S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 12, стр. 810–817 (2015)* УДК 512.552.18
DOI 10.17377/semi.2015.12.067 MSC 16P10

# КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА, НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРАФЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ОДНОРОДНЫМИ

А.С. КУЗЬМИНА, Ю.Н. МАЛЬЦЕВ

Abstract. We describe all associative finite rings with regular, complete and bipartite nilpotent graphs.

**Keywords:** associative ring, finite ring, nilpotent graph, regular graph, complete graph, bipartite graph.

## 1. Введение

*Графом делителей нуля* $\Gamma(R)$ *произвольного кольца* $R$ называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины $x, y$ соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Одним из направлений исследований в этой области стало описание колец, граф делителей нуля которых удовлетворяет определенному условию. Полностью описаны конечные ассоциативные кольца с планарными графами делителей нуля [1, 2, 3, 4]. Описаны конечные ассоциативные кольца, имеющие эйлеровы графы делителей нуля [5] и конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля [6]. Кроме того, в статье [7] приведено описание конечных ассоциативных колец с однородными графами делителей нуля.

В работах [8, 9, 10, 11, 12] изучается нильпотентный граф кольца. Введем определение нильпотентного графа кольца. Пусть $R$ – произвольное ассоциативное кольцо и $N(R)$ – множество нильпотентных элементов кольца $R$. Вершинами нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ кольца $R$ являются элементы множества

Kuzmina, A.S., Maltsev, Yu.N., Finite rings with regular nilpotent graphs.



Работа проведена в рамках задания № 2014/418 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

*Поступила 25 сентября 2015 г., опубликована 14 ноября 2015 г.*

$Z_N(R)^* = \{x \in R\backslash\{0\} \mid (\exists y \in R\backslash\{0\})(xy \in N(R))\}$, при этом две различные вершины $x, y \in Z_N(R)^*$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy \in N(R)$. Легко видеть, что если $(xy)^n = 0$, то $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = 0$. Данное определение было введено в работе [9]. В работах [8, 9, 10, 11, 12] исследуются свойства нильпотентного графа матричных, регулярных (в смысле фон Неймана) колец, некоторых классов коммутативных колец (стоит отметить, что в работе [8] в качестве вершин нильпотентного графа рассматривались все элементы кольца). Из определений следует, что граф делителей нуля $\Gamma(R)$ является подграфом нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$.

Цель настоящей работы — описать конечные ассоциативные кольца, нильпотентный граф которых является однородным, двудольным или полным.

## 2. Основные результаты

Введем обозначения и понятия, используемые в настоящей работе.

Пусть аддитивная группа кольца $R$ разлагается в прямую сумму своих ненулевых аддитивных подгрупп $A_i, i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$. Если все $A_i$ являются двусторонними идеалами кольца $R$, то кольцо $R$ называют *разложимым*, и пишут $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Через $J(R)$ мы будем обозначать радикал Джекобсона кольца $R$ [14, с. 73].

Для простого числа $p$ будем полагать, что $GF(p^n)$ — поле из $p^n$ элементов, $N_{0,p} = \langle a \rangle, pa = 0, a^2 = 0\ (a \neq 0)$, и

$$A_p = \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_p^0 = \begin{pmatrix} GF(p) & 0 \\ GF(p) & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathbb{Z}_n$ мы будем обозначать кольцо классов вычетов по модулю $n$, а через $F^*$ — группу обратимых элементов поля $F$. Символом $GL(n, F)$ мы обозначим группу невырожденных матриц $n$-го порядка над полем $F$.

Кольцо всех квадратных матриц $n$-го порядка с коэффициентами из кольца $R$ обозначим через $M_n(R)$. Символами $e_{ij}$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, обозначим матричные единицы кольца $M_n(R)$, если кольцо $R$ содержит единицу, а символом $A = (a_{ij})$ – матрицу из кольца $M_n(R)$, у которой на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца стоит элемент $a_{ij} \in R$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Количество элементов в конечном множестве $A$ мы будем обозначать через $|A|$.

