S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 80–91 (2015) УДК 519.633

MSC 65M06

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

А.К. БАЗЗАЕВ, И.Д. ЦОПАНОВ

Abstract. For a fractional diffusion equation with a fractional derivative in lowest terms with Robin boundary conditions, locally one-dimensional difference schemes are considered and their stability and convergence are proved.

Keywords: locally one-dimensional difference scheme, slow diffusion equation, Caputo fractional derivative, maximum principle, stability and convergence of difference schemes, Robin boundary conditions.

Введение

Дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений во многих областях физики, механики, прикладной математики, математической биологии и т.д. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом для описания физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью. Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью и характеризуются долгосрочной памятью. Использование дробного математического анализа может быть полезным для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов [1]—[2].

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают в задачах классической механики (обратные задачи), гидродинамики (движение тела в вязкой жидкости), теплопроводности (динамика тепловых потоков), диффузии

Bazzaev, A.K., Tsopanov, I.D., Locally one-dimensional difference schemes for the fractional diffusion equation with a fractional derivative in lowest terms.

Поступила 18 ноября 2014 г., опубликована 2 февраля 2015 г.

(электрохимический анализ поверхностей электродов), при изучении физических процессов стохастического переноса [3], при использовании концепции фрактала в физике конденсированных сред [4] и т.д. Многие проблемы фильтрации жидкости в сильно пористых (фрактальных) средах приводят также к необходимости изучения краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка [5]. Перенос, описываемый оператором с дробными производными на больших расстояниях от источников, приводит к иному поведению относительно малых концентраций по сравнению с классической диффузией, что заставляет пересмотреть существующие представления о безопасности, базирующиеся на представлениях об экспоненциальной скорости затухания (см. [6], [7]). Уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с «остаточной» памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой [8].

Данная работа посвящена рассмотрению локально-одномерной схемы (ЛОС) для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах с граничными условиями третьего рода. Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода рассмотрены в работе [9], а в работе [10] рассмотрены ЛОС для уравнения диффузии дробного порядка с конвекцией. Для ЛОС в указанных работах получены априорные оценки в равномерной метрике, доказаны их устойчивость и равномерная сходимость.

1. Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \dots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается третья начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной $\partial_{0x_\beta}^{\nu} u$ порядка ν $(0 < \nu < 1)$ по пространственной переменной x_β $(\beta = 1,\ 2,\ \dots, p)$ в младших членах:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{-\beta}(x,t)u - \mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\beta(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{+\beta}(x,t)u - \mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta = \ell_\beta,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\beta=1}^{p} L_\beta u,\ L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + r_\beta(x,t)\partial_{0x_\beta}^{\nu} u - q_\beta(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\beta \leqslant c_1,\ r_\beta \leqslant 0,\ |r_\beta| \leqslant c_2,\ q_\beta > 0,\ \lambda_{\pm\beta} \geqslant \lambda^* > 0,$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \dfrac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \partial u/\partial t$, $\partial_{0x_\beta}^{\nu}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\nu)}\int\limits_0^{x_\beta} \dfrac{u'(\xi,t)}{(x_\beta-\xi)^{\nu}}d\xi,\ 0<\nu<1$ — дробная производная Капуто порядка $\nu,\ 0<\nu<1$, по переменной x_β, $u' = \partial u/\partial x$, $c_0,\ c_1,\ c_2$ — положительные постоянные, $\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \overline{Q}_T = \overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$.

Локально-одномерная разностная схема

В замкнутой области $\overline{Q}_T$ зададим равномерную сетку. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_β с шагом $h_\beta = \ell_\beta/N_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$:

$$\overline{\omega}_{h_\beta} = \{x_\beta^{(i_\beta)} = i_\beta h_\beta : i_\beta = 0,1,...,N_\beta,\ h_\beta = \ell_\beta/N_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p\},$$

$$\overline{\omega} = \prod_{\beta=1}^{p}\overline{\omega}_{h_\beta}.$$

При этом будем обозначать ω_{h_β} — множество всех внутренних узлов сетки $\overline{\omega}_{h_\beta}$.

На отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ также введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_\tau' = \{0, t_{j+\beta/p} = (j+\beta/p)\,\tau,\ j = 0,1,\ \ldots,\ j_0-1;\ \beta = 1,2,\ldots,p\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$, так называемые фиктивные узлы $t_{j+\beta/p}$, $\beta = 1,2,\ldots,p-1$. Будем обозначать ω_τ' — множество узлов сетки $\overline{\omega}_\tau'$, для которых $t>0$.

Перейдем теперь к построению локально-одномерных схем для уравнения (1). Для этого по аналогии с ([11], стр. 481) уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathcal{P}u = \partial_{0t}^{\alpha}u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\beta=1}^{p}\mathcal{P}_\beta u = 0,\ \mathcal{P}_\beta u = \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}u - L_\beta u - f_\beta.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\beta = \left(t_{j+(\beta-1)/p},\ t_{j+\beta/p}\right],\ \beta = 1,2,\ \ldots,\ p$ будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{P}_\beta v_{(\beta)} = \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}v_{(\beta)} - L_\beta v_{(\beta)} - f_\beta = 0,\ t\in\Delta_\beta,\ \beta = 1,2,\ \ldots,\ p, \tag{4}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\ \dfrac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta} = \lambda_{-\beta}(x,t)v_{(\beta)} - \mu_{-\beta},\ x_\beta = 0,\\ -k_\beta(x,t)\ \dfrac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta} = \lambda_{+\beta}(x,t)v_{(\beta)} - \mu_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{5}$$

полагая при этом

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x,0) = u_0(x),\\ v_{(\beta)}(x,t_{j+(\beta-1)/p}) = v_{(\beta-1)}(x,t_{j+\beta/p}),\ \beta = 2,3,\ \ldots,\ p,\\ v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j),\ j = 1,2,\ \ldots,\ j_0-1. \end{gathered} \tag{6}$$

В [12] найден дискретный аналог дробной производной:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_{j+\beta/p}}\frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+\beta/p}-\eta)^{\alpha}}d\eta=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)u_{\bar{t}}^{s/p}+O(\tau/p), \tag{7}$$

где

$$u_{\bar{t}}^{s/p}=\frac{u^{s/p}-u^{(s-1)/p}}{\tau/p}.$$

Дробную производную порядка $\nu(0<\nu<1)$ по пространственной переменной аппроксимируем по аналогии с [13]:

$$\partial^{\nu}_{0x_\beta}u=\frac{1}{\Gamma(2-\nu)}\sum_{m=1}^{i_\beta}\left(x^{1-\nu}_{i_\beta-m+1}-x^{1-\nu}_{i_\beta-m}\right)u_{\bar{x}_\beta,m}+O(h_\beta), \tag{8}$$

где

$$u_{\bar{x}_\beta,m}=\frac{u_m-u_{m-1}}{h_\beta}.$$

Таким образом, аппроксимируя каждое уравнение (4) номера β с помощью (7) и (8) чисто неявной разностной схемой и, присоединяя граничные и начальные условия, получим разностный аналог задачи (1) — (3):

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\beta/p}}y=\Lambda y^{j+\beta/p}+\varphi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{9}$$

$$\Lambda y=(ay_{\bar{x}_\beta})_{x_\beta}+r_\beta\frac{1}{\Gamma(2-\nu)}\sum_{m=1}^{i_\beta}\left(x^{1-\nu}_{i_\beta-m+1}-x^{1-\nu}_{i_\beta-m}\right)y_{\bar{x}_\beta,m}-d_\beta y,$$

$$\begin{cases} a_\beta^{(+1_\beta)}y^{j+\beta/p}_{x_\beta,0}=\lambda_{-\beta}y_0^{j+\beta/p}-\mu_{-\beta},\ x_\beta=0,\\ -a_\beta^{(N_\beta)}y^{j+\beta/p}_{\bar{x}_\beta,N_\beta}=\lambda_{+\beta}y_{N_\beta}^{j+\beta/p}-\mu_{+\beta},\ x_\beta=\ell_\beta,\end{cases} \tag{10}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\omega_{h_\beta}. \tag{11}$$

где

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\beta/p}}y=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)y_{\bar{t}}^{s/p},$$

$$y_{\bar{t}}^{s/p}=\frac{y^{s/p}-y^{(s-1)/p}}{\tau}.$$

Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем теперь к изучению погрешности аппроксимации локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (9) номера β не аппроксимирует уравнение (1), но сумма погрешностей аппроксимации

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_p$$

стремится к нулю при $\tau \to 0$ и $|h| \to 0$.

