S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 784–794 (2015) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2015.12.064 MSC 62G30

О ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ В ТЕОРЕМЕ КОУЛА ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.И. САХАНЕНКО, О.А. СУХОВЕРШИНА

Abstract. Using coupling we obtain an estimate for the distribution of the uniform distance between a given weighted empirical process and an accompanying gaussian process with the same mean and the covariance function. This estimate also allows us to obtain Koul's theorem under more general sufficient assumptions.

Keywords: weighted empirical processes, gaussian approximation, accuracy of approximation, coupling, accompanying gaussian processes.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ нам заданы независимые случайные величины $\eta_{n1}, \dots, \eta_{nn}$, принимающие значения из отрезка $[0,1]$ и имеющие функции распределения $G_{ni}(x) = \mathbb{P}(\eta_{ni} \leqslant x)$. Введем в рассмотрение взвешенную эмпирическую функцию распределения

$$F_n(t) := \sum_{i \leqslant n} d_{ni}\{\mathtt{I}(\eta_{ni} \leqslant t) - G_{ni}(t)\}, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $d_{n1}, \dots, d_{nn}$ — некоторые неслучайные веса, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i \leqslant n} d_{ni}^2 = 1, \qquad \mu_n := \max_{i \leqslant n} |d_{ni}| \to 0. \tag{2}$$

Можно отметить, что если $d_{ni} = \mu_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\{\eta_{ni} = \eta_i\}$ одинаково распределены, то F_n — классический эмпирический процесс.

Sakhanenko A.I., Sukhovershina O.A., On accuracy of approximation in Koul's theorem for weighted empirical processes.

Работа поддержана РФФИ (гранты 15-01-07460-а и 13-01-12415-офи-м2).

Поступила 28 сентября 2015 г., опубликована 6 ноября 2015 г.

Нетрудно убедиться (см. лемму 4), что случайный процесс F_n имеет ковариационную функцию

$$C_n(s,t) := \sum_{i\leqslant n} d_{ni}^2[G_{ni}(\min\{s,t\}) - G_{ni}(s)G_{ni}(t)]. \tag{3}$$

Введем, дополнительно, функцию распределения

$$T_n(t) := \sum_{i\leqslant n} d_{ni}^2 G_{ni}(t), \quad T_n(-0) = 0, \quad T_n(1) = 1. \tag{4}$$

Теперь можем сформулировать результат, полученный ранее Hira L. Koul в [1, стр. 16].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2)*, где при каждом n случайные величины $\eta_{n1},\dots,\eta_{nn}$ независимы и принимают значения из* $[0,1]$. *Предположим дополнительно, что*

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-\delta}[T_n(t+\delta) - T_n(t)] = 0. \tag{5}$$

В этом случае процесс F_n слабо сходится в $D[0;1]$ к некоторому процессу W тогда и только тогда, когда ковариационная функция $C_n(s,t)$ для каждых $s,t\in(0,1)$ сходится к некоторой ковариационной функции $C(s,t)$. При этом W, с необходимостью, непрерывный гауссовский процесс с непрерывной ковариационной функцией $C(s,t)$ и $W(0) = W(1) = 0$.

Подчеркнем, что в теореме 1 и далее все пределы берутся при $n\to\infty$, если только прямо не оговорено противное.

Естественным образом возникает вопрос об оценках скорости сходимости в теореме 1. Получение ответа на этот вопрос и является основной целью работы.

На самом деле ниже в теореме 2 и следствии 1 будет установлен лучший результат: будет найдена оценка точности приближения нашего процесса F_n к некоторому сопровождающему гауссовскому процессу W_n, причём оценка в равномерной метрике, а не в более слабых метриках из $D[0,1]$, которые использовались Коулом в [1].

Далее под символом $||\cdot||$ будем понимать равномерную норму в пространстве функций:

$$||x|| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|, \quad x\in D[0,1].$$

Условимся ещё, что ниже всегда символы C_1, C_2 и C_0 обозначают некоторые абсолютные постоянные, каждый раз одни и те же.

2. Основные результаты

Пусть $\{B_{ni}(\cdot)\}$ — независимые стандартные винеровские процессы. Введем в рассмотрение гауссовский процесс:

$$W_n(t) := \sum_{i\leqslant n} d_{ni}(B_{ni}(G_{ni}(t)) - G_{ni}(t)B_{ni}(1)). \tag{6}$$

Ниже, в лемме 4, будет показано, что у него такие же среднее и ковариационная функция, что и у взвешенного эмпирического процесса. Поэтому мы будем называть его сопровождающим гауссовским процессом.

