S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 777–783 (2015) УДК 514.1
DOI 10.17377/semi.2015.12.063 MSC 51M20

ЕВКЛИДОВА РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИКЛОВ БЕЗ СКРЫТЫХ СИММЕТРИЙ

С.А. ЛАВРЕНЧЕНКО, А.Ю. ЩИКАНОВ

Abstract. It is shown that any graph G that is the Cartesian product of two cycles can be realized in four-dimensional Euclidean space in such a way that every edge-preserving permutation of the vertices of G extends to a symmetry of the Euclidean realization of G. As a corollary, there exists an infinite series of regular toroidal two-dimensional polyhedra inscribed in the Clifford torus just like the five regular spherical polyhedra are inscribed in a sphere.

Keywords: quadrangulation, torus, Cartesian product of graphs, geometric realization, symmetry group, regular polyhedron.

1. Введение

(*Декартово*) *произведение* двух графов (т.е. 1-мерных симплициальных комплексов) G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин $V(G_1)$ and $V(G_2)$ обозначается $G_1 \times G_2$ и определяется как граф с множеством вершин $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, в котором две вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) соединены ребром при условии, что $\{u_1 = v_1$, и вершины u_2, v_2 соединены ребром в $G_2\}$ или $\{u_2 = v_2$, и вершины u_1, v_1 соединены ребром в $G_1\}$. Граф, являющийся циклом с n вершинами ($n \geq 3$), называется *циклом длины* n и обозначается C_n.

Известно, что каждая конечная абстрактная группа, с одной стороны, точно представима как подгруппа группы симметрий $\mathrm{O}(d)$ евклидового пространства $\mathbb{R}^d$ некоторой размерности d, а с другой стороны, изоморфна группе автоморфизмов некоторого конечного абстрактного графа (по теореме Фрухта [3]). В данной работе адресуется третье звено в тройке {группа, симметрия, граф}.

Lawrencenko, S., Shchikanov, A.Yu. Euclidean realization of the product of cycles without hidden symmetries.

Поступила 10 апреля 2014 г., опубликована 5 ноября 2015 г.

Показывается (теорема 1), что любой граф G, являющийся произведением циклов $C_n \times C_k$, представим в $\mathbb{R}^4$ без скрытых симметрий, т.е. так, что каждый комбинаторный автоморфизм G продолжается до геометрической симметрии евклидового представления G или, другими словами, до такой симметрии продолжается любая подстановка на множестве вершин $V(G)$, сохраняющая множество ребер $E(G)$ инвариантным. Конечно, любой граф G реализуется без скрытых симметрий в 1-остове правильного $(|V(G)|-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{|V(G)|}$, но интересно отыскать *минимальную* степень представления — т. е. минимально возможную размерность объемлющего евклидового пространства.

Граф $C_n \times C_k$ естественно вкладывается в 2-тор (2-мерный тор) $\mathbb{T}^2$ в виде n параллелей и k меридианов (или наоборот), в совокупности образующих квадрангуляцию $C_n \times C_k \hookrightarrow \mathbb{T}^2$, которая будет обозначаться $Q_{n,k}$. Эта квадрангуляция имеет nk вершин, $2nk$ ребер и nk (четырехугольных) граней. В разделе 4 геометрическая реализация без скрытых симметрий квадрангуляций $Q_{n,k}$ с транзитивными группами автоморфизмов приводит к новым правильным 2-многогранникам в $\mathbb{R}^4$. Ранее в $\mathbb{R}^4$ был известен только благородный тороидальный гексадекаэдр, построенный первым автором в [7, 8]. Название «благородный многогранник» («noble polyhedron») было введено Грюнбаумом [4] для всякого 2-многогранника, полная группа симметрий которого транзитивна на вершинах и гранях, но не обязательно на ребрах. Более точно, в разделе 4 будет показано, что квадрангуляции $Q_{n,k}$ реализуются без скрытых симметрий в $\mathbb{R}^4$ и оказываются благородными тороидальными 2-многогранниками, а при $n = k$ даже *правильными* тороидальными 2-многогранниками, вписанными в 2-тор Клиффорда в $\mathbb{R}^4$ подобно тому, как пять правильных сферических 2-многогранников вписаны в 2-сферу в $\mathbb{R}^3$.

2. Основные понятия, леммы и один пример

Пусть G — конечный симплициальный 1-комплекс или, другими словами, неориентированный *граф* без петель и кратных ребер, и пусть $\mathbb{M}^2$ — 2-многообразие. *Гранями* топологического вложения $h : G \hookrightarrow \mathbb{M}^2$ называются компоненты разности $\mathbb{M}^2 - h(G)$. Такое вложение называется *полигонизацией* 2-многообразия $\mathbb{M}^2$ с графом G, если замыкание каждой грани гомеоморфно замкнутому 2-диску. Полигонизация, у которой каждая грань ограничена циклом длины 4 графа G, называется (*топологической*) *квадрангуляцией.* Важное семейство квадрангуляций $Q_{n,k}$ было определено во введении.

С комбинаторной точки зрения квадрангуляции соответствует абстрактный клеточный 2-комплекс (у которого каждая 2-клетка соответствует четырехугольной грани) при условии, что пересечение замыканий любых двух граней или пусто, или ровно одна вершина, или ровно одно ребро графа G.

Пусть K^p и L^q — два конечных абстрактных клеточных комплекса размерностей p и q, где $p \le q$, с множествами вершин $V(K^p)$ и $V(L^q)$, соответственно. (*Комбинаторный клеточный*) *гомоморфизм* $K^p \to L^q$ определяется как клеточное отображение $\mu : V(K^p) \to V(L^q)$, т.е. если $v_0, v_1, \ldots, v_r$ суть вершины некоторой клетки в K^p, то $\mu(v_0), \mu(v_1), \ldots, \mu(v_r)$ являются вершинами некоторой клетки в L^q. Инъективный гомоморфизм называется *мономорфизмом*, а сюръективный мономорфизм *изоморфизмом.* В частности, изоморфизм $K^p \to K^p$ называется *автоморфизмом* p-комплекса K^p. Группа автоморфизмов у K^p обозначается $\mathrm{Aut}(K^p)$. Знак $\equiv$ обозначает идентичность групп.

Лемма 1.

$$|\mathrm{Aut}(C_n \times C_k)| = \begin{cases} 4nk & \text{при } n \neq k \\ 8n^2 & \text{при } n = k \neq 4 \\ 384 & \text{при } n = k = 4 \end{cases} \tag{1}$$

$$|\mathrm{Aut}(Q_{n,k})| = \begin{cases} 4nk & \text{при } n \neq k \\ 8n^2 & \text{при } n = k \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Сначала докажем равенство (1), используя стандартные техники теории графов [5, 6]. Заметим, что цикл C_n раскладывается в нетривиальное произведение двух графов тогда и только тогда, когда $n = 4$, а именно $C_4 = I \times J$, где I и J обозначают непересекающиеся 1-симплексы. В этом смысле (при $n \neq 4$) граф C_n является простым графом, а так как он еще связен, то (см. [6])

$$\mathrm{Aut}(C_n \times C_n) \equiv \mathrm{Aut}(C_n) \,\mathrm{wr}\, S_2 \equiv D_n \,\mathrm{wr}\, S_2.$$

Эта группа — веночное произведение (называемое в [5] композицией) диэдральной группы D_n на симметрическую группу S_2 и имеет порядок $|D_n|^2 \cdot |S_2| = 8n^2$. Далее, при $n \neq k$ графы C_n и C_k взаимно просты относительно операции произведения графов, и поэтому (см. [5])

$$\mathrm{Aut}(C_n \times C_k) \equiv \mathrm{Aut}(C_n) \times \mathrm{Aut}(C_k) \equiv D_n \times D_k.$$

Эта группа — прямое произведение двух диэдральных групп и имеет порядок $|D_n| \cdot |D_k| = 4nk$. Наконец, хорошо известно [5], что порядок группы автоморфизмов графа $C_4 \times C_4$ (т.е. 1-остова 4-куба) равен 384.