Пусть $u = u(x,t)$ — решение задачи (1) — (3), а $y^{j+\beta/p}$, $\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$ — решение разностной задачи (9) — (11).

Как и выше промежуточные значения $y^{j+\beta/p}$ будем сравнивать с $u^{j+\beta/p} = u(x,\ t_{j+\beta/p})$, полагая $z^{j+\beta/p} = y^{j+\beta/p} - u^{j+\beta/p}$. Подставляя $y^{j+\beta/p} = z^{j+\beta/p} + u^{j+\beta/p}$ в разностное уравнение (9), получим

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right) z^{s/p}_{\bar{t}} = \Lambda_\beta z^{j+\beta/p} + \psi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{12}$$

где

$$\psi_\beta^{j+\beta/p} = \Lambda_\beta u^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right) u^{s/p}_{\bar{t}}. \tag{13}$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_\beta = (L_\beta u + f_\beta - \frac{1}{p}\ \partial^\alpha_{ot} u)^{j+1/2} \tag{14}$$

и, замечая, что

$$\sum_{\beta=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\beta = 0, \text{ если } \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta = f,$$

представим $\psi_\beta = \psi_\beta^{j+\beta/p}$ в виде

$$\psi_\beta = \overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta,$$

тогда

$$\begin{aligned}\psi_\beta^{j+\beta/p} &= \Lambda_\beta u^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p} - \Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u + \overset{\circ}{\psi}_\beta - \overset{\circ}{\psi}_\beta = \\ &= \left(\Lambda_\beta u^{j+\beta/p} - L_\beta u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\beta^{j+\beta/p} - f_\beta^{j+1/2}\right) - \\ &- \left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u - \frac{1}{p}\,(\partial^\alpha_{ot} u)^{1/2}\right) + \overset{\circ}{\psi}_\beta = \overset{*}{\psi}_\beta + \overset{\circ}{\psi}_\beta,\end{aligned}$$

где

$$\overset{*}{\psi}_\beta = \left(\Lambda_\beta u^{j+\beta/p} - L_\beta u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\beta^{j+\beta/p} - f_\beta^{j+1/2}\right) - \left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u - \frac{1}{p}\,(\partial^\alpha_{ot} u)^{j+1/2}\right).$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\psi}_\beta = O(h_\beta + \tau),\ \overset{\circ}{\psi}_\beta = O(1),$$

$$\psi = \sum_{\beta=1}^{p}\psi_\beta = \sum_{\beta=1}^{p}(\overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta) = \sum_{\beta=1}^{p}\overset{*}{\psi}_\beta = O\left(|h| + \tau\right).$$

Краевые условия (10) имеют первый порядок аппроксимации. Подставляя $y^{j+\beta/p}=z^{j+\beta/p}+u^{j+\beta/p}$ в разностные краевые условия (10), получим

$$\begin{cases} a_\beta^{(+1_\beta)} z_{x_\beta,0}^{j+\beta/p}=\lambda_{-\beta} z_0^{j+\beta/p}-\nu_{-\beta}^{j+\beta/p},\ x_\beta=0, \\ -a_\beta^{(N_\beta)} z_{\overline{x}_\beta,N_\beta}^{j+\beta/p}=\lambda_{+\beta} z_{N_\beta}^{j+\beta/p}-\nu_{+\beta}^{j+\beta/p},\ x_\beta=\ell_\beta, \end{cases} \tag{15}$$

$$\nu_{-\beta}=a^{(+1_\beta)}u_{x_\beta,0}-(\lambda_{-\beta}u_0-\mu_{-\beta})=\left(a^{(+1_\beta)}u_{x_\beta,0}-k_\beta\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)_{x_\beta=0}=O(h_\beta),$$

$$\nu_{+\beta}=-a^{(N_\beta)}u_{\overline{x}_\beta,N_\beta}-(\lambda_{+\beta}u_{N_\beta}-\mu_{+\beta})=\left(-a^{(N_\beta)}u_{\overline{x}_\beta,N_\beta}-k_\beta\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)_{x_\beta=\ell_\beta}=O(h_\beta).$$

Таким образом, погрешность решения разностной краевой задачи (9) — (11) удовлетворяет уравнению (12), нулевому начальному условию $z(x,0)=0$ и краевым условиям (15).

