S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 802–809 (2015) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2015.12.066 MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$

А.А. МАХНЕВ, Н.В. ЧУКСИНА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$. It is proved that this graph does not vertex-symmetric.

Keywords: distance-regular graph, automorphism group, antipodal cover.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$.

Makhnev A.A., Chuksina N.V., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Работа поддержана в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

Поступила 29 октября 2015 г., опубликована 6 ноября 2015 г.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Предложение 1. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра, большего* 2, *на* $v \leq 1000$ *вершинах. Если* $\lambda = 2$ *и* $\mu > 1$, *то верно одно из утверждений*:

(1) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$;

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений*

$$\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\},\ r \in \{3,4,...,21\} - \{10,16\} \quad и \quad v = 2r(r+1);$$

(3) Γ — *антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$.

Продолжается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{75,72,1;1,12,75\}$.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [2]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu \neq \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m: $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{75,72,1;1,12,75\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 75 + 450 + 6 = 532$ вершин и спектр $75^1, 5^{342}, -1^{75}, -15^{114}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda = 2$.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{75,72,1;1,12,75\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,19\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф и либо*

(*i*) $p = 19$, $\alpha_1(g) = 76$, $\alpha_2(g) = 456$ *и* $\alpha_3(g) = 0$, *либо* *(ii)* $p = 7$, $\alpha_1(g) = -42w_1 + 140t$, $\alpha_2(g) = 490 - 7w_1 - 140t$ *и* $\alpha_3(g) = 49w_1 + 42$, *либо*

(iii) $p = 2$, $\alpha_1(g) = 76 + 40s$, $\alpha_2(g) = 456 - 40s$ *и* $\alpha_3(g) = 0$;

(2) $p = 5$, *либо* $t = 1$, $s \in \{2, 7\}$, $\alpha_1(g) = 5s - 10 + 100l$ *и* $\alpha_2(g) = 535 - 5s - 100l$, *либо* $t = 6$, $s = 2$, Ω *— граф икосаэдра,* $\alpha_1(g) = 20 + 100l$ *и* $\alpha_2(g) = 470 - 100l$;

(3) $p = 3$, *либо*

(i) $s = 7$, $t = 1$, $\alpha_1(g) = 105 + 60l$ *и* $\alpha_2(g) = 420 - 60l$, *либо*

(ii) $s = 4$, $\alpha_1(g) = 14t + 76 + 60l$, $\alpha_2(g) = 456 - 21t - 60l$ *и* $t \in \{1, 4, ..., 19\}$, *либо*

(iii) $s = 1$, $\alpha_1(g) = 76 - t + 60l$, $\alpha_2(g) = 456 - 6t - 60l$, Ω *является* t*-кликой,* $t \in \{1, 4\}$;

(4) $p = 2$, *каждая вершина из* $\Gamma - \Omega$ *смежна с четным числом вершин из* Ω *и выполняется одно из следующих утверждений и либо*

(i) $s = 7$, $t = 2$, $\alpha_1(g) = 144 + 40l$, $\alpha_2(g) = 374 - 40l$, *либо*

(ii) $s = 5$, $\alpha_1(g) = 19t + 76 + 40l$, $\alpha_2(g) = 456 - 26t - 40l$ *и* $t \in \{2, 4, ..., 16\}$, *либо*

(iii) $s = 3$, $\alpha_1(g) = 9t + 76 + 40l$, $\alpha_2(g) = 456 - 16t - 40l$ *и* $t \in \{2, 4, ..., 26\}$.

Следствие 1. *Группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ *действует интранзитивно на множестве вершин.*

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathbf{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $d(u, w) = i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j \rangle$. Фактически, w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x,x^g)=j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{75,72,1;1,12,75\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 75, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 114, то $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/7-1,$$
$$\chi_3(g) = (30\alpha_0(g)-6\alpha_1(g)+\alpha_2(g)-5\alpha_3(g))/140.$$

Если $|g|=p$ — простое число, то $\chi_2(g)-75$ и $\chi_3(g)-114$ делятся на p. Если $|g|=p^2$, p — простое число, то p^2 делит $\chi_3(g^p)-114$.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 342 & 114/5 & -19/5 & -57 \\ 75 & -1 & -1 & 75 \\ 114 & -114/5 & 19/5 & -19 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (75\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)+75\alpha_3(g))/532$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=532-\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/7-1$.