Теперь докажем равенство (2). Очевидно, группа $\mathrm{Aut}(Q_{n,k})$ всегда транзитивна на множестве вершин. При $n = k$ стабилизатор каждой вершины изоморфен диэдральной группе D_4, и поэтому $|\mathrm{Aut}(Q_{n,n})| = |V(Q_{n,n})| \cdot |D_4| = 8n^2$. При $n \neq k$ никакой цикл длины n не может отобразиться на цикл длины k, и поэтому стабилизатор каждой вершины v квадрангуляции $Q_{n,k}$ есть группа порядка 4, порожденная подстановками (α, id_2) и (id_1, β) множества вершин $V(Q_{n,k}) = V(C_n \times C_k)$, где id_1 и id_2 — тождественные, а α и β — нетождественные инволютивные автоморфизмы сомножителей C_n и C_k (соответственно) с неподвижной вершиной v. Поэтому $|\mathrm{Aut}(Q_{n,k})| = |V(Q_{n,k})| \cdot 4 = 4nk$. □

Флаг 2-комплекса определяется как тройка последовательно вложенных элементов вида: вершина $\in$ ребро $\in$ грань. Из доказательства равенства (2) извлекается следствие.

Следствие 1. *При произвольных $n, k \geq 3$ квадрангуляция $Q_{n,k}$ благородна в том смысле, что $\mathrm{Aut}(Q_{n,k})$ действует транзитивно на вершинах и на гранях (но не на ребрах при $n \neq k$). Далее, при любом n квадрангуляция $Q_{n,n}$ правильна в том смысле, что $\mathrm{Aut}(Q_{n,n})$ действует транзитивно на флагах, что обеспечивает максимально возможный порядок этой группы.*

Пусть K^p — конечный абстрактный клеточный p-комплекс. Через $|K^p| : K^p \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ обозначается (геометрическая) реализация комплекса K^p, т.е. геометрический p-многогранник (p-мерный многогранник) в $\mathbb{R}^d$, клеточная структура которого естественно унаследована от K^p и “угловые точки” которого естественно и биективно соответствуют вершинам K^p. *Симметрией* многогранника $|K^p|$ называется евклидово движение пространства $\mathbb{R}^d$, отображающее вершины в вершины (биективно) и оставляющее $|K^p|$ инвариантным. Множество всех симметрий многогранника $|K^p|$ образует конечную подгруппу группы всех евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^d$. Эта подгруппа обозначается $\mathrm{Sym}(|K^p|)$ и называется *(полной) группой симметрий многогранника* $|K^p|$. Эта группа естественно действует на множестве вершин $V(K^p)$ и, таким образом, соответствует некоторой подгруппе группы $\mathrm{Aut}(K^p)$ и часто понимается в данной работе комбинаторно, т.е. как группа соответствующих подстановок множества $V(K^p)$. Из контекста будет ясно, понимаем ли мы группу $\mathrm{Sym}(|K^p|)$ комбинаторно или геометрически.

Политоп определяется как выпуклая оболочка конечного множества точек в $\mathbb{R}^d$. d*-Политопом* называется d-мерный политоп. Пусть $\mu : K^p \to L^q$ — комбинаторный клеточный мономорфизм, и пусть задана реализация $|L^q| : L^q \hookrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$ посредством граничного комплекса некоторого $(q+1)$-политопа в $\mathbb{R}^{q+1}$. Обозначим через $\hat{K}^p$ образ $\mu(K^p)$, а через $|\hat{K}^p|$ реализацию $\hat{K}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$, естественно индуцированную многогранником $|L^q|$. Таким образом получаем реализацию $|\hat{K}^p| : K^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$ в виде

$$K^p \to \hat{K}^p \to |\hat{K}^p| \subseteq |L^q| \subset \mathbb{R}^{q+1}. \tag{3}$$

Будем говорить, что реализация (3) комплекса K^p посредством многогранника $|\hat{K}^p|$ в $\mathbb{R}^{q+1}$ *не имеет скрытых симметрий,* если каждый автоморфизм комплекса K^p индуцируется некоторой евклидовой симметрией его реализации $|\hat{K}^p|$.