Далее нам потребуется условие

$$\tau_n := \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{n} d_{ni}^2 \mathbb{P}(\eta_{ni} = t) \to 0. \tag{7}$$

Поскольку

$$\tau_n \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1-\delta} [T_n(t+\delta) - T_n(t)] \quad \forall\delta > 0,$$

то условие (7) слабее, чем (5).

Основной целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть натуральные числа m, n и вещественное ε удовлетворяют условиям*

$$\varepsilon > 0, \quad m, n \geq 1, \quad m\tau_n \leqslant 1. \tag{8}$$

В этом случае на одном вероятностном пространстве с эмпирическим процессом F_n можно построить такой сопровождающий гауссовский процесс W_n, что

$$\mathbb{P}\Big(||F_n - W_n|| > C_1\varepsilon\Big) \leqslant \frac{m^{3/2}\mu_n}{\varepsilon^3} + 2^6 m \exp\Big\{ - \frac{\varepsilon^2 m}{1+\varepsilon m\mu_n}\Big\}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что в теореме 2 способ построения на одном вероятностном пространстве процессов F_n и W_n существенно зависит от выбора чисел m, n и ε. А в следующем утверждении этот способ зависит только от числа n.

Следствие 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ можно так построить на одном вероятностном пространстве процессы F_n и W_n, что будет справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}\big(||F_n - W_n|| > C_2(\mu_n^{1/8} + \tau_n^{3/8})\big) \leqslant C_2\big(\mu_n^{1/8} + \tau_n^{3/8}\big) \ . \tag{10}$$

Обозначим через $\Pi(F_n, W_n)$ — расстояние Прохорова между распределениями процессов F_n и W_n, причем распределения мы рассматриваем в пространстве $D[0,1]$ с равномерной метрикой. В этом случае из следствия 1, с учетом определения расстояния Прохорова, вытекает

Следствие 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\Pi(F_n, W_n) \leqslant C_2(\mu_n^{1/8} + \tau_n^{3/8}). \tag{11}$$

В частности

$$\Pi(F_n, W_n) \ \to 0 \quad \textit{при} \quad \mu_n + \tau_n \to 0. \tag{12}$$

Поскольку условие (7) слабее, чем (5), то (12) влечет выполнение как условия (5), так и условия (2). Значит мы получили достаточно удобную оценку (11) для близости распределений процессов F_n и W_n при условиях, более слабых, чем предполагаются в теореме 1.

Остальная часть работы посвящена доказательству теоремы 2 и следствия 1.

3. Некоторые вспомогательные утверждения

3.1. Следующие утверждения известны и легко доказываются.

Лемма 1. *Процесс $\mathtt{I}(\eta_{ni} \leqslant t) - G_{ni}(t)$ имеет нулевое среднее и ковариационную функцию*

$$C_{ni}^0(t,s) = G_{ni}(\min\{s,t\}) - G_{ni}(t)G_{ni}(s). \tag{13}$$

Напомним, что $\{B_{ni}(\cdot)\}$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Лемма 2. *Броуновский мост* $W_{ni}^0 = B_{ni}(t) - tB_{ni}(1)$ *имеет нулевое среднее и ковариационную функцию*

$$Cov(W_{ni}^0(t), W_{ni}^0(s)) = \min\{s,t\} - st \quad \textit{при} \quad s,t \in [0,1].$$

Заменяя в этом утверждении t на $G_{ni}(t)$, а s на $G_{ni}(s)$, немедленно получаем, что верна

Лемма 3. *Процесс*

$$W_{ni}(t) = W_{ni}^0(G_{ni}(t)) = B_{ni}(G_{ni}(t)) - G_{ni}(t)B_{ni}(1)$$

имеет нулевое среднее и ковариационную функцию $C_{ni}^0(t,s)$, *введенную в* (13).

Лемма 4. *Процессы* F_n *и* W_n *имеют нулевые средние и одну и ту же ковариационную функцию* $C_n(s,t)$, *определенную в* (3).

Доказательство. Из определений (1) и (6) вытекает, что процессы F_n и W_n являются линейными комбинациями (с теми же самыми весами) более простых независимых процессов, которые, ввиду лемм 1 и 3, имеют нулевые средние и одинаковые ковариационные функции $C_{ni}^0(t,s)$ из (13). Значит, в этом случае процессы F_n и W_n также имеют нулевые средние и одинаковую ковариационную функцию, которую можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} Cov\{W_n(t), W_n(s)\} &= \sum_{i\leqslant n}\sum_{j\leqslant n} d_{ni}d_{nj}Cov\{W_{ni}(t), W_{nj}(s)\} \\ &= \sum_{i\leqslant n} d_{ni}^2 C_{ni}^0(s,t) = C_n(s,t) = Cov\{F_n(t), F_n(s)\}. \end{aligned}$$

□

3.2. Следующую лемму 5 см. в [2, стр.640].