Далее, $\chi_3(g)=(6\alpha_0(g)-6\alpha_1(g)/5+\alpha_2(g)/5-\alpha_3(g))/28$.

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1-2 [4]. Лемма доказана.

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{75,72,1;1,12,75\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что $p^3_{22}=375$.

З а м е ч а н и е. Если g фиксирует антиподальный класс K и $a\in\Omega$, то K пересекает Ω, а если Ω пересекает антиподальные классы K,L, то $|K\cap\Omega| = |L\cap\Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L\cap\Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K\cap\Omega$, поэтому $|K\cap\Omega| \le |L\cap\Omega|$. Симметрично, $|L\cap\Omega|\le|K\cap\Omega|$.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*

(1) *$p=19$, $\alpha_1(g)=76$, $\alpha_2(g)=456$ и $\alpha_3(g)=0$;*

(2) *$p=7$, $\alpha_1(g)=-42w_1+140t$, $\alpha_2(g)=490-7w_1-140t$ и $\alpha_3(g)=49w_1+42$;*

(3) *$p=2$, $\alpha_1(g)=76+40s$, $\alpha_2(g)=456-40s$ и $\alpha_3(g)=0$.*

Доказательство. Так как $v=4\cdot19\cdot7$, то $p=2,7$ или 19.

Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_3(g)=7l$.

Пусть $p=19$. Тогда $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=532$, $\chi_3(g)=(-6\alpha_1(g)+\alpha_2(g))/140$, поэтому $\alpha_1(g)=76$, $\alpha_2(g)=456$.

Пусть $p=7$. Тогда $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=532-7l$, $\chi_3(g)=(-6\alpha_1(g)+\alpha_2(g)-35l)/140=(-\alpha_1(g)+76-6l)/20$ и $\chi_3(g)$ сравнимо с 2 по модулю 7. Поэтому

$\alpha_1(g) = 36 - 6l + 140t$ и $l = 7w_1 + 6$. Отсюда $\alpha_1(g) = -42w_1 + 140t$, $\alpha_3(g) = 49w_1 + 42$, $\alpha_2(g) = 490 - 7w_1 - 140t$. В случае $\alpha_3(g) = v$ получим $w_1 = 10$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 532$, $\chi_3(g) = (-6\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/140 = (-\alpha_1(g) + 76)/20$. Отсюда $\alpha_1(g) = 76 + 40s$ и $\alpha_2(g) = 456 - 40s$. Лемма доказана.

В леммах 3–5 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 11$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Кроме того, при $p > 2$ имеем $\lambda_\Omega = 2$. Далее будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Пусть F — антиподальный класс, содержащий вершину a. Тогда $F \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$.

Лемма 3. *Число p не больше* 5.

Доказательство. Пусть $t = 1$. Тогда p делит 75 и $p = 3, 5$.

Пусть $p > 5$, $\alpha_1(g) = pw_1$. Тогда $t > 1$, $s = 7$, $|\Omega| = 7t$, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $76 - t$. Если $s = 7$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна ровно с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 12$. Если $p > 11$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 4, 1; 1, 12, t - 1\}$, противоречие. Значит, либо $t = 10, p = 11$, либо $t = 6, p = 7$.

Если $t = 10$, то $p = 11$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^\perp$ и по вершине из $[a_2], ..., [a_7]$. Отсюда Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 1, 9\}$. Но дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 1, 9\}$ не существует, так как он имеет собственные значения с нецелыми кратностями.