С алгебраической точки зрения, предполагая, что начало координат в $\mathbb{R}^{q+1}$ остается неподвижным при всех симметриях многогранника $|\hat{K}^p|$, если реализация (3) комплекса K^p посредством $|\hat{K}^p|$ в $\mathbb{R}^{q+1}$ не имеет скрытых симметрий, то группа $\mathrm{Sym}(|\hat{K}^p|) \subset \mathrm{O}(q+1)$ обеспечивает точное представление степени $q+1$ группы $\mathrm{Aut}(K^p)$.

Лемма 2. *Для отсутствия скрытых симметрий в реализации (3) достаточно одновременного выполнения следующих трех условий:*
(i) $\mathrm{Sym}(|L^q|) \subseteq \mathrm{Sym}(|\hat{K}^p|)$,
(ii) $|V(L^q)| = |V(K^p)|$,
(iii) $|\mathrm{Sym}(|L^q|)| = |\mathrm{Aut}(K^p)|$.

Доказательство. В силу (i) каждая симметрия многогранника $|L^q|$ является симметрией многогранника $|\hat{K}^p|$ и поэтому индуцирует некоторый автоморфизм комплекса K^p. В силу (ii) различные симметрии $|L^q|$ индуцируют различные автоморфизмы K^p. В силу (iii) каждый автоморфизм K^p индуцируется некоторой симметрией $|L^q|$, которая в силу (i) также является симметрией многогранника $|\hat{K}^p|$. □

Например, при $p = q = 1$ цикл $K^1 = C_n$ реализуется посредством граничного комплекса $B(P_n^2)$ правильного евклидового n-угольника P_n^2 в $\mathbb{R}^2$. Заметим, что P_n^2 является 2-политопом в $\mathbb{R}^2$, и также заметим, что группы $\mathrm{Sym}(B(P_n^2))$ и $\mathrm{Sym}(P_n^2)$ идентичны как группы подстановок множества $V(P_n^2) = V(|\hat{K}^1|)$. Комплекс $B(P_n^2)$ соответствует $|\hat{K}^1| = |L^1|$ в (3), и поэтому условие (ii) леммы 2 выполнено. Поскольку обе группы $\mathrm{Sym}(P_n^2)$ и $\mathrm{Aut}(C_n)$ действуют на множестве $V(C_n)$ как n-угольная диэдральная группа D_n, условие (iii) тоже выполнено.

Далее, поскольку каждый элемент группы $\mathrm{Sym}(P_n^2)$ оставляет 1-остов C_n инвариантным, условие (i) тоже выполнено, и по лемме 2 граф C_n реализуется посредством $B(P_n^2)$ без скрытых симметрий.

3. Реализация тороидальных квадрангуляций

В этом разделе дается конструкция, обобщающая пример с циклом C_n из конца предыдущего раздела.

Декартово произведение правильного n-угольника на правильный k-угольник $P_n^2 \times P_k^2$ $(n, k \geq 3)$ известно [9] как n, k-*двупризма* (“n, k-duoprism”) и в данной работе будет обозначаться $P_{n,k}^4$. Двупризма $P_{n,k}^4$ является 4-политопом как выпуклая оболочка множества nk точек $M_{ij}\big(\cos\frac{2\pi i}{n},\ \sin\frac{2\pi i}{n}, \cos\frac{2\pi j}{k},\ \sin\frac{2\pi j}{k}\big)$, где $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Таким образом, вершины M_{ij} двупризмы $P_{n,k}^4$ лежат на 2-торе Клиффорда в $\mathbb{R}^4$, и ее граничный комплекс $B(P_{n,k}^4)$ является 3-многогранником [играющим роль $|L^3|$ в реализации (3)], вписанным в этот тор. Нетрудно видеть, что 1-остов у $B(P_{n,k}^4)$ есть граф $C_n \times C_k$ [играющий роль K^1 в реализации (3)], и что 2-остов у $B(P_{n,k}^4)$ содержит реализацию $\hat{Q}_{n,k}$ квадрангуляции $Q_{n,k}$ плюс еще n штук k-угольников и еще k штук n-угольников.