*Полным $n$–вершинным графом* $K_n$ называется граф (без петель и кратных ребер), все $n$ вершин которого смежны между собой. Предполагается, что граф, состоящий из одной вершины и при этом не имеющий ребер, является полным. *Двудольный граф* $G$ – это граф, множество вершин $V$ которого можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества $V_1$ и $V_2$ таким образом, что каждое ребро графа $G$ соединяет вершины из разных подмножеств. Если двудольный граф $G$ содержит все ребра, соединяющие множества $V_1$ и $V_2$, то этот граф называется *полным двудольным*. Полные двудольные графы обозначаются $K_{n,m}$, где $n = |V_1|$ и $m = |V_2|$. Если все вершины графа имеют одну и ту же степень, то граф называется *однородным* [13, с. 19]. Подчеркнем, что пустой граф мы будем считать однородным. Степень вершины $v$ графа мы будем обозначать символом $\rho(v)$. Граф $K_{1,m}$ называется *звездой*.

**Предложение 1.** *Пусть $R$ – произвольное ненулевое ассоциативное конечное кольцо, не являющееся полем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *граф* $\Gamma_N(R)$ *является полным, причем все ненулевые элементы кольца* $R$ *являются вершинами графа* $\Gamma_N(R)$;
(2) *кольцо* $R$ *является нильпотентным.*

*Доказательство.* Если $R$ – нильпотентное кольцо, то граф $\Gamma_N(R)$ является полным и все ненулевые элементы кольца $R$ являются вершинами графа $\Gamma_N(R)$. Обратно, пусть $\Gamma_N(R)$ является полным и все ненулевые элементы кольца $R$ являются вершинами графа $\Gamma_N(R)$. Предположим, что кольцо $R$ не является нильпотентным. Тогда в кольце $R$ существует ненулевой идемпотент $e$ [14, с. 31]. Рассмотрим пирсовское разложение кольца $R$ (см. [14, с. 32]):

$$R = eRe \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e).$$

Докажем, что $eR(1-e) = (1-e)Re = (1-e)R(1-e) = (0)$. Пусть, например, $eR(1-e) \neq (0)$ и $a = ex(1-e) \neq 0$, где $x \in R$. Заметим, что элемент $y = e + a$ отличен от $e$ и вершина $y$ не смежна с вершиной $e$. Противоречие с тем, что все ненулевые элементы кольца $R$ являются вершинами полного графа $\Gamma_N(R)$. Следовательно, $eR(1-e) = (0)$. Аналогично доказывается, что $(1-e)Re = (1-e)R(1-e) = (0)$, причем при доказательстве того факта, что $(1-e)R(1-e) = (0)$, существенно используется условие, что все ненулевые элементы кольца $R$ являются вершинами графа $\Gamma_N(R)$. Таким образом, $R = eRe$ и любой идемпотент кольца $R$ является его единицей, т. е. кольцо $R$ содержит единственный идемпотент $e$, который совпадает с единицей. Далее, если $2e \neq 0$, то в силу того, что все ненулевые элементы из $R$ являются вершинами нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$, то $e(-e)$ является нильпотентным элементом; противоречие. Следовательно, $2e = 0$, т.е. кольцо $R$ является $\mathbb{Z}_2$-алгеброй. По теореме Веддербарна —Мальцева (см. [14])

$$R \cong M_{n_1}(GF(2^{m_1})) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(GF(2^{m_s})) \dotplus J(R).$$

Мы ранее доказали, что кольцо $R$ не содержит нетривиальных идемпотентов. Поэтому $R \cong GF(2^m) \dotplus J(R)$. Пусть $a$ — ненулевой элемент из $J(R)$. Поскольку все ненулевые элементы кольца $R$ являются вершинами графа $\Gamma_N(R)$, то $e(e+a)$ является нильпотентным элементом. С другой стороны, элемент $e+a$ является обратимым [14, с. 13]; противоречие. Таким образом, $R \cong GF(2^m)$. Это противоречит условию предложения. $\square$

**Теорема 1.** *Пусть* $R$ *– ненулевое ассоциативное конечное кольцо, причем* $R$ *не является полем и* $R \ncong GF(q) \oplus GF(q)$, *где* $GF(q)$ *— произвольное конечное поле. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *кольцо* $R$ *является нильпотентным*;
(2) $\Gamma_N(R)$ *является полным графом*;
(3) $\Gamma_N(R)$ *является однородным графом.*

*Доказательство.* Достаточно доказать, что если граф $\Gamma_N(R)$ является однородным, то кольцо $R$ нильпотентное. Рассмотрим следующие случаи.