Если $t = 6$, то $p = 7$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^\perp$ и по 5 вершин из $[a_2]$,..., $[a_7]$, противоречие.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $p = 5$, то либо $t = 1$, $s \in \{2, 7\}$, $\alpha_1(g) = 5s - 10 + 100l$ и $\alpha_2(g) = 535 - 5s - 100l$, либо $t = 6$, $s = 2$, Ω — граф икосаэдра, $\alpha_1(g) = 20 + 100l$ и $\alpha_2(g) = 470 - 100l$;*

(2) *если $p = 3$, то либо*

(*i*) *$s = 7$, $t = 1$, $\alpha_1(g) = 105 + 60l$ и $\alpha_2(g) = 420 - 60l$, либо*

(*ii*) *$s = 4$, $\alpha_1(g) = 14t + 76 + 60l$, $\alpha_2(g) = 456 - 21t - 60l$ и $t \in \{1, 4, ..., 19\}$, либо*

(*iii*) *$s = 1$, $\alpha_1(g) = 76 - t + 60l$, $\alpha_2(g) = 456 - 6t - 60l$, Ω является t-кликой, $t \in \{1, 4\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда любой антиподальный класс пересекает Ω по 2 или 7 вершинам и t сравнимо с 1 по модулю 5.

Заметим, что $\mu_\Omega \in \{2, 7, 12\}$, $\lambda_\Omega = 2$. Далее, $\alpha_3(g) = t(7 - s)$, поэтому $\chi_2(g) = t - 1$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 532 - 7t$ и $\chi_3(g) = (30st - 7\alpha_1(g) + 532 - 7t - 5t(7 - s))/140 = (5st - 6t - \alpha_1(g) + 76)/20$. Отсюда $(5st - 6t - \alpha_1(g) + 76)/20$ сравнимо с 4 по модулю 5, $5st - 6t - \alpha_1(g) + 76 = 20(4 - 5l)$, $\alpha_1(g) = 5st - 6t - 4 + 100l$ и $\alpha_2(g) = 536 - t - 5st - 100l$.

Если $s = 7$, то $\alpha_1(g) = 29t - 4 + 100l$ и $\alpha_2(g) = 536 - 36t - 100l$. Далее, $t \leq 12$ и $t \in \{1, 6, 11\}$. Если $t > 1$, то для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^\perp$ и по две вершины из $[a_2], ..., [a_7]$, поэтому $t - 1 \geq 3 + 12$, противоречие.

Если $s = 2$, то $\alpha_1(g) = 4t - 4 + 100l$ и $\alpha_2(g) = 536 - 11t - 100l$, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $2t(76 - t)$, но не больше $12(532 - 7t)$, поэтому $t \leq 42$ и $t \in \{1, 6, ..., 41\}$. Если $t > 1$, то для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^{\perp}$ и $t-4$ вершины из $[a_2]$, поэтому $t-1 \leq 15$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t-1, t-4, 1; 1, t-4, t-1\}$. Так как $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(t-1, 2, \lambda', 1)$, то $t = 6$ и Ω — граф икосаэдра.

Пусть $p = 3$. Тогда любой антиподальный класс пересекает Ω по 1, 4 или 7 вершинам и t сравнимо с 1 по модулю 3.

Заметим, что $\mu_\Omega \in \{3, 6, 9, 12\}$, $\lambda_\Omega = 2$. Далее, $\alpha_3(g) = t(7-s)$, поэтому $\chi_2(g) = t-1$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = 532-7t$ и $\chi_3(g) = (30st-7\alpha_1(g)+532-7t-5t(7-s))/140 = (5st-6t-\alpha_1(g)+76)/20$. Отсюда $5st-6t-\alpha_1(g)+76$ делится на 60, $\alpha_1(g) = 5st-6t+76+60l$ и $\alpha_2(g) = 456-t-5st-60l$.

Если $s = 7$, то $\alpha_1(g) = 29t+76+60l$ и $\alpha_2(g) = 456-36t-60l$, как и выше, $t \leq 12$ и $t \in \{1, 4, 7, 10\}$. Если $t > 1$, то вершина u, смежная с u^g, смежна не более чем с 2 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_1(g) = 29t+76+60l = 0$, противоречие.

Если $s = 4$, то $\alpha_1(g) = 14t+76+60l$ и $\alpha_2(g) = 456-21t-60l$, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно $4t(76-t)$, но не больше $12(532-7t)$, поэтому $t \leq 21$ и $t \in \{1, 4, ..., 19\}$. В случае $t = 4$ граф Ω является объединением четырех изолированных 4-клик.