Устойчивость ЛОС

Для получения априорных оценок будем пользоваться принципом максимума для решения сеточного уравнения общего вида (см. [14], с.339):

$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),$$

где P,Q — узлы сетки, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащего самого узла. Коэффициенты $A(P),\ B(P,Q)>0$ удовлетворяют условиям

$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)\geqslant 0. \tag{16}$$

Разностную задачу (9) — (11) перепишем в виде:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)y_{\overline{t}}^{s/p}=\left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}^{j+\beta/p}\right)_{x_\beta}+$$

$$+\frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\sum_{m=1}^{i_\beta}\left(x^{1-\nu}_{i_\beta-m+1}-x^{1-\nu}_{i_\beta-m}\right)y_{\overline{x}_\beta,m}^{j+\beta/p}-d_\beta y_\beta^{j+\beta/p}+\varphi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{17}$$

$$\begin{cases} a_\beta^{(+1_\beta)} y_{x_\beta,0}^{j+\beta/p}=\lambda_{-\beta} y_0^{j+\beta/p}-\mu_{-\beta},\ x_\beta=0, \\ -a_\beta^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta}^{j+\beta/p}=\lambda_{+\beta} y_{N_\beta}^{j+\beta/p}-\mu_{+\beta},\ x_\beta=\ell_\beta, \end{cases} \tag{18}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_{h_\beta}. \tag{19}$$

Решение задачи (17) — (19) представим в виде суммы

$$y=\overset{*}{y}+\overset{\circ}{y},$$

где $\overset{*}{y}$ — решение однородных уравнений (17) с неоднородными краевыми (19) и однородными начальными условиями (19):

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)\overset{*}{y}{}_{\overline{t}}^{s/p}=\left(a_\beta \overset{*}{y}{}_{\overline{x}_\beta}^{j+\beta/p}\right)_{x_\beta}+$$

$$+r_\beta \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m=1}^{i_\beta} \left(x_{i_\beta-m+1}^{1-\nu} - x_{i_\beta-m}^{1-\nu}\right) \overset{*}{y}{}_{\overline{x}_\beta,m}^{j+\beta/p} - d_\beta \overset{*}{y}{}^{j+\beta/p}, \tag{20}$$

$$\begin{cases} a_\beta^{(+1_\beta)} \overset{*}{y}{}_{x_\beta,0}^{j+\beta/p} = \lambda_{-\beta} \overset{*}{y}{}_0^{j+\beta/p} - \mu_{-\beta},\ x_\beta = 0, \\ -a_\beta^{(N_\beta)} \overset{*}{y}{}_{\overline{x}_\beta,N_\beta}^{j+\beta/p} = \lambda_{+\beta} \overset{*}{y}{}_{N_\beta}^{j+\beta/p} - \mu_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{21}$$

$$\overset{*}{y}(x,0) = 0, \tag{22}$$

а $\overset{\circ}{y}$ — решение неоднородных уравнений (17) с однородными краевыми (19) и неоднородными начальными условиями (19):

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t_{j+(\beta-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(\beta-s)/p}^{1-\alpha}\right) \overset{\circ}{y}{}_{\overline{t}}^{s/p} = \left(a_\beta \overset{\circ}{y}{}_{\overline{x}_\beta}^{j+\beta/p}\right)_{x_\beta} +$$

$$+r_\beta \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m=1}^{i_\beta} \left(x_{i_\beta-m+1}^{1-\nu} - x_{i_\beta-m}^{1-\nu}\right) \overset{\circ}{y}_{\overline{x}_\beta,m} - d_\beta \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{23}$$

$$\begin{cases} a_\beta^{(+1_\beta)} \overset{\circ}{y}{}_{x_\beta,0}^{j+\beta/p} = \lambda_{-\beta} \overset{\circ}{y}{}_0^{j+\beta/p},\ x_\beta = 0, \\ -a_\beta^{(N_\beta)} \overset{\circ}{y}{}_{\overline{x}_\beta,N_\beta}^{j+\beta/p} = \lambda_{+\beta} \overset{\circ}{y}{}_{N_\beta}^{j+\beta/p},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{24}$$

$$\overset{\circ}{y}(x,0) = u_0(x). \tag{25}$$

Приводя (20) — (22) к каноническому виду, получаем, что коэффициенты уравнения (20) и краевых условий (21) удовлетворяют условиям (16) и

$$D(x_\beta, t_{j+\beta/p}) = d_\beta > 0,\ D(0, t_{j+\beta/p}) = \lambda_{-\beta} \geqslant \lambda^* > 0,\ D(\ell_\beta, t_{j+\beta/p}) = \lambda_{+\beta} \geqslant \lambda^* > 0.$$