Теорема 1. *Для любых n, $k \geq 3$ граф $C_n \times C_k$ геометрически реализуется в $\mathbb{R}^4$ без скрытых симметрий посредством* 1*-остова граничного комплекса соответствующей двупризмы $B(P_{n,k}^4)$, и, далее, тороидальная квадрангуляция $Q_{n,k}$ геометрически реализуется без скрытых симметрий в 2-остове у $B(P_{n,k}^4)$.*

Доказательство. Доказательство разбивается на три случая.

Случай 1. $n \neq k$. Имеем

$$\mathrm{Sym}(P_{n,k}^4) \equiv \mathrm{Sym}(P_n^2 \times P_k^2) \equiv \mathrm{Sym}(P_n^2) \times \mathrm{Sym}(P_k^2) \equiv D_n \times D_k.$$

Полученная группа является прямым произведением двух диэдральных групп и имеет порядок $4nk$. По лемме 1(1) условие (iii) леммы 2 выполнено. Условие (ii) очевидно выполнено. Далее, поскольку каждый элемент группы $\mathrm{Sym}(P_{n,k}^4)$ оставляет 1-остов $C_n \times C_k$ инвариантным, то и условие (i) выполнено. Итак, по лемме 2 граф $C_n \times C_k$ реализуется посредством 1-остова у $B(P_{n,k}^4)$ без скрытых симметрий. Тогда $Q_{n,k}$ реализуется без скрытых симметрий в 2-остове у $B(P_{n,k}^4)$, потому что $\mathrm{Aut}(Q_{n,k}) \subseteq \mathrm{Aut}(C_n \times C_k)$.

Случай 2. $n = k \neq 4$. Аналогично имеем

$$\mathrm{Sym}(P_{n,n}^4) \equiv \mathrm{Sym}(P_n^2 \times P_n^2) \equiv \mathrm{Sym}(P_n^2) \,\mathrm{wr}\, S_2 \equiv D_n \,\mathrm{wr}\, S_2.$$

Эта группа является веночным произведением диэдральной группы D_n на симметрическую группу S_2 и имеет порядок $|D_n|^2 \cdot |S_2| = 8n^2$. По лемме 1 $|\mathrm{Sym}(P_{n,n}^4)| = |\mathrm{Aut}(C_n \times C_n)|$, и доказательство завершается как в случае 1.

Случай 3. $n = k = 4$. В этом случае $P_{4,4}^4$ является 4-кубом, и $\mathrm{Sym}(P_{4,4}^4)$ является гипероктаэдральной группой, имеющей порядок 384. Так же по лемме 1 $|\mathrm{Sym}(P_{4,4}^4)| = |\mathrm{Aut}(C_4 \times C_4)|$, и доказательство завершается как и выше. □

Из доказательства теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 2. $\mathrm{Aut}(C_n \times C_k) \equiv \mathrm{Sym}(P_{n,k}^4)$ *при всех $n, k \geq 3$, где* $\mathrm{Sym}(P_{n,k}^4)$ *рассматривается как группа подстановок множества $V(C_n \times C_k)$.*

Интересно отметить, что по лемме 1 случай 3 в доказательстве теоремы 1 — единственный, в котором $|\mathrm{Aut}(C_n \times C_k)| \neq |\mathrm{Aut}(Q_{n,k})|$, что влечет существование более одной копии $Q_{4,4}$ в 2-остове 4-куба (причем все реализуются без скрытых симметрий по теореме 1). Точное число таких копий равно трем, что находится с использованием [1, формула (4)] вместе с леммой 1 как отношение $|\mathrm{Aut}(C_4 \times C_4)|/|\mathrm{Aut}(Q_{4,4})| = 384/128 = 3$.

4. Правильные 2-многогранники

Всякую геометрическую реализацию полигонизации замкнутого 2-многообразия в $\mathbb{R}^d$ без скрытых симметрий будем называть *правильным 2-многогранником*, если группа автоморфизмов полигонизации транзитивна на флагах, и, следуя Грюнбауму [4], *благородным 2-многогранником,* если эта группа транзитивна на вершинах и на гранях, но не обязательно на ребрах. Благородный 2-многогранник является и *изогональным* (т.е. все многогранные углы при вершинах конгруэнтны), и *изоэдральным* (т.е. все грани конгруэнтны). У правильного 2-многогранника, помимо вышеперечисленных конгруэнций, все двугранные углы конгруэнтны. Из следствия 1 и теоремы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 3. *Квадрангуляция $Q_{n,k}$ реализуется в виде благородного тороидального 2-многогранника в $\mathbb{R}^4$ при всех $n, k \geq 3$. Далее, $Q_{n,n}$ реализуется в виде правильного тороидального 2-многогранника в $\mathbb{R}^4$ при каждом $n \geq 3$.*

Заметим, что все правильные тороидальные 2-многогранники $|\hat{Q}_{n,n}|$, найденные в разделе 3, оказываются вписанными в 2-тор Клиффорда в $\mathbb{R}^4$ так же, как пять правильных сферических 2-многогранников вписаны в 2-сферу в $\mathbb{R}^3$.

5. Заключение

Классификация правильных тороидальных полигонизаций получена Кокстером [2, с. 25–27] — это бесконечные серии самодвойственных квадрангуляций (со степенью каждой вершины $\delta = 4$), а также триангуляций ($\delta = 6$) и двойственных им гексагонизаций ($\delta = 3$). В следствии 3 серия квадрангуляций Кокстера реализуется правильными тороидальными 2-многогранниками в $\mathbb{R}^4$. Реализация без скрытых симметрий правильных триангуляций и гексагонизаций Кокстера в евклидовом пространстве размерности 4 или 5 остается открытой проблемой.

References

[1] B. Chen, J.H. Kwak, S. Lawrencenko, *Weinberg bounds over nonspherical graphs*, J. Graph Theory, **33**:4 (2000), 220–236. MR1746969

[2] H.S.M. Coxeter, *Configurations and maps*, Rep. Math. Colloq., II, Ser. **8** (1948), 18–38. Zbl 0032.19202

[3] R. Frucht, *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*, Compos. Math., **6** (1938), 239–250. Zbl 0020.07804

[4] B. Grünbaum, *Are your polyhedra the same as my polyhedra?*, Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. Eds. Aronov B., Basu S., Pach J., and Sharir M. Berlin: Springer. Algorithms Comb., **25** (2003), 461–488. MR2038487

[5] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969. MR0256911

[6] F. Harary, E.M. Palmer, *On the automorphism group of a composite graph*, Studia Sci. Math. Hungar., **3** (1968), 439–441. MR0236052

[7] S. Lawrencenko, *Polyhedral suspensions of arbitrary genus*, Graphs Comb., **26**:4 (2010), 537–548. MR2669458

[8] S. Lawrencenko, *A new regular polyhedron*, [in Russian], Discrete Mathematics and Its Applications: Proceedings of the 10th International Workshop. Ed. Kasim-Zade O.M. Moscow: Mechanics and Mathematics Faculty, Lomonosov Moscow State University, 2010, 495–498. Available online at: https://t.co/W3De2FsJVS.

[9] G. Olshevsky, *Section 6. Convex Uniform Prismatic Polychora*, Available online at: http://t.co/qYlbRVH2PD.

Serge Lawrencenko
Russian State University of Tourism and Service,
ul. Glavnaya, 99,
141221, Cherkizovo, Pushkino District,
Moscow Region, Russia
E-mail address: lawrencenko@hotmail.com

Alexey Yuriyevich Shchikanov
University of Technology,
ul. Gagarin, 42,
141070, Korolev,
Moscow Region, Russia
E-mail address: au2u@ya.ru