Если $s = 1$, то $\alpha_1(g) = 76-t+60l$, $\alpha_2(g) = 456-6t-60l$, Ω является t-кликой, $t \in \{1, 4\}$.

Лемма 5. *Если $p = 2$, то каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$s = 7$, $t = 2$, $\alpha_1(g) = 134+40l$, $\alpha_2(g) = 384-40l$;*

(2) *$s = 5$, $\alpha_1(g) = 19t+76+40l$, $\alpha_2(g) = 456-26t-40l$ и $t \in \{2, 4, ..., 16\}$;*

(3) *$s = 3$, $\alpha_1(g) = 9t+76+40l$, $\alpha_2(g) = 456-16t-40l$ и $t \in \{2, 4, ..., 26\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда $s \in \{1, 3, 5, 7\}$ и t четно. Заметим, что $\mu_\Omega \in \{2, 4, ..., 12\}$, $\lambda_\Omega \in \{0, 2\}$ и любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω.

Так как $\alpha_3(g) = t(7-s)$, то $\chi_2(g) = t-1$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = 532-7t$ и $\chi_3(g) = (30st-7\alpha_1(g)+532-7t-5t(7-s))/140 = (5st-6t-\alpha_1(g)+76)/20$. Отсюда $5st-6t-\alpha_1(g)+76$ делится на 40, $\alpha_1(g) = 5st-6t+76+40l$ и $\alpha_2(g) = 456-t-5st-40l$.

Если $s = 7$, то $\alpha_1(g) = 29t+76+40l$ и $\alpha_2(g) = 456-36t-40l$. В случае $t \geq 4$ имеем $\alpha_1(g) = 0$, противоречие. Поэтому $t = 2$.

Если $s = 5$, то $\alpha_1(g) = 19t+76+40l$ и $\alpha_2(g) = 456-26t-40l$, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно $5t(76-t)$, но не больше $12(532-7t)$, поэтому $t \leq 16$ и $t \in \{2, 4, ..., 16\}$.

Если $s = 3$, то $\alpha_1(g) = 9t+76+40l$ и $\alpha_2(g) = 456-16t-40l$, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно $3t(76-t)$, но не больше $12(532-7t)$, поэтому $t \leq 28$ и $t \in \{2, 4, ..., 28\}$. Если $t = 28$, то для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^{\perp}$ и по 12 вершин из $[a_2], [a_3]$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 12, 27\}$, противоречие с тем, что кратность некоторого собственного значения этого графа не целая.

Если $s = 1$, то $\alpha_1(g) = 76-t+40l$, $\alpha_2(g) = 456-6t-40l$, Ω является t-кликой, $t \in \{2, 4\}$. Противоречие с тем, что любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

3. Граф с массивом пересечений $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ не является вершинно симметричным

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Если K — абелева подгруппа из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, транзитивная на каждом антиподальном классе и p — простой делитель r, то по [5, лемма 4] число $p = 7$ делит $k + 1 = 76$, противоречие. Таким образом, G действует точно на множестве антиподальных классов. Через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий вершину x.

Лемма 6. *Пусть g — элемент порядка 19 из G. Тогда*

(1) *G не содержит элементов порядка 76 и $19p$, p — простое число, $2 < p < 19$;*

(2) *если инволюция $h \in G$ централизует g, то $\mathrm{Fix}(h)$ — пустой граф, $\alpha_1(h) = 76$, $\alpha_2(h) = 456$ и $\alpha_3(h) = 0$;*

(3) *если $N_G(\langle g\rangle)$ содержит подгруппу T порядка 8, $T_0 = T \cap C_G(g)$, то T содержит единственную инволюцию τ, имеющую неподвижные точки на Γ.*

Доказательство. Пусть G содержит подгруппу $\langle f\rangle$ порядка $19p$, p — простое число, меньшее 19, $h = f^{19}$, $g = f^p$. Ввиду теоремы $\mathrm{Fix}(h)$ — пустой граф и либо $p = 7$, $\alpha_3(h) = 532$, либо $p = 2$, $\alpha_1(h) = 76$, $\alpha_2(h) = 456$ и $\alpha_3(h) = 0$. Но в первом случае группа $\langle h\rangle$ транзитивна на каждом антиподальном классе, противоречие.