Лемма 5. *Для броуновского моста* W_{ni}^0 *при всех* n *и* i *справедливо соотношение*

$$\mathbb{P}(||W_{ni}^0|| > x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-2k^2x^2} \leqslant 2e^{-2x^2} \qquad \forall x \geqslant 0.$$

Лемма 6. *В условиях леммы* 5 *мы имеем* $\mathbb{E}||W_{ni}||^3 < 1$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $||W_{ni}|| \leqslant ||W_{ni}^0||$, так как

$$||W_{ni}|| = \sup_{-\infty<x<\infty} |W_{ni}^0(G_{ni}(x))| \leqslant \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |W_{ni}^0(y)| = ||W_{ni}^0||.$$

Следовательно, ввиду леммы 5

$$\begin{aligned} \mathbb{E}||W_{ni}||^3 \leqslant \mathbb{E}||W_{ni}^0||^3 &= \int_0^\infty 3x^2\mathbb{P}(||W_{ni}^0|| > x)dx \leqslant \int_0^\infty 6x^2e^{-2x^2}dx \\ &= (1/2)\int_{-\infty}^\infty 6(t^2/4)e^{-t^2/2}dt/2 = 3\sqrt{2\pi}/8 < 1. \end{aligned}$$

□

3.3. Далее мы будем использовать одно следствие из знаменитого неравенства Беннета — Хёфдинга.

Лемма 7. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные величины,*

$$\forall j \quad \xi_j \leqslant y, \quad \mathbb{E}\xi_j = 0 \quad \textit{и} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\xi_j^2 \leqslant B^2 < \infty.$$

Тогда при любых $x, y > 0$ *выполняется*

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \geqslant x\Big) \leqslant \exp\Big(-\frac{x^2}{2B^2 + 2xy}\Big).$$

3.4. Теорема Маркуса и Зинна. Нам ниже потребуется один частный случай леммы 1.5 из статьи [3]. Предварительно введём обозначения и предположения.

Пусть $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность независимых, неотрицательных, действительнозначных случайных величин, не обязательно одинаково распределенных. И пусть $\{X_k\}$ — последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями, такая что пары $\{(X_k, \eta_k)\}$ независимы при каждом k, а $\{\varepsilon_k\}$ — радемахеровская последовательность, не зависящая от $\{(X_k, \eta_k)\}$. Введем $\psi(t)$ — неотрицательную и невозрастающую при $t \geqslant 0$ функцию и положим

$$Z_k(t) = \psi(t)(X_k \mathtt{I}\{\eta_k \geqslant t\} - \mathbb{E}X_k \mathtt{I}\{\eta_k \geqslant t\}),$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k X_k \psi(\eta_k) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k(t).$$

Теорема 3. *Во введенных выше обозначениях предположим, что*

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k^2 \psi^2(\eta_k) \leqslant \delta^2/2^7. \tag{14}$$

Тогда для любых $\lambda, \delta > 0$ *выполнено*

$$\mathbb{P}\big(\sup\nolimits_{1 \leqslant j \leqslant n} ||\mathfrak{L}_j|| > \lambda + \delta\big) \leqslant 16\mathbb{P}\big(|S_n| > \lambda/4\big). \tag{15}$$

4. Начало доказательства основной теоремы 2

4.1. Разбиение интервала $[0, 1]$**.** Далее в работе мы фиксируем натуральные числа m и n. Разобьем теперь интервал $[0, 1]$ на m частей при помощи точек $\{t_j\}$, полагая

$$t_j = \min\{t : T_n(t) \geqslant j/m\}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad t_0 = 0.$$

Поскольку введеная в (7) величина τ_n — максимальный скачок введенной в (4) функции распределения T_n, то

$$j/m \leqslant T_n(t_j) \leqslant j/m + \tau_n, \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

а потому при $t_0 = 0$ выполняется

$$T_n(t_j) - T_n(t_{j-1}) \leqslant 1/m + \tau_n \leqslant 2/m, \; j = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

В (16) было использовано также последнее условие из (8).