Таким образом, на основании теоремы 3 (см. [14], с. 344) для решения $\overset{*}{y}$ задачи (20) — (22) получаем оценку:

$$\|\overset{*}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \max_{0<t'\leqslant j\tau} \frac{1}{\lambda^*} \left(\|\mu_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\mu_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\right), \tag{26}$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x\in\omega_h} |y|,\ \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h} |y|.$$

Переходим к оценке функции $\overset{\circ}{y}$. Уравнение (23) перепишем в виде

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\tau/p)^{1-\alpha} \overset{\circ}{y}{}_{\overline{t}}^{j+\beta/p} = \Lambda_\beta \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p} + \widetilde{\varphi}_\beta^{j+\beta/p}, \tag{27}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\beta^{j+\beta/p} = \varphi_\beta^{j+\beta/p} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta-1} \left(t_{j+(\beta-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(\beta-s)/p}^{1-\alpha}\right) \overset{\circ}{y}{}_{\overline{t}}^{s/p}.$$

Уравнение (27) приведем к каноническому виду:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{a_{\beta,i_\beta+1} + a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)} \frac{1}{h_\beta^\nu} + d_\beta\right] \overset{\circ}{y}{}_{i_\beta}^{j+\beta/p} =$$

$$= \frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}_{i_\beta+1} + \left[\frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\left(-x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{1_{(\beta)}}\right)\right] \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}_{i_\beta-1} +$$

$$-\frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta}\Bigg[\left(x^{1-\nu}_{i_\beta+1} - x^{1-\nu}_{i_\beta}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}_0 + \left(-x^{1-\nu}_{i_\beta+1} + 2x^{1-\nu}_{i_\beta} - x^{1-\nu}_{i_\beta-1}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}_1 +$$

$$+ \ \ldots + \ \left(-x^{1-\nu}_{4_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}_{i_\beta-2}\Bigg] + \Phi(P_{j+\beta/p}),$$

где

$$\Phi(P_{(j+\beta/p)}) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+(\beta-1)/p}_{i_\beta} + \overline{\varphi}{}^{j+\beta/p}_\beta,$$

где

$$\overline{\varphi}{}^{j+\beta/p}_\beta = \varphi^{j+\beta/p}_\beta + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{2/p} - t^{1-\alpha}_{1/p}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j+(\beta-2)/p}_{i_\beta} -$$

$$-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{p_{j+\beta-2}}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)\left(\overset{\circ}{y}{}^{s/p}_{i_\beta} - \overset{\circ}{y}{}^{(s-1)/p}_{i_\beta}\right).$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 ([14], гл. V. Дополнение, §2, ф. (25) — (27)), используя лемму, доказанную в [12]:

$$P_{(\beta)} = P(x, t_{j+\beta/p}),$$

$$A(P_{(\beta)}) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{a_{\beta,i_\beta+1} + a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta^\nu} + d_\beta\right] > 0,$$

$$B(P_{(\beta)}, Q) = \Bigg\{\frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2};\ \left[\frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\left(-x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{1_{(\beta)}}\right)\right];$$

$$\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha});$$

$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t^{1-\alpha}_{j+\beta/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p}\right); \left(-t^{1-\alpha}_{j+\beta/p} + 2t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-2)/p}\right);$$

$$\left(-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p} + 2t^{1-\alpha}_{j+(\beta-2)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-3)/p}\right); \ldots;\ \left(-t^{1-\alpha}_{3/p} + 2t^{1-\alpha}_{2/p} - t^{1-\alpha}_{1/p}\right);$$

$$-\frac{r_{\beta,i_\beta}}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta}\Bigg[\left(x^{1-\nu}_{i_\beta+1} - x^{1-\nu}_{i_\beta}\right); \left(-x^{1-\nu}_{i_\beta+1} + 2x^{1-\nu}_{i_\beta} - x^{1-\nu}_{i_\beta-1}\right); \ldots;$$

$$\left(-x^{1-\nu}_{4_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}}\right)\Bigg]\Bigg\} > 0,$$

$$D^{'}(P_{(\beta)}) = A(P_{(\beta)}) - \sum_{Q \in Ш'_\beta(P)} B(P_{(\beta)}, Q) = \frac{1 + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha d_\beta}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