Если $e^2 = h$, то $\chi_3(h) = 0$ и $\chi_3(h) - 114$ не делится на 4, противоречие. Значит, G не содержит элементов порядка 76.

Пусть T — подгруппа порядка 8 из $N_G(\langle g\rangle)$ и $T_0 = T \cap C_G(g)$. Тогда T — элементарная абелева группа и $T_0 = \langle h_1, h_2\rangle$ — четверная группа. Из действия T на $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$ следует, что T_0 содержится в A_4 при дейстии на четырех $\langle g\rangle$-орбитах из U, а некоторая инволюция $\tau \in T - T_0$ фиксирует каждую $\langle g\rangle$-орбиту на U (и имеет не менее 4 неподвижных точек на U). Пусть $\mathrm{Fix}(\tau)$ пересекает t антиподальных классов по s точкам. Ввиду теоремы имеем $s = 3$ и $t \in \{4, 12, 20\}$ или $s = 5$ и $t \in \{4, 12\}$.

Пусть Σ — множество $T_0\langle g\rangle$-орбит на Γ. Тогда $|\Sigma| = 7$, длина каждой орбиты из Σ равна 76 и орбита содержит 0 или t вершин из $\mathrm{Fix}(\tau)$. Отсюда на Γ имеется точно $7-s$ регулярных T-орбит. Пусть Δ — орбита из Σ, пересекающая $\mathrm{Fix}(\tau)$. Тогда среди T_0-орбит на Δ имеется $t/4$ орбит, попадающих в $\mathrm{Fix}(\tau)$ и $(76 - t)/4$ орбит, переставляемых τ. Отсюда T содержит единственную инволюцию, имеющую неподвижные точки на Γ. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия. Ввиду леммы 6 имеем $O_p(G) = 1$ для $p \in \{7, 19\}$. Пусть $Q = O_2(G) \neq 1$. Тогда $|Q : Q_a|$ делит 4 и Q_a фиксирует вершину $b \in [a]$. Если $F = F(a)$, то Q_a индуцирует подгруппу из S_6 на $F - \{a\}$, поэтому $|Q_a : Q_F|$ делит 16 и для любой инволюции $h \in Q_F$ имеем $\mathrm{Fix}(h) = F \cup F(b)$ и $\alpha_1(h) = 134+40l$. Отсюда $|Q_F| \leq 2$ и $|Q| \leq 2^7$. Из действия подгруппы порядка 19 на Q следует, что $|Q| \leq 4$.

Пусть $\bar{G} = G/Q$, $\bar{S}$ — цоколь группы $\bar{G}$. Так как $\pi(\bar{S}) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 19\}$, то ввиду [6, таблица 1] группа $\bar{S}$ изоморфна $L_3(7), U_3(8), L_4(7)$. В силу теоремы $|G|$ не делится на 49, поэтому $\bar{S} \cong U_3(8)$. Противоречие с тем, что группа $U_3(8)$ не содержит максимальных подгрупп индекса, делящего $76 \cdot 7$. Следствие доказано.

References

[1] В.П. Буриченко, А.А. Махнев, *О вполне регулярных локально циклических графах*, Современные проблемы математики. Тезисы 42 Всероссийской молодежной конференции. ИММ УрО РАН, Екатеринбург 2011, 181–183.

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1989. MR1002568

[3] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambridge University Press, Cambridge. MR1721031

[4] А.Л. Гаврилюк, А.А. Махнев, *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Доклады академии наук, **432**:5 (2010), 512–515. MR2766516

[5] А.А. Махнев А.А., Д.В. Падучих, Л.Ю. Циовкина, *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с* $\lambda = \mu$, Доклады академии наук, **448**:1 (2013), 22–26. MR3088563

[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean Electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 4,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Natalya Vladimirovna Chuksina
Ural Federal University,
str. Mira, 15,
620000, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru