S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 832–841 (2015) УДК 517.51

DOI 10.17377/semi.2015.12.069 MSC 46E35

О НЕПРЕРЫВНОСТИ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ

А.С. РОМАНОВ

Abstract. We discuss some of the problems associated with continuous trace Sobolev functions on the sections of the n-dimensional cube by hyperplanes.

Keywords: Sobolev space, embedding theorem, Hausdorff measure.

1. Введение

Нас будут интересовать вопросы, связанные с непрерывностью функций из пространств Соболева $W_p^1(R^n)$. Элементом пространства Соболева, вообще говоря, является класс эквивалентных функций и конкретная функция $u \in W_p^1(R^n)$ может быть не определена или определена произвольным образом на множестве нулевой меры Лебега m_n. Поэтому, обсуждая свойства соболевских функций, мы будем иметь в виду следующее: всякая функция $u \in W_p^1(R^n)$ может быть переопределена на множестве нулевой меры так, что получаемая в результате уточненная функция $\tilde{u}$ будет обладать интересующими нас свойствами.

Уточненная функция $\tilde{u}$ может быть определена в точках Лебега функции u как предел средних значений

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{m_n(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} u(y)\, dm_n, & \text{если предел существует,} \\ \text{не определена,} & \text{в ином случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Для произвольной локально суммируемой функции множество точек, в которых не существует предел в формуле (1), согласно интегральной теореме

Romanov A.S., The continuity of Sobolev functions on the hyperplanes.

Работа поддержана РФФи (грант - 14-01-00552-а).

Поступила 6 октября 2015 г., опубликована 18 ноября 2015 г.

Лебега имеет нулевую n-мерную меру Лебега, а функция $\tilde{u}$ почти всюду равна функции u.

Для соболевских функций удается получить более тонкие результаты, при этом интересующие нас свойства существенным образом зависят от соотношения между показателем суммируемости p и размерностью пространства n.

Как следует из классической соболевской теоремы вложения при $p > n$ для функции $u \in W_p^1(R^n)$ предел в формуле (1) существует всюду, а уточненная функция $\tilde{u}$ оказывается непрерывной. При $p \le n$ пространство Соболева $W_p^1(R^n)$ содержит функции, имеющие неустранимые разрывы.

При $1 < p$ множество $E(u)$ тех точек, в которых для функции $u \in W_p^1(R^n)$ не существует предел в формуле (1), имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа, т.е. $H^{n-1}(E(u)) = 0$ [1, 2]. Следовательно при $1 < p$ на произвольной гиперплоскости Γ уточненная функция $\tilde{u} \in W_p^1(R^n)$ однозначно определена H^{n-1} почти всюду, что позволяет корректно определить след соболевской функции u на гиперплоскости Γ, полагая его совпадающим со следом уточненной функции $\tilde{u}$.

Уточненная функция является в некотором смысле наиболее “хорошим” представителем в классе эквивалентных функций, поэтому далее, говоря о соболевской функции, мы всегда будем подразумевать, что имеем дело именно с уточненной функцией, а говоря о свойствах функций из $W_p^1(R^n)$ на гиперплоскостях, мы будем иметь в виду свойства следов.

Пространство следов функций из $W_p^1(R^n)$ на гиперплоскости Γ совпадает с пространством Бесова $B_p^{1-1/p}(\Gamma)$, которое при $p \le n$ содержит разрывные функции. Таким образом при любом $p \le n$ для произвольно выбранной гиперплоскости Γ в пространстве $W_p^1(R^n)$ можно найти функции, следы которых на Γ будут иметь неустранимые разрывы. С другой стороны, при $n - 1 < p \le n$ всякая функция $u \in W_p^1(R^n)$ будет непрерывной на почти всех гиперплоскостях ортогональных некоторой оси. Этот факт является простым следствием теоремы Фубини и теоремы вложения соболевских пространств в пространство непрерывных функций:

$$\int\limits_{R^n} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dm_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_t} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dH^{n-1} \right) dt < \infty,$$

следовательно при почти всех $t \in (-\infty, \infty)$ след $u|_{\Gamma_t} \in W_p^1(\Gamma_t)$ и согласно соболевской теореме вложения является непрерывной функцией на гиперплоскости Γ_t.

В теории отображений, связанных с пространствами Соболева, часто используется утверждение: при $p > n - 1$ всякое отображение

$$\varphi : D \subset R^n \to R^n, \quad \varphi \in W_p^1(D)$$

непрерывно на почти всех сферах с центром в фиксированной точке. Для сфер доказательство вполне аналогично доказательству для гиперплоскостей.

Непрерывность безусловно является важным свойством функций и отображений, но при $p > n - 1$ можно утверждать и несколько большее – на почти всех гиперплоскостях Γ_t функция u будет локально гельдеровой с показателем $\alpha_p = 1 - \dfrac{n-1}{p}$. Чтобы это показать, к примеру, достаточно применить к $u|_{\Gamma_t}$ пункт (ii) из формулировки неравенства Морри в книге [3].

Следовательно множество тех $t \in (-\infty, \infty)$, для которых на гиперплоскости Γ_t функция u не удовлетворяет условию Гельдера с показателем α_p, является множеством нулевой линейной меры. