S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 818–831 (2015) УДК 512.567
DOI 10.17377/semi.2015.12.068 MSC 06B15

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИСТРИБУТИВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТОК РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУГРУПП И ГРУППОИДОВ

А.Л. ПОПОВИЧ

Abstract. В работе доказано, что всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы, а также некоторого группоида, удовлетворяющего тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$.

We prove that every distributive algebraic spatial lattice is isomorphic to the congruence lattice of some semigroup and also of some groupoid with zero satisfying identities $x^2 = 0$ and $xy = yx$..

Keywords: congruence lattice, semigroup, groupoid, spatial lattice.

1. Введение

Класс всех решеток, являющихся решетками конгруэнций универсальных алгебр, был охарактеризован в работе Гретцера и Шмидта [5] как класс всех алгебраических решеток. Однако до сих пор не охарактеризован класс решеток, являющихся решетками конгруэнций группоидов. Из работы Фриза, Лэмпа и Тейлора [2] следует, что существует модулярная алгебраическая решетка, которая не представима решеткой конгруэнций никакой алгебры с конечной сигнатурой. Однако, если потребовать, чтобы наибольший элемент алгебраической решетки был компактным, то такая решетка всегда представима как решетка конгруэнций некоторого группоида (см. [9]).

Popovich, A.L., Representation of distributive algebraic spatial lattices by congruence lattices of semigroups and groupoids.

Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства образования и науки РФ), поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и РФФИ (грант 14-01-00524) .

Поступила 13 июля 2015 г., опубликована 14 ноября 2015 г.

В настоящее время остается открытым следующий вопрос: *всякая ли дистрибутивная алгебраическая решетка L изоморфна решетке конгруэнций подходящего группоида и, более того, полугруппы?*

Известно, что если компактные элементы L образуют подрешетку, то L изоморфна решетке конгруэнций некоторого группоида (см. [13] и замечание в [10]). Кроме того, в работе Ружички, Тумы и Верунга [12], было установлено, что любая дистрибутивная алгебраическая решетка, мощность множества компактных элементов которой не выше $\aleph_1$, изоморфна решетке нормальных делителей некоторой группы (очевидно, что решетка нормальных делителей группы G является решеткой конгруэнций G, рассматриваемой как группоид). В этой же работе показано, что существует дистрибутивная алгебраическая решетка мощности $\aleph_2$, которая не изоморфна решетке нормальных делителей никакой группы.

Следуя книге [3], назовем ненулевой элемент a решетки L *вполне неразложимым*, если для любого $X \subseteq L$ из того, что $a = \bigvee X$, следует, что $a \in X$. Если P — некоторое частично упорядоченное множество, то подмножество $A \subseteq P$ называется *наследственным*, если из того, что $x \in A$ и $y \leqslant x$, вытекает $y \in A$. Решетка называется *пространственной* (*spatial*), если всякий ее элемент есть объединение вполне неразложимых элементов. Решетка называется *биалгебраической*, если она вместе со своей двойственной решеткой являются алгебраическими. Класс дистрибутивных алгебраических пространственных решеток хорошо изучен, факты о нем собраны в следующей теореме.

Теорема. *Для решетки L следующие условия эквивалентны*:

1) *L дистрибутивная, алгебраическая и пространственная*;

2) *L дистрибутивная и биалгебраическая*;

3) *L алгебраическая и удовлетворяет тождеству*

$$x \vee (\bigwedge\{y_i : i \in I\}) = \bigwedge\{(x \vee y_i) : i \in I\},$$

которое в классе полных решеток эквивалентно двойственному тождеству

$$x \wedge (\bigvee\{y_i : i \in I\}) = \bigvee\{(x \wedge y_i) : i \in I\},$$

для любых I;

4) *L изоморфна решетке наследственных подмножеств некоторого частично упорядоченного множества*;

5) *L изоморфна решетке непустых наследственных подмножества некоторого частично упорядоченного множества с нулем*;

6) *L изоморфна решетке подалгебр некоторой алгебры, имеющей только унарные операции*;

7) *L изоморфна алгебраической решетке подмножеств, в которой объединение любой совокупности множеств является ее теоретико-множественным объединением и пересечение любой совокупности множеств является ее теоретико-множественным пересечением.*

Эквивалентность тождеств, описанная в 3) — известный результат фон Неймана (см. [3], лемма 162). Эквивалентность 3) и 7) следует из теоремы 166 в [3]. Эквивалентность 7) и 2) описана в [6] (лемма 2.18). Из условия 7) легко вывести условие 1) (в качестве неразложимых элементов выступают пересечения всех подмножеств, содержащих фиксированный элемент). Из 1) следует 4) и 5) (которые, очевидно, эквиваленты), как показано в лемме 1 ниже. Из условия

4) легко вытекает условие 7). Эквивалентность условий 1) и 6) — результат Йонсона и Сейфера [7] (см. также [8], теорема 3.8.7).

Напомним, что идеалом в группоиде G называется подмножество $I \subseteq G$ с тем свойством, что если $a \in I$ и $x \in G$, то $ax \in I$ и $xa \in I$. Совокупность всех идеалов относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения вложения образует дистрибутивную алгебраическую пространственную решетку. В работе [1] Эш показал, что всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке идеалов некоторой инверсной полугруппы. Отметим, что если I – идеал в группоиде G, то мы можем определить конгруэнцию ρ_I по правилу: для любых $x, y \in G$ имеем $(x, y) \in \rho_I$, если $x, y \in I$ или $x = y$. Конгруэнции вида ρ_I, для некоторого идеала I, называются *рисовскими.*

Мы докажем следующий результат.

Теорема 1. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторого группоида, удовлетворяющего тождествам $xy = yx$ и $x^2 = 0$, причем все конгруэнции этого группоида рисовские.*

Теорема 2. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы, причем все конгруэнции этой полугруппы рисовские.*

Отметим, что полугруппы, в которых все конгруэнции являются рисовскими, уже изучались ранее. В частности, в работе [15] классифицированы циклические полугруппы, полурешетки и клиффордовы полугруппы с таким свойством.

Доказательства теорем содержатся в пункте 3. В пункте 2 описаны основные конструкции и доказаны вспомогательные утверждения.

2. Вспомогательные результаты

Мы будем следовать книге [3] и обозначать полурешетку компактных элементов полной решетки L через $\operatorname{Comp} L$, а частично упорядоченное множество всех вполне неразложимых элементов решетки L через $\operatorname{Ji} L$. В дистрибутивной алгебраической пространственной решетке выполняются тождества бесконечной дистрибутивности (см. теорему во введении), поэтому в ней всякий вполне неразложимый элемент компактен, то есть $\operatorname{Ji} L \subseteq \operatorname{Comp} L$ для всякой решетки L указанного типа.

Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество (ч.у.м.). Напомним, что подмножество $I \subseteq P$ называется *наследственным*, если из $a \in I$ и $b \leqslant a$ следует, что $b \in I$. Через $\operatorname{Down} P$ обозначим ч.у.м. всех наследственных подмножеств P, упорядоченных относительно теоретико-множественного включения. Известно, что $\operatorname{Down} P$ – дистрибутивная решетка. Через $\operatorname{Down}_{\mathrm{fin}} P$ будем обозначать множество всех наследственных подмножеств A, в которых существует конечное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ элементов из A таких, что для любого $y \in A$ выполняется $y \leqslant x_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Down}_{\mathrm{fin}}(P)$ является $\cup$-полурешеткой с нулем, где в качестве нуля выступает пустое подмножество.

Лемма 1. *Пусть L — дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка.*

1. $\operatorname{Comp} L \cong \operatorname{Down}_{\mathrm{fin}} \operatorname{Ji} L$.
2. $L \cong \operatorname{Down} \operatorname{Ji} L$.
3. $\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *и* $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *для любого семейства* X_α, $\alpha \in \Lambda$.

Доказательство леммы с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 107 из книги [3].

Пусть G – группоид с нулем и P – ч.у.м. с наименьшим элементом 0. *Идеальной* на G назовем функцию $\rho : G \to P$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\rho(0) = 0$,
2. $\rho(xy) \leqslant \rho(x)$, $\rho(xy) \leqslant \rho(y)$.

Будем говорить, что идеальная функция $\rho : G \to P$ *отделяет ноль*, если из того, что $\rho(x) = 0$, следует, что $x = 0$.

Предложение 1. *Пусть* G *— группоид с нулем,* P *— ч.у.м. с нулем и* $\rho : G \to P$ *— идеальная функция. Пусть* $a, b \in G$ *такие, что* $\rho(a) \geqslant \rho(b)$. *Тогда существуют группоид* $\tilde{G}$ *с нулем и идеальная функция* $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to P$ *такие, что*

1) G *является подгруппоидом* $\tilde{G}$;

2) $\tilde{\rho}|_G = \rho$;

3) *существует такой элемент* $u \in \tilde{G}$, *что* $au = b$ *и* $xu = 0$ *для любого* $x \in G$, $x \neq a$.

Более того, если G *удовлетворяет тождествам* $x^2 = 0$ *и* $xy = yx$, *то и* $\tilde{G}$ *можно выбрать таким.*

Доказательство. Пусть u – некоторый элемент, не входящий в G. Положим $\tilde{G} = G \cup \{u\}$. Доопределим в $\tilde{G}$ операцию умножения, полагая $ua = au = b$, $u^2 = 0$ и $xu = ux = 0$ для $x \in G \backslash \{a\}$. Элемент 0, как видно, будет нулем и в $\tilde{G}$.

Положим $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)$, если $x \in G$ и $\tilde{\rho}(u) = \rho(a)$. Таким образом, $\tilde{\rho}$ есть функция из $\tilde{G}$ в P. Проверим, что $\tilde{\rho}$ является идеальной функцией. Если $x, y \in G$, то $\tilde{\rho}(xy) = \rho(xy) \leqslant \rho(x) = \tilde{\rho}(x)$. Аналогично, $\tilde{\rho}(xy) \leqslant \tilde{\rho}(y)$. Далее, $\tilde{\rho}(ua) = \tilde{\rho}(au) = \tilde{\rho}(b) = \rho(b) \leqslant \rho(a) = \tilde{\rho}(a) = \tilde{\rho}(u)$. Неравенства $\tilde{\rho}(ux) = \tilde{\rho}(xu) = 0 \leqslant \tilde{\rho}(x)$ и $\tilde{\rho}(ux) = \tilde{\rho}(xu) = 0 \leqslant \tilde{\rho}(u)$ выполнены, очевидно, для всех $x \in G \backslash \{a\}$. Наконец, $\tilde{\rho}(uu) = 0 \leqslant \tilde{\rho}(u)$. Следовательно, $\tilde{\rho}$ является идеальной функцией.

В итоге $\tilde{G}$ и $\tilde{\rho}$ – искомые группоид и идеальная функция. Из построения видно, что если G удовлетворяет тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$, то и $\tilde{G}$ им удовлетворяет. □

Предложение 2. *Пусть* G *– группоид с нулем, удовлетворяющий тождествам* $x^2 = 0$ *и* $xy = yx$, P *— ч.у.м. с нулем и* $\rho : G \to P$ *– идеальная функция, отделяющая ноль. Тогда существуют группоид с нулем* $\tilde{G}$, *удовлетворяющий тождествам* $x^2 = 0$ *и* $xy = yx$, *и идеальная функция* $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to P$, *отделяющая ноль, такие, что* $G \subseteq \tilde{G}$, $\tilde{\rho}|_G = \rho$ *и*

1. *Для любого* $x \in \tilde{G}$ *существует* $u \in \tilde{G}$ *такой, что* $xu = x$ *и* $yu = 0$ *для всех* $y \in \tilde{G} \backslash \{x\}$.
2. *Для любых* $x, y \in \tilde{G}$ *таких, что* $\tilde{\rho}(x) \geqslant \tilde{\rho}(y)$, *существует* $v \in \tilde{G}$ *такой, что* $xv = y$.

Доказательство. Мы построим последовательность $(G_i, \rho_i, X_i, \gamma_i)$, где $0 \leqslant i < \infty$, такую, что

G_i – группоид с нулем, удовлетворяющий тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$;

ρ_i — идеальная функция $G_i \to P$;

X_i — некоторое вполне упорядоченное множество пар элементов из G_i, имеющее порядковый тип γ_i.

При этом для любого $0 \leqslant i \leqslant \infty$ будут выполнены следующие свойства:

1) G_i является подгруппоидом с нулем G_{i+1};

2) ограничение ρ_{i+1} на G_i совпадает с ρ_i;

3) $X_i = \{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \rho_i(a_\alpha) \geqslant \rho_i(b_\alpha)$ для всех $\alpha < \gamma_i\}$;

4) для любого $a \in G_i$ существует $u \in G_{i+1}$ такой, что $au = a$ и $bu = 0$ для всех $b \in G_i \backslash \{x\}$;

5) для любых $a, b \in G_i$ таких, что $\rho_i(a) \geqslant \rho_i(b)$, существует $v \in G_{i+1}$ такой, что $xv = y$.

Положим $G_0 = G$, $\rho_0 = \rho$. Определим $X_0 = \{(x, y) \in G_0^2 \mid \rho_0(x) \geqslant \rho_0(y)\}$. Зададим на X_0 произвольный полный порядок, а его порядковый тип обозначим через γ_0. Предположим теперь, что для некоторого неотрицательного i уже построены группоид G_i, функция $\rho_i : G_i \to P$ и множество $X_i \subseteq G_i^2$.

Для каждого ординала $\alpha < \gamma_i$ построим по индукции группоиды G_i^α и идеальные отображения ρ_i^α следующим образом:

1. $G_i^0 = G_i$, $\rho_i^0 = \rho_i$.

2. Для каждого ненулевого непредельного ординала $\alpha < \gamma_i$ в качестве G_i^α и ρ_i^α возьмем расширения, полученные по предложению 1 из группоида $G_i^{\alpha-1}$, идеальной функции $\rho_i^{\alpha-1}$ и пары $(a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1})$ из множества X_i.

3. Для каждого предельного ординала $\alpha < \gamma_i$ положим $G_i^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_i^\beta$ и $\rho_i^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \rho_i^\beta$.

Положим теперь $G_{i+1} = \bigcup_{\alpha<\gamma_i} G_\alpha$ и $\rho_{i+1} = \bigcup_{\alpha<\gamma_i} \rho_\alpha$. Также определим $X_{i+1} = \{(a, b) \in G^{i+1} \backslash G^i \mid \rho_{i+1}(a) \geqslant \rho_{i+1}(b)\}$. Зададим произвольный полный порядок на X_{i+1}, а его порядковый тип обозначим через γ_{i+1}.

Искомая последовательность построена.

Положим $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^\infty G_i$ и $\tilde{\rho} = \bigcup_{i=1}^\infty \rho_i$. В общем случае $\tilde{\rho}$ необязательно отделяет ноль. Рассмотрим множество I_0 в $\tilde{G}$, составленное из элементов $x \in \tilde{G}$ таких, что $\rho(x) = 0$. Нетрудно заметить, что I_0 – идеал в $\tilde{G}$. Пусть ρ_{I_0} – рисовская конгруэнция, соответствующая I_0. Рассмотрим фактор $\bar{G} = \tilde{G}/\rho_{I_0}$ и естественный гомоморфизм $f : \tilde{G} \to \bar{G}$. Отображение f инъективно на множестве $\tilde{G} \setminus I_0$. Определим идеальную функцию $\bar{\rho} : \bar{G} \to P$ по правилу $\bar{\rho}(x) = \tilde{\rho}(f^{-1}(x))$ для $x \in \bar{G} \setminus \{0\}$ и $\bar{\rho}(0) = 0$. Ясно, что $\bar{\rho}$ отделяет ноль. Заметим также, что поскольку ρ отделяет ноль, G является подгруппоидом $\bar{G}$.

Нетрудно проверить, что выполнение условий предложения для $\bar{G}$ и $\bar{\rho}$ обеспечено условиями 1)–5) построенной последовательности. □

Далее мы докажем аналоги предложений 1 и 2 для случая полугрупп. Отметим, что предложение 3, соответствующее предложению 1, имеет гораздо более сложное доказательство, которое включает в себя леммы 2–7.

Пусть $S, \tilde{S}$ – некоторые полугруппы, $h : S \to \tilde{S}$ – вложение и $\rho : S \to P$ – идеальная функция. Определим функцию $h(\rho) : h(S) \to P$ по правилу $h(\rho)(x) = \rho(h^{-1}(x))$. Нетрудно убедиться, что $h(\rho)$ будет идеальной функцией.

Предложение 3. *Пусть S – полугруппа с нулем 0_S и $\rho : S \to P$ — идеальная функция, отделяющая ноль. Пусть $a, b \in S$ такие, что $\rho(a) \geqslant \rho(b)$ и $a \neq 0$. Тогда существуют полугруппа с нулем $\tilde{S}$ и идеальная функция $\tilde{\rho} : \tilde{S} \to P$ такие, что*

1) *существует вложение* $h : S \to \tilde{S}$, *отделяющее ноль*;

2) $\tilde{\rho}|_{h(S)} = h(\rho)$;

3) *существуют элементы* $u, v \in \tilde{S}$ *такие, что* $uav = b$ *и* $uxv = 0$ *для всех* $x \in S \backslash \{a\}$.

Пусть F — полугруппа с нулем 0_F, порожденная двумя элементами u и v и заданная соотношением $uv = 0$. Рассмотрим свободное произведение полугрупп S и F. Профакторизуем его по конгруэнции $\Theta(0_F, 0_S)$, которая, как нетрудно заметить, является рисовской. Полученную полугруппу обозначим через T. Класс, содержащий нули S и F, будет нулем в T. Обозначим его через 0. Прочие одноэлементные классы мы будем отождествлять с теми элементами, которые в них содержатся. Договоримся также считать, что элемент 0 является элементом полугруппы S. Элементы T будем называть *словами.* Количество различных вхождений подслов u и v в слово t будем называть *весом* слова t, считая при этом по определению вес элемента 0 равным 0. Таким образом, слова веса 0 суть элементы полугруппы S. Мы также будем рассматривать пустое слово 1, полагая $1t = t1 = t$ для всех элементов из T. Полугруппу T с присоединенным пустым словом будем обозначать T^1, то же касается и рассматриваемых ниже подполугрупп полугруппы T.

Рассмотрим конгруэнцию Θ на полугруппе T, порожденную парами (uav, b), $(uxv, 0)$ для всех $x \in S \backslash \{a\}$. Положим $\tilde{S} = T/\Theta$.

Следующая лемма есть следствие известного результата А. И. Мальцева (см., например, [4], гл. 1, §10, теорема 3).

Лемма 2. *Если* $c, d \in T$ *и* $(c, d) \in \Theta$, *то существуют натуральное* n *и элементы* $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots c_n, d_n \in T$ *такие, что выполняются следующие условия*:

1) $c = c_1$ *и* $d_n = d$;

2) $d_i = c_{i+1}$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant n - 1$;

3) *для каждого* $1 \leqslant i \leqslant n$ *выполняется* $(c_i, d_i) = (e_i y_i f_i, e_i z_i f_i)$, *где* e_i, f_i — *подходящие слова из* T^1, *и* $z_i, y_i \in T$ *такие, что либо* $\{z_i, y_i\} = \{uav, b\}$, *либо* $\{z_i, y_i\} = \{uxv, 0\}$ *для некоторого* $x \in S \setminus \{a\}$.

Число n из леммы 2 мы будем называть *длиной* последовательности

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots c_n, d_n.$$

Заметим, что в последовательности, описанной в лемме 2, для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ если $c_i \neq 0$ и $(y_i, z_i) = (b, uav)$, то $d_i \neq 0$. Грубо говоря, при замене подслова b на подслово uav не появляется подслов вида uv, которые по определению F равны 0.