для всех $Q \in Ш''_{\beta-1}, Q \in Ш'_\beta$,

$$\sum_{Q \in Ш''_{\beta-1}} B(P_{(\beta)}, Q) = \frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha}) > 0,$$

(28)

$$\frac{1}{D'(P_{(\beta)})}\sum_{Q \in Ш''_{\beta-1}} B(P_{(\beta)}, Q) = \frac{(2-2^{1-\alpha})}{1 + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \leqslant \frac{1}{1 + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \leqslant 1,$$

где

$$Ш'_{\left(P\left(x,t_{j+\frac{\beta}{p}}\right)\right)} = Ш'_\beta + Ш''_{\beta-1},$$

$$Ш'_\beta - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_\beta) \in Ш'_{(P(x,t_\beta))},$$

$$Ш''_{\beta-1} - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_{\beta-1}) \in Ш'_{(P(x,t_{\beta-1}))}.$$

На основании теоремы 4 ([14], гл. V. Дополнение) и в силу (28) получаем оценку:

$$\|\overset{\circ}{y}^{j+\beta/p}\|_C \leqslant p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \|\overline{\varphi}_\beta^{j+\beta/p}\|_C + \frac{(2-2^{1-\alpha})}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\|\overset{\circ}{y}^{j+\beta/p}\|_C. \tag{29}$$

Оценим $\|\overline{\varphi}_\beta^{j+\beta/p}\|_C$, где

$$\overline{\varphi}_\beta^{j+\beta/p} = \varphi_\beta^{j+\beta/p} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_{2/p}^{1-\alpha} - t_{1/p}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}^{j+(\beta-2)/p} -$$

$$-\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta-1}\left(t_{j+(\beta-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(\beta-s)/p}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}_{\bar t}^{s/p} = \varphi_\beta^{j+\beta/p} +$$

$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t_{j+\beta/p}^{1-\alpha} - t_{j+(\beta-1)/p}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}^{0} +$$

$$+\left(-t_{j+\beta/p}^{1-\alpha} + 2t_{j+(\beta-1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(\beta-2)/p}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}^{1/p} + \ldots +$$

$$+\left(-t_{3/p}^{1-\alpha} + 2t_{2/p}^{1-\alpha} - t_{1/p}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}^{j+(\beta-2)/p}\Bigg]. \tag{30}$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках положительны в силу вышеуказанной леммы из [12], то из (30) получаем оценку

$$\|\overline{\varphi}^{j+\beta/p}\|_C \leqslant \|\varphi_\beta^{j+\beta/p}\|_C + \frac{2^{1-\alpha}-1}{p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta-2}\|\overset{\circ}{y}^{j+s/p}\|_C. \tag{31}$$

С помощью (31) из (29) находим

$$\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\overset{\circ}{y}^{j+s/p}\|_C \leqslant \frac{2^{1-\alpha}-1}{1+p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)d_\beta}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta-1}\|\overset{\circ}{y}^{j+s/p}\|_C +$$

$$+\frac{p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}{1+p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)+d_{i_\beta}}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi_\beta^{j+\beta/p}\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant\beta-1}\|\overset{\circ}{y}^{j+s/p}\|_C + p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi_\beta^{j+\beta/p}\|_C. \tag{32}$$

Суммируем (32) сначала по $\beta = 1, 2, \ldots, p$, затем по $j' = 0, 1, \ldots, j$, тогда получим

$$\|\overset{\circ}{y}^{j+1}\|_C \leqslant \|\overset{\circ}{y}^{0}\|_C + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi_\beta^{j'+s/p}\|_C. \tag{33}$$

Таким образом из оценок (26) и (33) следует окончательная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \max_{0<t'\leqslant j\tau}\frac{1}{\lambda^*}\Big(\|\mu_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\mu_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\Big) +$$

$$+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi_{\beta}^{j'+s/p}\|_{C}. \tag{34}$$

Итак, справедлива

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (9) — (11) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (9) — (11) справедлива оценка (34).*

Замечание: Теорема 1 остается справедливой и при $q_{\beta}(x,t)\geqslant 0$.

