{ttx_i}^{N,\varepsilon}u_{tx_i}^{N,\varepsilon} dQ + J, \tag{10}$$

где

$$J \equiv \int_\Omega e^{-2\lambda t}\left[\varepsilon u_{tt}^{N,\varepsilon}\Delta u_t^{N,\varepsilon} + \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2\right] dx|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T}(\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx.$$

При $k(x,0) > 0,\ k(x,T) < 0$ с учетом краевых условий (5^2) имеем:

$$J = \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T}(\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

А при $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$ получаем, что

$$J = -\int_{\Omega_0} k\sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T}(\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

В случае $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$ имеем:

$$J = \frac{1}{2}\int_\Omega ke^{-2\lambda t}\sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{-2\lambda T}(\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dx \geqslant 0.$$

В силу неотрицательности J, применяя неравенство Коши и оценки лемм 2, 3, из равенства (10) получаем неравенство (9) при достаточном малом $\lambda > 0$, в частности, $a - \frac{1}{2}k_t + \lambda k > \frac{\delta}{2}$. □

Из неравенств (6), (8), (9) получаем , что для приближенных решений справедлива оценка

$$\|u^{N,\varepsilon}\|_2^2 \leqslant C_7(\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \quad C_7 > 0. \tag{11}$$

На основании оценки (11) получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$c(x) \geqslant c_0 > 0,\ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) > 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,0) = 0$, *либо* $k(x,0) > 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$, $f(x,T) = 0$, *либо* $k(x,0) < 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,T) = 0$.

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение $u(x,t)$ *из* $W_2^2(Q)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_2 \leqslant C_8(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_8 > 0.$$

4. Оценка погрешности

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галеркина справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_1 \leq C_9(||f|| + ||f_t||)(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{-1/4}), \quad C_9 > 0, \tag{12}$$

где u *— точное решение краевой задачи* (1)–(3).

Доказательство. Случай $k(x,0)>0,\ k(x,T)\geqslant 0$ рассмотрен в работе [20].

Для доказательства теоремы 2 в случае, когда $k(x,0)>0,\ k(x,T)<0$, в пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N=\{\eta(x,t)=\sum_{l=1}^{N}a_l(t)\varphi_l(x):\ a_l\in W_2^2(0,T),\ a_l(0)=a_l'(0)=a_l'(T)=0,\quad l=\overline{1,N}\},$$

в случае $k(x,0)<0,\ k(x,T)<0$

$$H_N=\{\eta(x,t)=\sum_{l=1}^{N}a_l(t)\varphi_l(x):\ a_l\in W_2^2(0,T),\ a_l(0)=a_l'(T)=0,\ l=\overline{1,N}\},$$

в случае $k(x,0)<0,\ k(x,T)\geqslant 0$

$$H_N=\{\eta(x,t)=\sum_{l=1}^{N}a_l(t)\varphi_l(x):\ a_l\in W_2^2(0,T),\ a_l(0)=0,\ l=\overline{1,N}\}.$$

В силу теоремы 1 краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение из $W_2^2(Q)$. Так же $u_t\in W_2^1(Q)$, $u_t=\sum_{k=1}^{\infty}c_k'\varphi_k$, $c_k=(u,\varphi_k)_0$, и справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_0^T|c_k'(t)|^2dt=\int_Q\sum_{k=1}^{n}(u_{tx_k})^2dQ\leqslant C_{10}(\|f_t\|^2+\|f\|^2),\ C_{10}>0. \tag{13}$$

Рассмотрим случай $k(x,0)>0,\ k(x,T)<0$. Из равенств (4) и уравнения (1) нетрудно получить соотношения

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon},e^{-2\lambda t}\eta_t)=(f,e^{-2\lambda t}\eta_t),\ \ \forall\eta\in H_N,$$
$$(Lu,e^{-2\lambda t}\eta_t)=(f,e^{-2\lambda t}\eta_t)\ \ \forall\eta\in H_N.$$

Отсюда получаем равенство

$$(L(u-u^{N,\varepsilon}),e^{-2\lambda t}\eta_t)=-(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon},e^{-2\lambda t}\eta_t);\ \forall\eta\in H_N.$$

Положив $\eta=w-u^{N,\varepsilon}$ с произвольной функцией w из H_N, будем иметь

$$\int_Q L(u-u^{N,\varepsilon})e^{-2\lambda t}(u_t-u_t^{N,\varepsilon})dQ$$
$$=-\varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}u_{ttt}^{N,\varepsilon}(\omega_t-u_t^{N,\varepsilon})dQ+\int_Q(f-Lu^{N,\varepsilon})e^{-2\lambda t}(u_t-w_t)dQ$$
$$=\varepsilon\int_Q e^{-2\lambda t}u_{tt}^{N,\varepsilon}[(\omega_{tt}-u_{tt}^{N,\varepsilon})-2\lambda(\omega_t-u_t^{N,\varepsilon}]dQ$$
$$+\int_Q e^{-2\lambda t}(f-Lu^{N,\varepsilon})(u_t-w_t)dQ. \tag{14}$$