Лемма 3. *Любые два различных элемента* c *и* d *полугруппы* S *попадают в разные* Θ-*классы.*

Доказательство. Предположим, что c, d — различные элементы полугруппы S и $(c, d) \in \Theta$. По лемме 2 существуют натуральное n и последовательность элементов $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots c_n, d_n \in T$ для которых выполняются условия 1)–3) леммы 2. Мы докажем наше утверждение индукцией по длине этой последовательности.

При $n = 1$ мы получаем, что одно из слов, например c, представимо в виде $euxvf$ для подходящих $e, f \in T$ и $x \in S$. Так как $c \in S$, это возможно только при $c = 0$, из чего следует, что либо $e = 0$, либо $x = 0$, либо $f = 0$. Но из условия 3) леммы 2 следует, что $d = eyf$, где $y = b$ при $x = a$ или $y = 0$ при $x \in S \setminus \{a\}$. Так как $a \neq 0$, получаем $d = 0$.

Предположим теперь, что $n > 1$ и утверждение выполнено при длине последовательности меньшей n. Мы будем считать, что все элементы

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n$$

различны.

Элементы c и d различны, поэтому хотя бы один из них, например c, не равен 0. Следовательно, в слове $c_1 = c$ нет подслов u и v. Тогда $c_1 = e_1y_1f_1$ и $d_1 = e_1uz'_1vf_1$, где $e_1, f_1 \in S$ и либо $y_1 = b$ и $z'_1 = a$, либо $y_1 = 0$ и $z'_1 \in S \setminus \{a\}$. Предположим теперь, что при всех $1 < i < k$ слова d_i имеют вид $e'_iuz'_ivf'_i$, где $(e'_i, e_1), (f'_i, f_1), (z'_i, z'_1) \in \Theta$, а слово d_k в таком виде уже не представимо (поскольку $d_n = d \in S$, такое k найдется). Имеем $c_k = d_{k-1} = e'_{k-1}uz'_{k-1}vf'_{k-1}$, с другой стороны, из 3) следует, что $c_k = e_ky_kf_k$. Нетрудно видеть, что требуемое ограничение на d_k выполняется только при $e_k = e'_{k-1}$, $f_k = f'_{k-1}$ и $y_k = uz'_{k-1}v$. Следовательно, d_k имеет вид $e_kz_kf_k$, где $z_k = b$ или $z_k = 0$. Из предположения индукции следует, что $z'_{k-1} = z'_1$, откуда $y_1 = z_k$. Вычеркнем теперь из слова c_1 подслово y_1, из всех слов c_i при $1 < i \leqslant k$ и d_i при $1 \leqslant i < k$ соответствующие подслова uz'_iv. Мы снова получим цепочку слов, удовлетворяющих условиям 1)–3), но при этом в новой цепочке $c'_1, d'_1, c'_2, d'_2, \ldots c'_n, d'_n \in T$ мы имеем $c'_1 = d'_1 = c'_2$. Это позволяет сократить последовательность слов и воспользоваться шагом индукции, т.е. получить $c'_1 = d'_n$, а значит и в старой цепочке $c_1 = d_n$, что влечет $c = d$. □

Из леммы 3 вытекает, что S изоморфно вкладывается в $\tilde{S}$, причем при вложении ноль полугруппы S переходит в ноль $\tilde{S}$.

Слово $r \in T$ назовем *редуцированным*, если $r = 0$ либо r не содержит подслов вида uxv, где $x \in S$. Отметим, что любое подслово ненулевого редуцированного слова вновь является редуцированным.

Всякое ненулевое слово p полугруппы T имеет вид $x_1f_1x_2f_2x_3 \ldots x_nf_nx_{n+1}$, где $x_i \in S$ при $2 \leqslant i \leqslant n$, $x_1, x_{n+1} \in S^1$, $f_i \in F$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом каждое слово f_i ненулевое, следовательно, имеет вид $v^{s_i}u^{t_i}$ для некоторых неотрицательных s_i, t_i. Если p редуцированное, то оно имеет вид

$$p = y_1v^{k_1}y_2v^{k_2} \ldots y_mv^{k_m}xu^{l_1}z_1u^{l_2}z_2 \ldots u^{l_n}z_n,$$

где k_i, l_i – неотрицательные натуральные числа, $y_i, z_j \in S$ при $2 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $y_1, x, z_n \in S^1$.

В полугруппе T рассмотрим подполугруппу V, порожденную словами вида v и xv для ненулевых $x \in S$, и подполугруппу U порожденную словами u и ux для ненулевых $x \in S$. Отметим, что каждая из полугрупп V и U порождается свободно. Из предыдущих рассуждений следует, что всякое ненулевое редуцированное слово $p \in T$ имеет вид $p = p_vxp_u$, где $p_v \in V^1$, $p_u \in U^1$ и $x \in S^1$.

Лемма 4. *В каждом классе разбиения Θ существует единственное редуцированное слово.*

Доказательство. Существование хотя бы одного редуцированного слова в произвольном Θ-классе очевидно: последовательной заменой подслов uxv на 0 или на b, в зависимости от значения $x \in S$, мы можем получить слово, не содержащее таких подслов, или 0, при этом не выходя за рамки Θ-класса. Далее мы покажем единственность редуцированного слова в Θ-классе θ.

Случай 1. Пусть θ содержит 0. Тогда 0 является редуцированным словом в классе θ. Покажем, что все ненулевые слова из класса θ редуцированными не являются. Пусть p – ненулевое редуцированное слово и $(p, 0) \in \Theta$. По лемме 2 это означает, что существуют натуральное n и последовательность элементов $c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_n, d_n \in T$, для которых выполняются условия $p = c_1$, $d_n = 0$ и условия 2)–3) леммы 2. Мы будем доказывать утверждение индукцией по длине этой последовательности.

Пусть $n = 1$. В силу замечания после леммы 2 имеем $p = euxvf$, где $e, f \in T$, $x \in S$ и либо $x \neq a$, либо $e, f \in S$ и $ebf = 0$. Оба варианта противоречат тому, что p редуцированное. Далее мы будем считать, что утверждение доказано для всех слов с длиной соответствующей последовательности меньшей n. Без ограничения общности можно считать, что все элементы этой последовательности различны.

Так как c_1 редуцировано, оно не содержит подслов вида uxv для $x \in S$. Следовательно, $(c_1, d_1) = (e_1bf_1, e_1uavf_1)$. Найдется такой номер k, что при всех $1 < i \leqslant k-1$ слова d_i имеют вид $e'_i uz'_i vf'_i$, где $(e'_i, e_1), (f'_i, f_1), (z'_i, a) \in \Theta$ и либо $k = n$, либо $k < n$ и d_k в таком виде уже не представимо.