Равномерная сходимость ЛОС

Задачу для погрешности z перепишем в виде:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)z_{\bar t}^{s/p}=\Lambda_{\beta}z^{j+\beta/p}+\psi_{\beta}^{j+\beta/p}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} z^{j+\beta/p}&=\widetilde{\lambda}_{-\beta}z^{(+1_{\beta})}+\psi_{-\beta}^{j+\beta/p},\ x_{\beta}=0,\\ z^{j+\beta/p}&=\widetilde{\lambda}_{+\beta}z^{(+1_{\beta})}+\psi_{+\beta}^{j+\beta/p},\ x_{\beta}=\ell_{\beta}, \end{aligned} \tag{36}$$

$$z(x,0)=0, \tag{37}$$

$$\psi_{\beta}=\overset{\circ}{\psi}_{\beta}+\overset{*}{\psi}_{\beta},\ \overset{*}{\psi}_{\beta}=O(h_{\beta}+\tau),\ \overset{\circ}{\psi}_{\beta}=O(1),$$

$$\psi=\sum_{\beta=1}^{p}\psi_{\beta}=\sum_{\beta=1}^{p}(\overset{\circ}{\psi}_{\beta}+\overset{*}{\psi}_{\beta})=\sum_{\beta=1}^{p}\overset{*}{\psi}_{\beta}=O\left(|h|+\tau\right),$$

$$\widetilde{\lambda}_{-\beta}=\frac{a^{(+1_{\beta})}}{a^{(+1_{\beta})}+h_{\beta}\lambda_{-\beta}},\ \widetilde{\lambda}_{+\beta}=\frac{a^{(N_{\beta})}}{a^{(N_{\beta})}+h_{\beta}\lambda_{+\beta}},$$

$$\psi_{-\beta}=\frac{h_{\beta}\nu_{-\beta}}{a^{(+1_{\beta})}+h_{\beta}\lambda_{-\beta}},\ \psi_{+\beta}=\frac{h_{\beta}\nu_{+\beta}}{a^{(N_{\beta})}+h_{\beta}\lambda_{+\beta}}.$$

Представим решение задачи для погрешности в виде суммы $z_{(\beta)}=v_{(\beta)}+\eta_{(\beta)}$, $z_{(\beta)}=z^{j+\beta/p}$, где $\eta_{(\beta)}$ определяется условиями

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)\eta_{\bar t}^{s/p}=\overset{\circ}{\psi}_{\beta},\ x\in\omega_h+\gamma_{h,\beta},\ \beta=\overline{1,p},$$

$$\eta(x,0)=0.$$

Также, как и в [12] доказывается, что $\eta_{(\beta)}^{j+\beta/p}=O(\tau^{\alpha})$, $\beta=1,2,\ldots,p$, $j=0,1,2,\ldots,j_0-1$.

Функция $v_{(\beta)}$ определяется условиями:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\beta/p}}v_{(\beta)}=\Lambda_{\beta}v_{(\beta)}+\widetilde{\psi}_{\beta},\ \widetilde{\psi}_{\beta}=\Lambda_{\beta}\eta_{(\beta)}+\overset{*}{\psi}_{\beta}, \tag{38}$$

$$v_{(\beta)}^{j+\beta/p}=\widetilde{\lambda}_{-\beta}v_{(\beta)}^{(+1_{\beta})}+\widetilde{\psi}_{-\beta}^{j+\beta/p},\ x_{\beta}=0, \tag{39}$$

$$v_{(\beta)}^{j+\beta/p}=\widetilde{\lambda}_{+\beta}v_{(\beta)}^{(N_{\beta})}+\widetilde{\psi}_{+\beta}^{j+\beta/p},\ x_{\beta}=\ell_{\beta}, \tag{40}$$