4.2. Оператор огрубления и его свойства. Используя точки $\{t_j\}$, для любой функции $x(t)$, определённой при $t \in [0,1]$, условимся символом $\widetilde{x}(t)$ обозначать ступенчатую функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\widetilde{x}(1) = x(1), \quad \widetilde{x}(t) = x(t_{j-1}) \quad \text{при} \quad t \in J_j := [t_{j-1}, t_j), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Нам еще потребуется обозначение

$$\triangle_j(x) = \triangle_{j,m,n}(x) = \sup_{t \in J_j} |x(t) - \widetilde{x}(t)| = \sup_{t \in J_j} |x(t) - x(t_{j-1})|.$$

Лемма 8. *При всех m и n для любой функции x справедливо равенство*

$$||x - \widetilde{x}|| = \max_{j \leqslant m} \triangle_j(x).$$

4.3. Следствия из неравенства Маркуса — Зинна. Далее будем использовать огрубления $\widetilde{F}_n$ и $\widetilde{W}_n$ случайных процессов F_n и W_n. Нам потребуется

Теорема 4. *Для всех $j = 1, ..., m$ и $\varepsilon > 0$ при $m\varepsilon^2 \geqslant 4$*

$$\mathbb{P}\Big(\triangle_j\,(F_n) \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant 2^5 \exp\Big(-\frac{\varepsilon^2 m}{1 + \varepsilon m \mu_n}\Big). \tag{17}$$

В частности, в этом случае

$$\mathbb{P}\Big(||F_n - \widetilde{F}_n|| > \varepsilon\Big) \leqslant 2^5 m \exp\Big(-\frac{\varepsilon^2 m}{1 + \varepsilon m \mu_n}\Big). \tag{18}$$

Доказательство этого утверждения проведем в несколько этапов.

4.4. Проверка условий в теореме Маркуса — Зинна. При $j = 1, \ldots, m$ полагаем

$$\eta_i = 1 - \eta_{ni} \geqslant 0, \quad X_i = d_{ni}\mathtt{I}\{\eta_{ni} \in J_j\}, \quad \psi(t) \equiv 1, \quad \lambda = \delta = 8\varepsilon. \tag{19}$$

Нетрудно понять, что в этом случае

$$\mathfrak{L}_n(1-t) = \sum_{i=1}^{n} \psi(1-t)(X_i \mathtt{I}\{1 - \eta_{ni} \geqslant 1 - t\} - \mathbb{E}X_i \mathtt{I}\{1 - \eta_{ni} \geqslant 1 - t\})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i \mathtt{I}\{\eta_{ni} \leqslant t\} - \mathbb{E}X_i \mathtt{I}\{\eta_{ni} \leqslant t\}).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\triangle_j(F_n) \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |\mathfrak{L}_n(1-t)| = \sup_{t \in [0,1]} |\mathfrak{L}_n(t)| = ||\mathfrak{L}_n||. \tag{20}$$

Проверяем условие (14) теоремы 3:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} d_{ni}^2 \mathtt{I}^2\{\eta_{ni} \in J_j)\} = \sum_{i=1}^{n} d_{ni}^2 \mathbb{E}\mathtt{I}\{\eta_{ni} \in [t_{j-1}, t_j)\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} d_{ni}^2 (G_{ni}(t_j) - G_{ni}(t_{j-1})) = [T_n(t_j) - T_n(t_{j-1})] \leqslant 2/m.$$

В итоге условие (14) превращается в соотношение $2/m \leqslant (8\varepsilon)^2/2^7 = \varepsilon^2/2$, т. е. в условие $m\varepsilon^2 \geqslant 4$. Таким образом, при выполнении условий теоремы 4 из (15), (19) и (20) мы получаем, что

$$\mathbb{P}(\triangle_j(F_n) \geqslant 16\varepsilon) \leqslant 16\mathbb{P}(|S_n| > 2\varepsilon) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

4.5. Применение неравенства Беннета — Хёфдинга. В нашем случае

$$\xi_i = \varepsilon_i d_{ni}\mathtt{I}\{\eta_i \in J_j\}, \quad |\xi_i| \leqslant |d_{ni}| \leqslant \max_i |d_{ni}| = \mu_n,$$

$$\mathbb{E}\xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i^2 = M_n \leqslant 2/m = B^2.$$

Подставляя эти значения при $x = 2\varepsilon$ и $y = \mu_n$ в неравенство Беннета — Хёфдинга, получаем следующее соотношение

$$\mathbb{P}\Big(|S_n| > 2\varepsilon\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_j > 2\varepsilon\Big) + \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} -\xi_j > 2\varepsilon\Big)$$

$$\leqslant 2\exp\Big(-\frac{(2\varepsilon)^2}{2(2/m + 2\mu_n\varepsilon)}\Big) = 2\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2 m}{1 + \varepsilon\mu_n m}\Big).$$

Из этого неравенства и (21) следует оценка (17) при $m\varepsilon^2 \geqslant 4$.

Утверждение (18) вытекает из (17) с учетом леммы 8:

$$\mathbb{P}(||F_n - \widetilde{F}_n|| > 16\varepsilon) = \mathbb{P}(\max_j \triangle_j(F_n) > 16\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(\triangle_j(F_n) > 16\varepsilon).$$

Теорема 4 доказана.

4.6. Для сопровождающего процесса справедлив аналогичный результат.

Лемма 9. *При $j = 1, \ldots, m$ для всех $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\mathbb{P}(\triangle_j(W_n(t)) \geqslant \varepsilon) \leqslant 2^5 \exp(-\varepsilon^2 m).$$

В частности, имеет место неравенство

$$\mathbb{P}(||W_n - \widetilde{W}_n|| > \varepsilon) \leqslant 2^5 m \exp(-\varepsilon^2 m). \tag{22}$$

Доказательство. Пусть для любых m, n, i и j нам заданы независимые в совокупности случайные величины: $\{\eta_{ni}^{(j)}, \ \ j \in \mathbb{N}, \ \ i = 1,..,n\}$, где величины $\{\eta_{ni}^{(1)}, \eta_{ni}^{(2)}, \ldots\}$ одинаково распределены с η_{ni} при всех n и i. Введем

$$F_{nl}(t) = \sum_{i \leqslant n} d_{ni} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\sqrt{l}} \big\{\mathtt{I}\big(\eta_{ni}^{(j)} \leqslant t\big) - G_{ni}(t)\big\}. \tag{23}$$

Нетрудно проверить, что при фиксированных n и i процессы

$$H_{l,n,i}(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{j=1}^{l} \big\{\mathtt{I}\big(\eta_{ni}^{(j)} \leqslant t\big) - G_{ni}(t)\big\} \tag{24}$$

являются стандартными эмпирическими процессами, а поэтому при $l \to \infty$ имеет место C-сходимость распределений процессов $H_{l,n,i}$ к распределениям W_{ni}.

Поскольку при различных i введённые в (24) процессы независимы, то

$$f(H_{l,n,1}, ..., H_{l,n,n}) \Rightarrow f(W_{n1}, \ldots, W_{nn})$$

для любого непрерывного функционала f. А так как F_{nl} — непрерывная функция от $\{H_{l,n,i}\}$ в силу (23), а $\triangle_j$ — непрерывный функционал от F_{nl}, то

$$\mathbb{P}(\triangle_j(F_{n,l}) \geqslant x) \to \mathbb{P}(\triangle_j(W_n) \geqslant x) \quad \text{при } l \to \infty,$$

если только x — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\triangle_j(W_n)$. Из сходимости распределений вытекает, что

$$\mathbb{P}(\triangle_j(W_n) \geqslant x) \leqslant \overline{\lim}_{l\to\infty}\mathbb{P}(\triangle_j(F_{nl}) \geqslant x).$$

Заменим теперь в теореме 4 процесс F_n на $F_{n,l}$, а число μ_n на $\mu_{nl} = \frac{\mu_n}{\sqrt{l}} \to 0$ при $l \to \infty$. Переходя к пределу при $l \to \infty$ в такой видоизмененной теореме 4 мы немедленно в пределе получаем оба утверждения леммы 9. $\square$

5. Центральное утверждение в доказательстве

5.1. В этом разделе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любых фиксированных $r > 0$ и $m, n \geqslant 1$ на некотором вероятностном пространстве можно построить такие случайные процессы $\overline{F}_n$ и $\overline{W}_n$, что*
(A) $\overline{F}_{n,m}$ одинаково распределен с $\widetilde{F}_{n,m}$;
(B) $\overline{W}_{n,m}$ одинаково распределен с $\widetilde{W}_{n,m}$;
(C) справедливо неравенство

$$\mathbb{P}(||\overline{F}_n - \overline{W}_n|| > C_0 r) \leqslant 2m^{3/2}\mu_n/r^3. \tag{25}$$

Подчеркнем, что в теореме 5 способ построения на одном вероятностном пространстве процессов $\overline{F}_n$ и $\overline{W}_n$ существенно зависит от выбора чисел m, n и r.

5.2. Вспомогательная теорема. Введём случайные вектора $\{\xi_i\}$ и $\{\zeta_i\}$, которые могут быть как конечномерные, так и бесконечномерные. Мы будем иметь в виду, что

$$\xi_i = (\xi_i[1], \xi_i[2], \dots) \quad \text{и} \quad ||\xi||_2^2 = \sum_{j\geqslant 0} \xi_i^2[j],$$

где используется обозначение $\xi_i[j]$ для j-той компоненты вектора ξ_i, и обозначение $||\xi||_2$ для евклидовой нормы.

Мы предполагаем, что справедливы следующие четыре условия:
(a) $\xi_0, \xi_1, \dots$ — независимые случайные векторы;
(b) $\mathbb{E}\xi_i^2[j] < \infty$ при всех i и j;
(c) $\zeta_0, \zeta_1, \dots$ — независимые нормально распределенные векторы;
(d) для любого i случайные векторы ξ_i и ζ_i имеют одинаковые средние и одинаковые матрицы ковариаций.

Теорема 6. [4] *Пусть выполнены условия (a), (b), (c) и (d). Тогда для любого $r > 0$ на одном вероятностном пространстве можем построить такие векторы $\{\overline{\zeta}_i\}$ и $\{\overline{\xi}_i\}$, что*
(A) случайные векторы $\{\overline{\xi}_i\}$ и $\{\xi_i\}$ одинаково распределены;
(B) случайные векторы $\{\overline{\zeta}_i\}$ и $\{\zeta_i\}$ одинаково распределены;
(C) выполнено неравенство

$$\mathbb{P}\big(\sup_j |\overline{S}_n[j] - \overline{Z}_n[j]| > C_0 r\big) \leqslant \sum_{i\leqslant n} \big(\mathbb{E}||\xi_i||_2^3 + \mathbb{E}||\zeta_i||_2^3\big)/r^3, \tag{26}$$

где $\overline{S}_n[j] = \sum\limits_{i\leqslant n} \overline{\xi}_i[j]$ *и* $\overline{Z}_n[j] = \sum\limits_{i\leqslant n} \overline{\zeta}_i[j]$.

5.3. Доказательство теоремы 5. Применим теорему 6, полагая, что

$$\xi_i[j] := d_{ni}[\mathtt{I}(\eta_{ni} \leqslant t_j) - G_{ni}(t_j)], \quad \zeta_i[j] := d_{ni}W_{ni}(t_j), \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (27)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае, в силу определений нормы $||\cdot||$ и процессов $\overline{F}_n$ и $\overline{W}_n$ имеют место равенства

$$||\overline{F}_n - \overline{W}_n|| = \max_{0 \leqslant j < m} |F_n(t_j) - W_n(t_j)| = \sup_j |\overline{S}_n[j] - \overline{Z}_n[j]|. \quad (28)$$

Кроме того, введенные в (26) случайные величины $\{\zeta_i\}$ и $\{\overline{\xi}_i\}$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 6 и имеют размерность m. При этом

$$\gamma_{ni} := |\mathtt{I}(\eta_{ni} \leqslant t_j) - G_{ni}(t_j)| \leqslant 1,$$

а потому

$$||\overline{\xi}_i^2||_2^2 = \sum_{j=1}^m \xi_{ni}^2[j] = d_{ni}^2 \sum_{j=1}^m \gamma_{ni}^2[j] \leqslant m d_{ni}^2.$$

С другой стороны, $|\overline{\zeta}_i^2[j]| \leqslant |d_{ni}|\ ||W_{ni}||$, а, значит,

$$||\overline{\zeta}_i^2||_2^2 \leqslant m d_{ni}^2 ||W_{ni}||^2.$$

Из двух последних неравенств с учетом леммы 6

$$\mathbb{E}||\xi_i||_2^3 + \mathbb{E}||\zeta_i||_2^3 \leqslant (m d_{ni}^2)^{3/2}(1 + \mathbb{E}||W_{ni}||^3) \leqslant 2m^{3/2}\mu_n d_{ni}^2.$$

Подставляя последнюю оценку в (26) и учитывая (28), мы получим требуемое неравенство (25):

$$\mathbb{P}(||\overline{F}_n - \overline{W}_n|| > C_0 r) \leqslant \sum_{i \leqslant n} \frac{2m^{3/2}\mu_n d_{ni}^2}{r^3} = \frac{2m^{3/2}\mu_n}{r^3} \sum_{i \leqslant n} d_{ni}^2 = \frac{2m^{3/2}\mu_n}{r^3}.$$

Теорема 5 доказана.

6. Теорема Скорохода и её следствия

6.1. Теорема Скорохода [5].