**Случай 1.** $J(R) = (0)$.

По теореме Веддербарна (см. [14]) получаем, что $R \cong B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$, где $B_i = M_{n_i}(GF(q_i))$, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Предположим, что $n_1 = \ldots = n_s = 1$. Тогда $R = \oplus_{i=1}^s GF(q_i)$ и $\Gamma_N(R) = \Gamma(R)$. Из работы [7] следует, что $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$;

противоречие. Пусть, например, $n_s \geq 2$. Обозначим через $m_i$ число нильпотентных элементов в кольце $B_i$, $1 \leq i \leq s$. Если $s \geq 2$, то $\rho(1) = m_1 m_1 \dots m_s - 1$. Рассмотрим элемент $a = (\underbrace{1, 1, \dots, 1,}_{s-1} 0) \in R$. Имеем, что $\rho(a) = m_1 \dots m_{s-1} \cdot |B_s| - 1$. Поскольку граф $\Gamma_N(R)$ однородный, то $\rho(1) = \rho(a)$. Следовательно, $|B_s| = m_s$, чего быть не может. Таким образом, далее мы можем полагать, что $s = 1$ и $R \cong M_n(GF(q))$. Предположим, что $n = 2$. Покажем, что в этом случае нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ не является однородным. Заметим, что $\rho(1)$ – это число всех нильпотентных матриц в кольце $M_n(GF(q))$. Каждая ненулевая нильпотентная матрица сопряжена с матрицей $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим $H = \{A \in GL(2, GF(q)) \mid Ae_{12} = e_{12}A\}$. Тогда

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in GF^*(q), b \in GF(q) \right\}.$$

Следовательно, число различных матриц, сопряженных с $e_{12}$, равно индексу подгруппы $H$ в $GL(2, GF(q))$, т. е. числу $\dfrac{(q^2-1)(q^2-q)}{(q-1)q} = q^2 - 1$. С другой стороны, множество вершин графа $\Gamma_N(R)$, смежных с $e_{11}$, совпадает со множеством ненулевых матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in GF(q) \right\}$, т. е. $\rho(e_{11}) = q^3 - 1$. Поскольку граф $\Gamma_N(R)$ однородный, то $\rho(1) = \rho(e_{11})$, или $q^2 - 1 = q^3 - 1$; противоречие. Значит, $n \neq 2$. Рассмотрим теперь случай, когда $n \geq 3$. Заметим, что множество вершин, смежных с $e_{11}$, совпадает с множеством ненулевых матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in GF(q), 1 \leq i, j \leq n \right\}.$$

Поэтому $\rho(e_{11}) = q^{n^2-1} - 1$. А множество вершин, смежных с матрицей $e_{11} + e_{22}$, совпадает со множеством ненулевых матриц $(a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, для которых матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является нильпотентной. Ранее мы вычислили количество таких матриц. Таким образом,

$$\rho(e_{11} + e_{22}) \leq ((q^2 - 1) + 1)q^{n^2-4} - 1 = q^{n^2-2} - 1.$$

Поскольку граф $\Gamma_N(R)$ однородный, то

$$\rho(e_{11}) = q^{n^2-1} - 1 = \rho(e_{11} + e_{22}) \leq q^{n^2-2} - 1.$$

Получили противоречие. Следовательно, полупростых колец, не изоморфных $GF(q)$ и $GF(q) \oplus GF(q)$ и имеющих однородный нильпотентный граф, не существует.

**Случай 2.** Кольцо $R$ содержит единицу и $J(R) \neq (0)$.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $a \in J(R)$. Тогда

$$\rho(a) = |R| - 2.$$

С другой стороны, $\rho(1)$ – это число ненулевых нильпотентных элементов. Поскольку граф $\Gamma_N(R)$ является однородным, то $R = \{0, 1, a_1, \dots, a_k\}$, где $a_i$ – нильпотентный элемент для любого $i \in \{1, \dots, k\}$. Рассмотрим элемент $1 + a_1$.

Он является обратимым [14, с. 13]. Поскольку других обратимых элементов в кольце $R$, кроме единицы не существует, то мы пришли к противоречию, которое доказывает, что этот случай не возможен.

**Случай 3.**

Кольцо $R$ не содержит единицу, $J(R) \neq (0)$ и $J(R) \neq R$. Заметим, что в этом случае каждый элемент кольца $R$ является делителем нуля [14, с. 11], т. е. все ненулевые элементы кольца являются вершинами графа $\Gamma_N(R)$. Пусть $e$ — идемпотент кольца $R$, являющийся прообразом единицы в фактор-кольце $R/J(R)$ при естественном гомоморфизме $R \longrightarrow R/J(R)$ [14, с. 94]. Тогда

$$R = eRe \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e),$$

и, кроме того, $eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e) \subseteq J(R)$ (см. [14, с. 32, 76]). Обозначим $a = |eRe|$, $b = |eR(1-e)|$, $c = |(1-e)Re|$ и $d = |(1-e)R(1-e)|$. Поскольку кольцо $R$ не содержит единицу, то

$$eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e) \neq (0),$$

т. е. $bcd \geq 2$. Пусть $x$ — произвольный ненулевой элемент из $J(R)$. Тогда получаем, что $\rho(x) = |R| - 2 = abcd - 2$. Предположим, что $b \geq 2$. Тогда для любого ненулевого элемента $y = ez(1-e) \in eR(1-e)$ имеем, что вершины $e+y$ и $e$ не являются смежными. Однако, в силу того, что граф $\Gamma_N(R)$ является однородным, $\rho(e) = \rho(x) = |R| - 2$; противоречие. Значит, $b = 1$ и $eR(1-e) = (0)$. Аналогично доказывается, что $(1-e)Re = (1-e)R(1-e) = (0)$, т. е. $R = eRe$; противоречие. Следовательно, этот случай также не возможен.

Таким образом, если кольцо $R$ не является полем и $R \ncong GF(q) \oplus GF(q)$, а его нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ является однородным, то $R = J(R)$, т. е. $R$ — нильпотентное кольцо. □

**Теорема 2.** *Нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ конечного ассоциативного кольца $R$ является однородным тогда и только тогда, когда либо $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$, либо $R \cong GF(q)$, либо кольцо $R$ является нильпотентным.*

*Доказательство.* Пусть граф $\Gamma_N(R)$ является однородным. Если $R$ не изоморфно конечному полю и прямой сумме двух одинаковых конечных полей, то по теореме 1 кольцо $R$ является нильпотентным. Обратное утверждение следует из теоремы 1 и работы [7]. □

**Следствие 1.** *Нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ конечного ассоциативного кольца $R$ является полным тогда и только тогда, когда либо $R \cong GF(2) \oplus GF(2)$, либо $R \cong GF(q)$, либо кольцо $R$ является нильпотентным.*

*Доказательство.* Если $R$ – нильпотентное кольцо, то $\Gamma(R)$ – полный граф. Если $R \cong GF(2) \oplus GF(2)$, то $\Gamma_N(R) = \Gamma(R) = K_2$. Если $R \cong GF(q)$, то граф $\Gamma_N(R)$ является пустым графом. Докажем обратное утверждение. По теореме 2 кольцо $R$ является либо нильпотентным, либо конечным полем, либо $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$. В последнем случае, если $q \geq 3$ и $\alpha, \beta$ – различные ненулевые элементы поля $GF(q)$, то вершины $(\alpha, 0)$ и $(\beta, 0)$ графа $\Gamma_N(R)$ не являются смежными; противоречие. Следовательно, $q = 2$ и $R \cong GF(2) \oplus GF(2)$. □

В работах [9, 10] описываются конечные коммутативные и конечные регулярные (в смысле фон Неймана) кольца, нильпотентные графы которых являются звездами. Следующая теорема дает полное описание конечных колец, у которых нильпотентные графы являются двудольными.