Пусть $k = n$. Тогда $c_n = d_{n-1} = e'_{n-1}uz'_{n-1}vf'_{n-1}$ – ненулевое слово, а $d_n = 0$. С учетом замечания после леммы 2, имеем один из следующих случаев:

1) $d_n = e'_n uz'_{n-1}vf'_{n-1}$, где $(e'_{n-1}, e'_n) \in \Theta$ и $e'_n = 0$;

2) $d_n = e'_{n-1}uz'_{n-1}vf'_n$, где $(f'_{n-1}, f'_n) \in \Theta$ и $f'_n = 0$;

3) $d_n = e'_{n-1}0f'_{n-1}$.

В случае 1) вычеркнем из c_1 подслово b, а из слов $d_1, c_2, d_2, \ldots, c_{n-1}, d_n$ соответствующее подслово $uz'_{n-1}v$. Поскольку c_1 было редуцированным, в нем не было подслов вида uxv для $x \in S$, следовательно, после вычеркивания нулевым оно не станет, а значит останется ненулевым редуцированным словом. При этом длина соответствующей последовательности слов стала короче. Из предположения индукции следует, что слово c_1 с вычеркнутым b не является редуцированным, а значит и c_1 таковым не является. Случай 2) разбирается аналогично.

В случае 3) мы получаем, что $z'_{n-1} \in S$, но $z'_{n-1} \neq a$ и $(z'_{n-1}, a) \in \Theta$, что противоречит лемме 3.

Пусть теперь $k < n$ и d_k не представимо в указанном выше виде. Имеем $c_k = d_{k-1} = e'_{k-1}uz'_{k-1}vf'_{k-1}$, с другой стороны, из условия 3) леммы 2 следует, что $c_k = e_k y_k f_k$. Нетрудно видеть, что требуемое ограничение на d_k выполняется только при $e_k = e'_{k-1}$, $f_k = f'_{k-1}$ и $y_k = uz'_{k-1}v$. Следовательно, d_k имеет вид $e_k z_k f_k$, где $z_k = b$. По лемме 3 имеем $z'_{k-1} = z'_1$, откуда $y_1 = z_k$. Далее мы повторим описанную выше процедуру вычеркивания и вновь получим противоречие с предположением индукции.

Случай 2. Пусть θ не содержит 0. Пусть r_1 и r_2 – два различных редуцированных слова из класса θ. Поскольку $(r_1, r_2) \in \Theta$, по лемме 2 существуют натуральное n и последовательность $c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n$ такая, что выполняются условия $r_1 = c_1$, $d_n = r_2$ и условия 2)-3) из леммы 2. При этом можно считать, что все элементы этой последовательности различны.

Мы будем доказывать утверждение индукцией по n. При $n = 1$ мы получаем, что либо $c_1 = r_1$, либо слово $d_1 = r_2$ содержит подслово uav, что противоречит тому, что r_1 и r_2 редуцированы. Далее мы будем считать, что утверждение доказано для всех слов с длинной соответствующей последовательности меньшей n.

Так как c_1 редуцировано, оно не содержит подслов вида uxv для $x \in S$. Следовательно, $(c_1, d_1) = (e_1bf_1, e_1uavf_1)$. Предположим теперь, что при всех $1 < i \leqslant k-1$ слова d_i имеют вид $e'_iuz'_ivf'_i$, где $(e'_i, e_1), (f'_i, f_1), (z'_i, a) \in \Theta$ и d_k в таком виде уже не представимо.

Имеем $c_k = d_{k-1} = e'_{k-1}uz'_{k-1}vf'_{k-1}$, с другой стороны, $c_k = e_ky_kf_k$. Нетрудно видеть, что требуемое ограничение на d_k выполняется только при $e_k = e'_{k-1}$, $f_k = f'_{k-1}$ и $y_k = uz'_{k-1}v$. Следовательно, d_k имеет вид e_kbf_k. Вычеркнем из $c_1 = e_1bf_1$ подслово b, а из $d_1, c_2, d_2, \ldots, c_{n-1}, d_n$ соответствующее подслово $uz'_{n-1}v$. Поскольку c_1 было редуцированным, в нем не было подслов вида uxv для $x \in S$, следовательно, после вычеркивания нулевым оно не станет, а значит e_1f_1 – ненулевое редуцированное слово. При этом длина соответствующей последовательности слов стала короче. Из предположения индукции следует, что одно из слов e_1f_1 и r_2 не является редуцированным, а значит одно из слов r_1 и r_2 не является редуцированным. $\square$

Пусть $\theta \in \tilde{S}$. Обозначим через $red(\theta)$ редуцированное слово класса θ. Из леммы 4 следует корректность такого определения. Если $r \in T$, то через $red(r)$ будем обозначать редуцированное слово того класса, которому принадлежит r.

Зададим отображения $f : V \to S$ и $g : U \to S$ индуктивно по весу слова следующим образом:

1) $f(v) = b$ и $g(u) = b$;

2) для любого $x \in S$ определим $f(xv) = b$, если x делит a справа и $f(xv) = xb$, если x не делит a справа;

для любого $x \in S$ определим $g(ux) = b$, если x делит a слева и $g(ux) = bx$, если x не делит a слева;

3) Если $p \in V$ и $p = p_1p_2$ для некоторых $p_1, p_2 \in V$, то определим $f(p) = f(f(p_1)p_2)$;

если $q \in U$ и $q = q_1q_2$ для некоторых $q_1, q_2 \in U$, то определим $g(q) = g(q_1g(q_2))$.

Так как полугруппа U свободна, всякий элемент раскладывается в произведение элементов базиса U единственным образом. Пусть для элемента q это разложение имеет вид $q_1q_2\ldots q_n$. Нетрудно заметить, что тогда

$$g(q) = g(q_1g(q_2g(\ldots q_{n-1}g(q_n))\ldots)),$$

из чего следует корректность определения функции g. Корректность f проверяется аналогично.

Пусть p – ненулевое редуцированное слово. Как было отмечено выше, p представимо в виде p_vxp_u, где $p_v \in V^1$, $p_u \in U^1$ и $x \in S^1$. Определим $\overline{p} = f(p_v)xg(p_u)$. Также положим $\overline{0} = 0$. Ясно, что $\overline{p} \in S$.

Заметим, что если $p \in V$, то $\overline{p} = f(p)$, если $p \in U$, то $\overline{p} = g(p)$, а если $p \in S$, то $\overline{p} = p$.

Положим $\tilde{\rho}(\theta) = \rho(\overline{red(\theta)})$. Таким образом, $\tilde{\rho}$ есть отображение $\tilde{S}$ в P. Далее мы покажем, что $\tilde{S}$ и $\tilde{\rho}$ являются искомыми полугруппой и идеальной функцией. Как уже было замечено выше, отображение $h : x \mapsto \theta[x]$ есть вложение S в

$\tilde{S}$ с сохранением нуля, следовательно условие 1) предложения 3 выполнено. Далее, для $x \in S$ редуцированным словом в классе $\theta[x]$ будет x. Из этого следует, что $\tilde{\rho}(\theta[x]) = \rho(\overline{x}) = \rho(x)$, откуда $\tilde{\rho}|_{h(S)} = h(\rho)$, а значит условие 2) выполнено. Теперь заметим, что $\theta[u]\theta[a]\theta[v] = \theta[uav] = \theta[b]$ и $\theta[u]\theta[x]\theta[v] = \theta[uxv] = \theta[0]$ для всех $x \in S \setminus \{a\}$. С учетом того, как устроено вложение S в $\tilde{S}$, это означает выполнение условия 3) предложения 3.

Осталось показать, что $\tilde{\rho}$ является идеальной функцией, этому посвящены следующие три леммы.

Заметим, что если p – некоторое редуцированное слово, $q \in S^1U^1$ и $r \in V^1S^1$, то слова pq и rp также редуцированные.

Лемма 5. *Пусть p – редуцированное слово, $q \in S^1U^1$ и $r \in V^1S^1$. Тогда $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ и $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{rp})$.*

Доказательство. Мы проверим первое неравенство, второе проверяется аналогично.

Поскольку q представимо в виде $x_1u^{k_1}x_2u^{k_2}\ldots x_nu^{k_n}x_{n+1}$, где $k_1, \ldots, k_n$ — положительные натуральные числа и $x_i \in S^1$ при $1 \leqslant i \leqslant n+1$, достаточно доказать предложение для случая, когда $q = u$ или $q = x$ для некоторого $x \in S$. Действительно, в этом случае мы получим

$$\rho(\overline{px_1u^{k_1}\ldots u^{k_n}x_{n+1}}) \leqslant \rho(\overline{px_1u^{k_1}\ldots u^{k_n}}) \leqslant \rho(\overline{px_1u^{k_1}\ldots u^{k_n-1}}) \leqslant \ldots \leqslant \rho(\overline{p}).$$

Более того, если $p = p_vxp_u$, где $p_v \in V^1$, $p_u \in U^1$ и $x \in S^1$, то

$$\rho(\overline{pu}) = \rho(\overline{p_vxp_uu}) = \rho(f(p_v)xg(p_uu) = \rho(f(p_v)xg(p_ug(u))$$
$$= \rho(f(p_v)xg(p_ub)) = \rho(\overline{p_vxp_ub}) = \rho(\overline{pb}).$$

Получаем, что случай $q = u$ эквивалентен случаю $q = b$, поэтому достаточно разобрать только случай, когда $q \in S$.

Мы будем доказывать утверждение индукцией по весу p. Если вес p равен нулю, то $p \in S$ и утверждение вытекает из того факта, что ρ – идеальная функция на S. Предположим теперь, что утверждение верно для всех слов с весом меньшим, чем k, и вес p равен k.

Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. $p = p_vx$ и $q = y$ для некоторых $p_v \in V^1$, $x \in S^1$ и $y \in S$. Тогда

$$\rho(\overline{pq}) = \rho(\overline{p_vxy}) = \rho(f(p_v)xy) \leqslant \rho(f(p_v)x) = \rho(\overline{p_vx}) = \rho(\overline{p}).$$

Случай 2. $p = p_vxp_u$ и $q = y$ для некоторых $p_v \in V$, $p_u \in U$, $x \in S^1$ и $y \in S$, причем $p_u = p'_uuz$ для некоторого $z \in S^1$. Если z и zy оба являются левыми делителями a, то

$$\begin{aligned}\rho(\overline{pq}) &= \rho(\overline{p_vxp'_uuzy}) = \rho(f(p_v)xg(p'_uuzy))\\ &= \rho(f(p_v)xg(p'_ug(uzy)) = \rho(f(p_v)xg(p'_ub)) = \rho(f(p_v)xg(p'_ug(uz)))\\ &= \rho(f(p_v)xg(p'_uuz)) = \rho(\overline{p_vxp'_uuz}) = \rho(\overline{p}).\end{aligned}$$

Если z является левым делителем a, а zy не является, то имеем

$$\begin{aligned}\rho(\overline{pq}) &= \rho(\overline{p_vxp'_uuzy}) = \rho(f(p_v)xg(p'_uuzy))\\ &= \rho(f(p_v)xg(p'_ug(uzy))) = \rho(f(p_v)xg(p'_ubzy)) = \rho(\overline{p_vxp'_ubzy})\end{aligned}$$

Слово $p_v x g p'_u b$ имеет вес меньше k, следовательно, мы можем воспользоваться предположением индукции. Если z является левым делителем a, то

$$\rho(\overline{p_v x p'_u bzy}) \leqslant \rho(\overline{p_v x p'_u b}) = \rho(f(p_v)xg(p'_u b)) = \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uz))) \\ = \rho(f(p_v)xg(p'_u uz)) = \rho(\overline{p_v x p'_u uz}) = \rho(\overline{p}).$$

Если z не является левым делителем a, то

$$\rho(\overline{p_v x p'_u bzy}) \leqslant \rho(\overline{p_v x p'_u bz}) = \rho(f(p_v)xg(p'_u bz)) = \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uz))) \\ = \rho(f(p_v)xg(p'_u uz)) = \rho(\overline{p_v x p'_u uz}) = \rho(\overline{p}).$$

□

Лемма 6. 1) *Если* $p, q \in V^1 S^1$, *то* $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ *и* $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{pq})$.
2) *Если* $p, q \in S^1 U^1$, *то* $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ *и* $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{pq})$.

Доказательство. Мы покажем первое утверждение, второе получается двойственно. Так как слово q редуцировано, формула $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ является следствием леммы 5. Мы докажем, что $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ индукцией по весу слова p. Если вес p равен 0, то $p \in S^1$ и утверждение следует из леммы 5. Пусть теперь формула верна для всех слов с весом меньшим $k > 0$, и вес p равен k. Пусть $q = q_v y$ и $p = vzp'_v x$ для некоторых $q_v, p'_v \in V^1$ и $x, z, y \in S^1$. Тогда

$$\rho(\overline{pq}) = \rho(\overline{vzp'_v x q_v y}) = \rho(f(vzp'_v x q_v)y) = \rho(f(f(vz)p'_v x q_v)y).$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Если z является левым делителем a, то

$$\rho(f(f(vz)p'_v x q_v)y) = \rho(f(bp'_v x q_v)y) = \rho(\overline{bp'_v x q_v y}).$$

Вес слова $bp'_v x$ меньше k, поэтому из предположения индукции следует, что

$$\rho(\overline{bp'_v x q_v y}) \leqslant \rho(\overline{bp'_v x}) = \rho(f(bp'_v)x) = \rho(f(f(vz)p'_v)x) = \rho(f(vzp'_v)x) \\ = \rho(\overline{vzp'_v x}) = \rho(\overline{p}).$$

Случай 2. Если z не является левым делителем a, то

$$\rho(f(f(vz)p'_v x q_v)y) = \rho(f(bzp'_v x q_v)y) = \rho(\overline{bzp'_v x q_v y}).$$

Вес слова $bzp'_v x$ меньше k, поэтому из предположения индукции следует, что

$$\rho(\overline{bzp'_v x q_v y}) \leqslant \rho(\overline{bzp'_v x}) = \rho(f(bzp'_v)x) = \rho(f(f(vz)p'_v)x) = \rho(f(vzp'_v)x) \\ = \rho(\overline{vzp'_v x}) = \rho(\overline{p}).$$

□

Лемма 7. *Пусть* p *и* q *два редуцированных слова. Тогда* $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{red(pq)})$ *и* $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{red(pq)})$.

Доказательство. Очевидны случаи, когда $p = 0$ или $q = 0$, а также случай, когда $red(pq) = 0$.

Имеем $p = p_v x p_u$ и $q = q_v x q_u$ для некоторых $p_v, q_v \in V^1$, $p_u, q_u \in U^1$, $x, y \in S^1$. Если слово pq редуцированное и ненулевое, то одно из слов p_u или q_v пусто, и утверждение вытекает из леммы 5.

Пусть pq не находится в Θ-классе элемента 0 и нередуцировано. Из леммы 4 следует, что $p = p''p'$ и $q = q'q''$, где $p', q', p'', q'' \in T^1$ и p' – подслово p_u, а q' – подслово q_v, $red(p'q') = b$ и $p''bq''$ – редуцированное. Таким образом, $red(p''p'q'q'') = p''bq''$.

Так как p' – подслово p_u, а q' – подслово q_v, то $p' = ux_1ux_2\dots ux_n$, $q' = y_nv\dots y_2vy_1v$, где $x_i, y_i \in S^1$. Из $(pq, 0) \notin \Theta$ следует, что $x_ny_n = a$ и $x_iby_i = a$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Следовательно, все элементы x_i при $1 \leqslant i \leqslant n$ являются левыми делителями a, а элементы y_i при $1 \leqslant i \leqslant n$ являются правыми делителями a. Из этого следует, что $g(p') = b$ и $f(q') = b$.

Слова p'', q'', $p''bq''$ все являются редуцированными. Из этого следует, что либо $p'' \in V^1S^1$, либо $q'' \in S^1U^1$. Рассмотрим случай, когда $p'' \in V^1S^1$, другой случай получается двойственно.

Пусть $p'' = p''_vx$ и $q'' = q''_vyq''_u$, где $p''_v, q''_v \in V^1$, $q''_u \in U^1$ и $x, y \in S^1$. Имеем

$$\rho(\overline{red(pq)}) = \rho(\overline{red(p''p'q'q'')}) = \rho(\overline{p''bq''}) = \rho(\overline{p''_vxbq''_vyq''_u}).$$

Используя леммы 5 и 6, получаем

$$\begin{aligned}\rho(\overline{p''_vxbq''_vyq''_u}) \leqslant \rho(\overline{p''_vxbq''_v}) \leqslant \rho(\overline{p''_vxb}) = \rho(f(p''_v)xb) = \rho(f(p''_v)xg(p'))\\ = \rho(\overline{p''_vxp'}) = \rho(\overline{p''p'}) = \rho(\overline{p}).\end{aligned}$$

С другой стороны, используя лемму 5, имеем

$$\begin{aligned}\rho(\overline{p''_vxbq''_vyq''_u}) \leqslant \rho(\overline{bq''_vyq''_u}) = \rho(f(bq''_v)yg(q''_u)) = \rho(f(f(q')q''_v)yg(q''_u))\\ = \rho(f(q'q''_v)yg(q''_u)) = \rho(\overline{q'q''_vyq''_u}) = \rho(\overline{q'q''}) = \rho(\overline{q}).\end{aligned}$$

□

Из леммы 7 следует, что $\tilde{\rho}$ является идеальной функций. Доказательство предложения 3 завершено.

Предложение 4. *Пусть S – полугруппа с нулем, P – полурешетка с нулем и $\rho : S \to P$ – идеальная функция. Тогда существует полугруппа с нулем $\tilde{S}$ и идеальная функция $\tilde{\rho} : \tilde{S} \to P$ такие, что S – подполугруппа в $\tilde{S}$, $\tilde{\rho}|_S = \rho$ и*

1. *Для любого $x \in \tilde{S}$ существуют $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uxv = x$ и $uyv = 0$ для всех $y \in \tilde{S}\backslash\{x\}$.*

2. *Для любых $x, y \in \tilde{S}$ таких, что $\tilde{\rho}(x) \geqslant \tilde{\rho}(y)$, существуют $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uxv = y$.*

Доказательство предложение полностью повторяет доказательство предложения 2 с использованием предложения 3 вместо предложения 1.

3. Доказательство основных результатов

Приступим к доказательству теоремы 1.

Для каждого $x \in \operatorname{Ji} L$ положим

$$C(x) = \bigcap\{U \in \operatorname{Down}\operatorname{Ji} L \mid x \in U\}.$$

Из пункта 3) леммы 1 следует, что $x \in C(x)$.

Отметим, что для каждого $x \in \operatorname{Ji} L$ элемент $C(x)$ вполне неразложим. Обратно, всякий вполне неразложимый элемент $C \in \operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$ представим в виде $C(x)$ для подходящего $x \in \operatorname{Ji} L$. Действительно, в силу вполне неразложимости C существует единственный элемент $Y \in \operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$ такой, что C покрывает Y. Рассмотрим произвольный элемент $p \in C\backslash Y$. Очевидно, что $C = C(p)$. Итак, мы установили, что вполне неразложимыми элементами являются элементы вида $C(x)$ при подходящем $x \in \mathrm{Ji}\, L$ и только они.