Теорема 7. *Пусть случайные величины ξ и η заданы на одном вероятностном пространстве и принимают значения в некотором полном сепарабельном метрическом пространстве, а случайная величина ν_0 равномерно распределенная на $[0,1]$ и не зависит от пары (ξ, η). Тогда существуют такие функции g и ζ, что*
(A) $\zeta = \zeta(\xi, \eta, \nu_0)$ равномерно распределена на $[0,1]$;
(B) ζ и η — независимы;
(C) $\xi = g(\eta, \zeta)$ с вероятностью 1.

Замечание 1. *Пусть $\check{\eta}$ одинаково распределена с η, а $\check{\zeta}$ — равномерно распределена на $[0,1]$ и не зависит от $\check{\eta}$. Тогда для любой измеримой функции g пара $(\check{\eta}, \check{\xi}) = (\check{\eta}, g(\check{\eta}, \check{\zeta}))$ одинаково распределена с парой $(\eta, \xi) = (\eta, g(\eta, \zeta))$ при любом выборе независящей от η случайной величины ζ с равномерным распределением на $[0,1]$.*

6.2. Применение теоремы Скорохода к результату теоремы 5. Применяя теорему Скорохода к утверждению теоремы 5, получаем, что $\overline{W}_n$ представим в виде $\overline{W}_n = \overline{g}(\overline{F_n}, \overline{\zeta_n})$, где $\overline{g}$ — некоторая функция, а $\overline{\zeta}_n$ равномерно распределенная на $[0,1]$ и не зависит от $\overline{F_n}$. Выберем любую случайную величину $\widetilde{\zeta}_n$, равномерно распределенную на $[0,1]$ и не зависящую от $\widetilde{F}_n$, и положим $\widetilde{W}_n = \overline{g}(\widetilde{F}_n, \widetilde{\zeta}_n)$. Тогда пара $(\widetilde{W}_n, \widetilde{F}_n)$ одинаково распределена с $(\overline{W}_n, \overline{F}_n)$ и из (25) при $r = 2^{1/3}\varepsilon$ имеем:

$$\mathbb{P}\bigl(||\widetilde{F}_n - \widetilde{W}_n|| > 2^{1/3}C_0\varepsilon\bigr) \leqslant m^{3/2}\mu_n/\varepsilon^3. \tag{29}$$

6.3. Применение теоремы Скорохода к результатам леммы 9. Пусть W_n^* — некоторый гауссовский процесс, одинаково распределенный с W_n. Пусть $\widetilde{W}_n^*$ — огрубление W_n^*. Из теоремы Скорохода следует, что W_n^* представи́м в виде $W_n^* = g^*(\widetilde{W}_n^*, \widetilde{\nu}_n)$, где $\widetilde{\nu}_n$ равномерно распределенная на $[0,1]$ и не зависит от $\widetilde{W}_n^*$.

Положим теперь $W_n = g^*(\widetilde{W}_n, \nu_n)$, где процесс $\widetilde{W}_n$ введен в пункте 6.2, а ν_n равномерно распределена на $[0,1]$ и не зависит от $\widetilde{W}_n$. Таким образом пара $(W_n, \widetilde{W}_n)$ одинаково распределена с $(W_n^*, \widetilde{W}_n^*)$, и справедливо неравенство (22).

Замечание 2. *Подчеркнём, что построенный в этом пункте конкретный процесс W_n может не совпадать с тем абстрактным процессом W_n, что использовался в § 2 при описании нужного нам сопровождающего распределения.*

7. Завершение доказательства основных утверждений

7.1. Завершение доказательства теоремы 2. Заметим прежде всего, что

$$2^6 m \exp\Bigl\{-\frac{\varepsilon^2 m}{1+\varepsilon m\mu_n}\Bigr\} \geqslant 2^6\exp(-4) > 1 \quad \text{при} \quad m\varepsilon^2 < 4,$$

то есть, в этом случае правая часть неравенства (9) больше единицы, и, значит, теорема 2 верна. Таким образом, нам достаточно доказать теорему 2 при выполнении дополнительного условия $m\varepsilon^2 \geqslant 4$, появляющегося в теореме 4.

Заметим, что

$$||F_n - W_n|| \leqslant ||F_n - \widetilde{F}_n|| + ||\widetilde{F}_n - \widetilde{W}_n|| + ||\widetilde{W}_n - W_n||.$$

А поэтому при всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mathbb{P}(||F_n - W_n|| > (2^{1/3}C_0 + 32)\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(||F_n - \widetilde{F}_n|| > 16\varepsilon)$$
$$+\mathbb{P}(||\widetilde{F}_n - \widetilde{W}_n|| > 2^{1/3}C_0\varepsilon) + \mathbb{P}(||W_n - \widetilde{W}_n|| > 16\varepsilon).$$

Подставляя в это неравенство оценки из (18), (22) и (29), получаем утверждение (9) при $C_1 = 2^{1/3}C_0 + 32$.

Теорема 2 доказана.

7.2. Доказательство следствия 1. Нам достаточно доказать неравенство

$$\mathbb{P}\bigl(||F_n - W_n|| > 3C_1(\mu_n^{1/8} + \tau_n^{3/8})\bigr) \leqslant 2\bigl(\mu_n^{1/8} + \tau_n^{3/8}\bigr), \tag{30}$$

поскольку из него вытекает (10) при $C_2 = \min\{3C_1, 2\}$. Кроме того, далее мы считаем, что

$$\varepsilon_n := \mu_n^{1/8} + \tau_n^{3/8} \leqslant 1/2. \tag{31}$$

Действительно, если $\varepsilon_n > 1/2$, то правая часть в (30) больше 1, и неравенство (30) справедливо очевидным образом.

Если же (31) верно, то для вывода следствия 1 будем использовать утверждение теоремы 2 при

$$\varepsilon = 3\varepsilon_n, \quad m_n := 1/\varepsilon_n^{8/3} \geqslant m > m_n - 1. \tag{32}$$

Из (31) и (32) очевидно имеем:

$$\mu_n \leqslant \varepsilon_n^8, \quad \tau_n \leqslant \varepsilon_n^{8/3} = 1/m_n \leqslant 1/m, \quad m + 1 > m_n \geqslant 2^{8/3} > 6. \tag{33}$$

Из (33) видно, что выполнены все условия из (8).

Оценим, используя (32), первое слагаемое из утверждения теоремы 2:

$$m^{3/2}\mu_n/\varepsilon^3 \leqslant (\varepsilon_n^{-8/3})^{3/2}\varepsilon_n^8/(3\varepsilon_n)^3 = \varepsilon_n/27. \tag{34}$$

Заметим, что в силу (31), (32) и (33) выполняется

$$\varepsilon m\mu_n \leqslant 3\varepsilon_n^{1-8/3+8} \leqslant 3/2^{19/3} < 1/21 \quad \text{и} \quad m > m_n(1 - 1/m_n) > m_n(1 - 1/6).$$

Отсюда при $x_n := \varepsilon_n^{-2/3}$ получаем

$$\alpha := \frac{\varepsilon^2 m}{1 + \varepsilon\mu_n m} \geqslant \frac{3^2\varepsilon_n^2 m_n(1 - 1/6)}{1 + 1/21} > 11\varepsilon_n^2 m_n/2 = 11\varepsilon_n^{2-8/3}/2 = 11x_n/2.$$

Так как $e^{-x} \leqslant e^{-1}/x$ при всех x, то $e^{-11x/2} \leqslant e^{-11/2}/x^{11/2}$, а потому

$$me^{-\alpha} \leqslant m_n e^{-11x_n/2} \leqslant m_n e^{-11/2}/x_n^{11/2} = e^{-11/2}\varepsilon_n^{-8/3+11/3} < \varepsilon_n/2^7.$$

Подставляя последнее неравенство и (34) в (9), и, учитывая еще (32), имеем

$$\mathbb{P}\big(||F_n - W_n|| > 3C_1\varepsilon_n\big) \leqslant m^{3/2}\mu_n/\varepsilon^3 + 2^6 me^{-\alpha} < \varepsilon_n(1/27 + 2^6/2^7) < 2\varepsilon_n.$$

Тем самым требуемое неравенство (30) установлено также и в случае, когда верно условие (31). А значит, доказано и следствие 1.

References

[1] Hira L. Koul, *Weighted Empirical Processes in Dynamic Nonlinear Models*, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1911855

[2] И.И. Гихман и А.В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М.: Физматлит, 1965. Zbl 0132.37902

[3] B. Marcus and Joel Zinn, *The Bounded Law of the Iterated Logarithm for the Weighted Empirical Distribution Process in the Non-I.I.D. Case*, Annals of Probability, **12**:2 (1984), 335–360. MR0735842

[4] A.I. Sakhanenko, *A new way to obtain estimates in the invariance principle*, In: High Dimensional Probability II, Eds. Gine et al., Birkhauser, Boston, 2000, 221-243. MR1857325

[5] А. В. Скороход, *Об одном представлении случайных величин*, Теория вероятностей и ее применения, **21**:3 (1976) 645–648. Zbl 0362.60004

Olga Alexandrovna Sukhovershina
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: olka_suhovershina@mail.ru

Alexander Ivanovich Sakhanenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: aisakh@mail.ru