$$v(x,0)=0, \tag{41}$$

где

$$\widetilde{\psi}_\beta = \widetilde{\Lambda}_\beta \eta_{(\beta)} + \overset{*}{\psi}_\beta,$$
$$\widetilde{\psi}_{-\beta} = \psi_{-\beta} + \widetilde{\lambda}_{-\beta}\eta_{(\beta)}^{(+1_\beta)} - \eta_{(\beta)} = O(h_\beta + \tau^\alpha),$$
$$\widetilde{\psi}_{+\beta} = \psi_{+\beta} + \widetilde{\lambda}_{+\beta}\eta_{(\beta)}^{(N_\beta)} - \eta_{(\beta)} = O(h_\beta + \tau^\alpha),$$
$$\Lambda^{\pm}\eta_{(\beta)} = O(\tau^\alpha),$$

если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2 \partial x_\nu^2},\quad \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_\beta^2 \partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2},\ 1 \leqslant \beta, \nu \leqslant p,\ \beta \neq \nu.$$

Для оценки решения задачи (38) — (41) воспользуемся теоремой 1. Тогда получим

$$\|v^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),\ \text{где } |h| = \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta.$$

Отсюда получаем

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \|v^{j+1}\|_C + \|\eta^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right).$$

Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть задача (1) — (3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2 \partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_\beta^2 \partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2},\ 1 \leqslant \beta, \nu \leqslant p,\ \beta \neq \nu,$$

тогда решение разностной задачи (9) — (11) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1) — (3) со скоростью

$$O\left(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),\ |h| = o(\tau^{1-\alpha}),\ \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1.$$

Список литературы

[1] В.Е. Тарасов, *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка,* М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011, 568 с.

[2] А.М. Нахушев, *Уравнения математической биологии,* М.: Высшая школа, 1995, 301 с. Zbl 0991.35500

[3] К.В. Чукбар, *Стохастический перенос и дробные производные,* Ж. эксперим. и теор. физ, **108**:5(11) (1995), 1875–1884.

[4] А.Н. Олемский, А.Я. Флат, *Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды,* Успехи физ. наук., **163**:12 (1993), 1–50. MR1223887

[5] В.Л. Кобелев, Я.Л. Кобелев, Е.П. Романов, *Недебаевская релаксация и диффузия во фрактальном пространстве,* Докл. РАН, **361**:6 (1998), 755–758. MR1696065

[6] В.М. Головизнин, В.П. Кисилев, И.А. Короткин, *Численные методы решения уравнения диффузии с дробной производной в одномерном случае,*: Препринт IBRAE – 2003-12. М.: ИБРАЭ РАН, 2003, 35 с.

[7] В.М. Головизнин, В.П. Кисилев, И.А. Короткин, Ю.П. Юрков, *Прямые задачи классического переноса радионуклидов в геологических формациях,* Изв. РАН. Энергетика. **4** (2004), 121–130.

[8] Р.Р. Нигматуллин, *Дробный интеграл и его физическая интерпретация,* Теоретическая и матем. физика, **90**:3 (1992), 354–368. MR1182302

[9] А.К. Баззаев, М.Х. Шхануков-Лафишев, *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода,* ЖВМ и МФ., **50**:7 (2010), 1200–1208. MR2760444

[10] А.К. Баззаев, *Третья краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области,* Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика, **2** (2010), 5–14.

[11] А.А. Самарский, *Теория разностных схем,* 3-е изд., испр. М.: Наука, 1989. MR1196231

[12] М.М. Лафишева, М.Х. Шхануков-Лафишев, *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка,* Ж. вычисл. матем. и матем. физ, **48**:10 (2008), 1878–1887. MR2493773

[13] Ф.И. Таукенова, М.Х. Шхануков-Лафишев, *Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка,* Ж. вычисл. матем. и матем. физ, **46**:10 (2006), 1871–1881. MR2304042

[14] А.А. Самарский, А.В. Гулин, *Устойчивость разностных схем,* М.: Наука, 1973. Zbl 0304.65003

Александр Казбекович Баззаев
Владикавказский институт управления,
ул. Бородинская, 14,
362025, Владикавказ, Россия;
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44–46,
362025, Владикавказ, Россия
E-mail address: al.bazzaev@gmail.com

Игорь Дзастемирович Цопанов
Владикавказский институт управления,
ул. Бородинская, 14,
362025, Владикавказ, Россия
E-mail address: 55tsopanovid@gmail.com