**Теорема 3.** *Нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ конечного ассоциативного кольца $R$ является двудольным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) $R \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$;
(2) $R \cong N_{0,3}$;
(3) $R \cong GF(q) \oplus N_{0,2}$;
(4) $R \cong \mathbb{Z}_4$;
(5) $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$;
(6) $R \cong A_2$;
(7) $R \cong A_2^0$.

*Доказательство.* Пусть граф $\Gamma_N(R)$ конечного ассоциативного кольца $R$ является двудольным. Для доказательства рассмотрим следующие случаи.

**Случай 1.** $J(R) = (0)$.

В этом случае $R \cong \oplus_{i=1}^t M_{n_i}(GF(q_i))$ [14]. Докажем, что $n_i = 1$ для всех значений $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Действительно, если, например, $n_1 \geq 2$, то вершины $e_{11}, e_{12}$ и $e_{22}$ графа $\Gamma_N(R)$ образуют цикл длины три; противоречие. Следовательно, $n_1 = n_2 = \ldots = n_t$ и $R \cong \oplus_{i=1}^t GF(q_i)$. Предположим, что $t \geq 3$. Тогда вершины $(1, 0, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, и $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ графа $\Gamma_N(R)$ образуют цикл длины три, чего быть не может. Значит, $R \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ или $R \cong GF(q)$. Однако, поскольку граф $\Gamma_N(R)$ является двудольным, то $R \ncong GF(q)$.

**Случай 2.** $J(R) \neq (0)$.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $a \in J(R)$. Тогда вершина $a$ графа $\Gamma_N(R)$ смежна со всеми ненулевыми элементами кольца $R$ и, значит, одна из долей граф $\Gamma_N(R)$ состоит ровно из одной вершины $a$. Поэтому полный двудольный граф $\Gamma_N(R)$ является звездой, т. е. $\Gamma_N(R) = K_{1,n}$ для некоторого натурального числа $n$. Более того, в кольце $R$ не существует ортогональных идемпотентов. Действительно, если $e_1, e_2$ – ортогональные идемпотенты кольца $R$, то вершины $e_1, e_2, a$ графа $\Gamma_N(R)$ образуют треугольник, чего быть не может. Т. е., либо $R = J(R)$, либо $R/J(R)$ является конечным полем [15, с. 54]. Если $|J(R)| \geq 4$, то граф $\Gamma_N(R)$ содержит цикл длины три; противоречие. Следовательно, $|J(R)| \leq 3$. Если $|J(R)| = 3$, то $R = J(R)$ (иначе граф $\Gamma_N(R)$ содержит цикл длины три, чего быть не может), т. е. $\Gamma_N(R) = K_{1,1}$ и $R \cong N_{0,3}$ [14, с. 53]. Поэтому далее мы можем считать, что $J(R) = \{0, a\}$. В этом случае $R \neq J(R)$, иначе $\Gamma_N(R)$ состоит только из одной вершины, что противоречит условию теоремы. Поэтому, в силу доказанного выше, $R/J(R)$ является полем.

Пусть кольцо $R$ является разложимым, т.е. $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_t$, где $t \geq 2$. Если $t \geq 3$, то вершины $(x, 0, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, y, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 0, z, 0, \ldots, 0)$ графа $\Gamma_N(R)$, где $x, y, z$ – ненулевые элементы подколец $R_1, R_2, R_3$ соответственно, графа $\Gamma_N(R)$ образуют цикл длины три, чего быть не может. Следовательно, $t = 2$ и $R = R_1 \oplus R_2$. Если $a \notin R_1 \cup R_2$, то вершины $a, x, y$, где $x, y$ – ненулевые элементы подколец $R_1, R_2$ соответственно, образуют цикл длины три; противоречие. Следовательно, мы можем считать, что, например, $a \in R_1$. Аналогично доказывается, что $R_1 = \{0, a\}$ и в кольце $R_2$ не существует ненулевых делителей нуля, т. е. $R_2$ является конечным полем и, значит, $R \cong N_{0,2} \oplus GF(q)$.

Рассмотрим теперь случай, когда кольцо $R$ является неразложимым. Докажем, что в этом случае $R \cdot J(R) \neq (0)$ или $J(R) \cdot R \neq (0)$. Если в кольце $R$ существует единица, то все доказано. Предположим, что в кольце $R$ нет единицы.