Пусть P_N — оператор проектирования на H_N. При

$$\omega=P_Nu=\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\varphi_k(x)$$

справедливо равенство

$$\int_\Omega |u_t - w_t|^2 dx = || \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k'(t)\varphi_k||_0^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k'(t)|^2.$$

Тогда получаем, что

$$||u_t - P_N u_t||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt. \tag{15}$$

Используя лемму 1, с учетом неравенств (13),(15) из равенства (14) получаем оценку (12) погрешности модифицированнного метода Галеркина.

В остальных случаях, когда $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$ и $k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geqslant 0$, оценка погрешности доказывается аналогично. □

References

[1] F. C. Tricomi, *Linear Equations of Mixed Type* [Russian translation]. Moscow: Gostekhizdat, 1947.

[2] F. C. Tricomi, *Lectures on Partial Differential Equations* [Russian translation]. Moscow: Izdat. Inostr. Lit., 1957.

[3] S. Gellerstedt,*Sur un probleme aux limites pour une équation lineaire aux derivées partielles du second ordre de tipe mixte.* Uppsala: These, 1935. JFM 61.1259.02

[4] A. V. Bitsadze, *Equations of Mixed Type* [in Russian]. Moscow: Akad. Nauk SSSR, 1959. Zbl 0087.09403

[5] V. N. Vragov, *Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics.* Novosibirsk: Novosibirsk Univ., 1983.

[6] V. N. Vragov, *On the theory of boundary-value problems for mixed-type equations in space*, Differentsial'nye Uravneniya, **13**:6 (1977), 1098–1105. MR0481610

[7] M. M. Smirnov, *Equations of Mixed Type* [in Russian]. Moscow: Nauka, 1970. MR0274966

[8] M. S. Salakhitdinov, *Equations of Mixed-Composite Type* [in Russian]. Tashkent: Fan, 1974. MR0608983

[9] I. E. Egorov and V. E. Fedorov, *Higher-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics* [in Russian]. Novosibirsk: Vychisl. Tsentr Sibirsk. Otdel. Ros. Akad. Nauk, 1995.

[10] I. E. Egorov and V. E. Fedorov, *Introduction to the Theory of Mixed Type Equations of Second Order* [in Russian]. Yakutsk: Yakutsk Univ., 1998.

[11] E. I. Moiseev, *Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter* [in Russian]. Moscow: Moscow Univ., 1988. MR0977972

[12] N. A. Lar'kin, *One class of nonlinear equations of mixed type*, Siberian Math. J., **19**:6 (1978), 919–924. MR0515183

[13] S. G. Mikhlin, *Variational Methods in Mathematical Physics* [in Russian]. Moscow: Nauka, 1970. MR0353111

[14] O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics.* New York etc.: Springer-Verlag, 1985. MR0793735

[15] A. V. Dzhishkariani, *On the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method*, [in Russian]. USSR Comput. Math. Math. Phys., **4**:2 (1964), 183–189.

[16] P. V. Vinogradova and A. G. Zarubin, *Error estimates for the Galerkin method as applied to time-dependent equations*, Comput. Math. Math. Phys., **49**:9 (2009), 1567–1575. MR2603300

[17] I. E. Egorov and I. M. Tikhonova, *Application of the the stationary Galerkin method for a mixed-type equation*, Mat. Zametki YaGU, **19**:2 (2012), 20–28 [in Russian]. Zbl 1289.35232

[18] I. E. Egorov and I. M. Tikhonova, *About convergence speed of the stationary galerkin method for the mixed type equation*, Vestnik YuUrGU Ser. Mat. Model. Progr., **14** (2012), 53–58 [in Russian].

[19] I. E. Egorov, *On the modified Galerkin method for a forward-backward parabolic equation*, Uzbek. Mat. Zh., **3** (2013), 33–40 [in Russian].

[20] I. E. Egorov and I. M. Tikhonova, *Application of the modified Galerkin method for a mixed-type equation*, Mat. Zametki SVFU, **4** (2014), 14–19.

Ivan Egorovich Egorov
North-Eastern Federal University,
Belinsky, 58,
677891, Yakutsk, Russia
E-mail address: Ivanegorov51@mail.ru

Irina Mikhailovna Tikhonova
North-Eastern Federal University,
Belinsky, 58,
677891, Yakutsk, Russia
E-mail address: Irinamikh3007@mail.ru