Положим $G = \mathrm{Ji}\, L \cup \{0\}$. Зададим на G умножение по правилу $xy = 0$ для всех $x, y \in G$. Заметим, что G является полугруппой, удовлетворяющей тождествам $xy = yx$ и $x^2 = 0$. Зададим идеальную функцию $\rho : G \to P$ по правилу $\rho(x) = C(x)$ для $x \in \mathrm{Ji}\, L$ и $\rho(0) = 0$. Очевидно, что ρ отделяет ноль. Тогда, по предложению 2, существует группоид $\tilde{G}$ с нулем 0, удовлетворяющий тождествам $xy = yx$ и $x^2 = 0$, и идеальное отображение $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to P$, отделяющее ноль, такие, что $G \subseteq \tilde{G}$, $\tilde{\rho}|_G = \rho$ и

1. Для любого $x \in \tilde{G}$ существует $u_x \in \tilde{G}$ такой, что $xu_x = x$ и $yu_x = 0$ для $y \in \tilde{G} \backslash \{x\}$.

2. Для любых $x, y \in \tilde{G}$ таких, что $\tilde{\rho}(x) \geqslant \tilde{\rho}(y)$, существует $v_{xy} \in \tilde{G}$ такой, что $xv_{xy} = y$.

Пусть теперь $\Theta \in \mathrm{Con}\, \tilde{G}$ и пусть $(a, b) \in \Theta$. Тогда $(a, 0) = (au_a, bu_a) \in \Theta$ и, аналогично, $(b, 0) \in \Theta$. Таким образом, единственным неодноэлементным классом Θ является класс, содержащий 0. Значит Θ является рисовской конгруэнцией, порожденной некоторым идеалом. Из этого следует, что $\mathrm{Con}\, \tilde{G} \cong \mathrm{Id}\, G$.

Осталось лишь показать, что решетка $\mathrm{Id}\, \tilde{G}$ изоморфна решетке L. Для этого покажем, что $\mathrm{Ji}(\mathrm{Id}\, \tilde{G})$ и $\mathrm{Ji}\, L$ изоморфны как ч.у.м.

Рассмотрим отображение ϕ из множества $\mathrm{Ji}\, L$ неразложимых элементов L в множество $\mathrm{Id}^1 \tilde{G}$ главных идеалов $\tilde{G}$, построенное по следующему правилу:

$$\phi(p) = \{x \in \tilde{G} \mid \rho(x) \leqslant p\}.$$

Из определения идеального отображения следует, что для любого вполне неразложимого элемента $p \in L$ множество $\phi(p)$ является идеалом. По построению ρ существует элемент $x \in \tilde{G}$ такой, что $\rho(x) = p$. Покажем, что x порождает весь идеал. Пусть $y \in \phi(p)$, следовательно, $\rho(y) \leqslant \rho(x)$. Тогда существует такой элемент $v_{xy} \in \tilde{G}$, что $xv_{xy} = y$. Это показывает, что x порождает весь идеал $\rho(p)$, следовательно, $\phi(p) \in \mathrm{Id}\, \tilde{G}$.

Покажем, что ϕ является изоморфизмом частично упорядоченных множеств. Очевидно, что ϕ изотонно.

Проверим инъективность ϕ. Действительно, пусть $p_1 \neq p_2$ – два неразложимых элемента и, без ограничения общности, $p_1 \nleqslant p_2$. Функция ρ сюръективна, следовательно, существует $z \in \tilde{G}$ такой, что $\rho(z) = p_1$. Но тогда $z \in \phi(p_1) \backslash \phi(p_2)$, следовательно, $\phi(p_1) \neq \phi(p_2)$.

Покажем, что ϕ сюръективно. Пусть I – главный идеал, порожденный элементом a. Тогда $\rho(a)$ есть неразложимый элемент, это следует из построения ρ. Покажем, что $\phi(\rho(a)) = I$. Действительно, если $x \in I$, то, очевидно, $\rho(x) \leqslant \rho(a)$, из чего следует, что $I \subseteq \phi(\rho(a))$. Далее, если $x \in \phi(\rho(a))$, то $\rho(x) \leqslant \rho(a)$. Тогда существует элемент $v_{ax} \in G$ такой, что $av_{ax} = x$. Следовательно, x принадлежит I. В итоге имеем $\phi(\rho(a)) = I$.

Итак, ϕ это изоморфизм частично упорядоченных множеств $\mathrm{Ji}\, L$ и $\mathrm{Id}^1 \tilde{G} \cong \mathrm{Ji}(\mathrm{Id}\, \tilde{G})$. Следовательно, $\mathrm{Down}\, \mathrm{Ji}\, L \cong \mathrm{Down}\, \mathrm{Ji}(\mathrm{Id}\, \tilde{G})$, что означает $L \cong \mathrm{Id}\, \tilde{G}$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично с использованием предложения 4 вместо 2.

Автор благодарит В.Б. Репницкого за большое внимание к работе и ряд ценных замечаний.

References

[1] C.J. Ash, *The lattice of ideals of a semigroup*, Algebra Universalis, **10** (1980), 395–398. MR0564123

[2] R. Freese, W. A. Lampe and W. Taylor, *Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. I*, Pacific J. Math. **82**:1 (1979), 59–68. MR0549832

[3] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2011. MR2768581

[4] G. Grätzer, *Universal Algebra, Second edition with updates*, Springer science+Business Media, LLC, 2008. MR2455216

[5] G. Grätzer and E. T. Schmidt, *Characterizations of congruence lattices of abstract algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged), **24** (1963), 34–59. MR0151406

[6] R. Egrot, R. Hirsh, *Completely representable lattices*, Algebra Univers, **67**:3 (2012), 205-217. MR2910123

[7] J. Johnson, R.L. Seifer, *A survey of multi-unary algebras*, Mimeographed seminar notes, U.C. Berkeley, (1967), 26 pages.

[8] B. Jonsson, *Topics in Universal Algebra*, Lecture Notes in Mathematics, **250** (1972), Springer-Verlag. MR0345895

[9] W. A. Lampe, *Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, II*, Pacific J. Math., **103**:2 (1982), 475–508. MR0705246

[10] W. A. Lampe, *Results and problems on congruence lattice representations*, Algebra univers., **55** (2006), 127–135. MR2280222

[11] V. Repnitskiĭ and J. Tůma, *Intervals in subgroup lattices of countable locally finite groups*, Algebra univers., **59** (2008), 49–71. MR2453486

[12] P. Ružička, J. Tůma and F. Wehrung, *Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras*, Journal of Algebra, **311**:1 (2007), 96–116. MR2309879

[13] E. T. Schmidt, *The ideal lattice of a distributive lattice with* 0 *is the congruence lattice of a lattice*, Acta Sci. Math. (Szeged), **43** (1981), 153–168. MR0621367

[14] J. Tůma, *Semilattice-valued measures*, Contr. Gen. Alg., **18** (2007).

[15] Zhu, P. *On Rees congruence semigroups*, Northeast. Math. J., **8** (1992), 185–191. MR1182879

Alexander Leonidovich Popovich
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
620083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: alexanderpopovich@urfu.ru