Возьмем главный идемпотент $e$ кольца $R$, т. е. идемпотент, являющийся прообразом единицы в фактор-кольце $R/J(R)$ [14, с. 94]. Рассмотрим пирсовское разложение кольца $R$: $R = eRe \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e)$. Поскольку $eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e) \subseteq J(R)$ [14, с. 76] и $|J(R)| = 2$, то $J(R)$ совпадает с одной из пирсовских компонент $eR(1-e), (1-e)Re, (1-e)R(1-e)$. Кольцо $R$ неразложимое, поэтому $(1-e)R(1-e) = (0)$. Значит, имеет место один из вариантов: либо $R = eRe \dotplus eR(1-e)$, $J(R) = eR(1-e)$, либо $R = eRe \dotplus (1-e)Re$, $J(R) = (1-e)Re$. В первом случае $R \cdot J(R) \neq (0)$, а во втором случае $J(R) \cdot R \neq (0)$. Таким образом, поскольку $J(R)^2 = (0)$, имеем, что $J(R)$ является векторным пространством над полем $R/J(R)$, т.е. $|R/J(R)| \leq |J(R)|$. Следовательно, $|R| \leq 4$. Поскольку кольцо $R$ неразложимое и ненильпотентное, а $|J(R)| = 2$, то получаем $|R| = 4$. Поэтому $R$ изоморфно или кольцу $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/(x^2), A_2$ или кольцу $A_2^0$ [14, с. 54].

Обратное утверждение теоремы следует из результатов работы [6]. □

**Следствие 2.** *Пусть $R$ — ненулевое ассоциативное конечное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $\Gamma_N(R)$ *является двудольным графом*;
(2) $\Gamma_N(R)$ *является полным двудольным графом.*

*Доказательство.* Если граф $\Gamma_N(R)$ является двудольным графом, то кольцо $R$ изоморфно одному из колец из условия теоремы 3. Нетрудно убедиться, что все кольца из условия теоремы 3 имеют полные двудольные нильпотентные графы. Обратное утверждение очевидно. □

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

## References

[1] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When a zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, J.Algebra, **270**:1 (2003), 169–180. MR2016655

[2] R. Belshoff, J. Chapman, *Planar zero-divisor graphs*, J. Algebra, **316**:1 (2007), 471–480. MR2354873

[3] A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev, *Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Asian-European J. Math., **1**:4 (2008), 565–574. MR2474188

[4] A.S. Kuzmina, *On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs*, Discretnaya Matematika, **4** (2009), 60–75 (in Russian). MR2641018

[5] A.S. Kuzmina, *Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs*, J. of Algebra and Its Appl., **11**:3 (2012), 551–559. MR2928123

[6] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296**:2 (2006), 462–479. MR2201052

[7] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with some restrictions on zero-divisor graphs*, Izvestiya vyzov. Matematika, **12** (2014), 49–59. Zbl 06415953

[8] P. Chen, *A kind of graph structure of rings*, Alg. Colloquium, **10**:2 (2003), 229–238. MR1980442

[9] A. Li, Q. Li, *A kind of graph structure on non-reduced rings*, Alg. Colloquium, **17**:1 (2010), 173–180. MR2589755

[10] A. Li, Q. Li, *A kind of graph structure on von-Neumann regular rings*, Int. J. of Algebra, **4**:6 (2010), 291–302. MR2652245

[11] M.J. Nikmehr, S. Khojasteh, *On the nilpotent graph of a ring*, Turkish J. of Math., **37** (2013), 553–559. MR3070932

[12] A. Mahmoodi, *Nilpotent graphs of matrix algebras*, J. of Alebraic Structures and Their Appl., **1**:2 (2014), 123–132.
[13] R. Diestel, *Graph theory*, Novosibirsk, 2002 (in Russian).
[14] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Moscow, Gelios–ARV, 2006 (in Russian).
[15] N. Jacobson, *Structure of rings*, AMS, **37**, 1968.

Anna S. Kuzmina, Yurii N. Maltsev
Altai State Pedagogical University,
55, Molodeghnaya st.,
Barnaul, Russia, 656031
*E-mail address*: akuzmina1@yandex.ru, maltsevyn@gmail.com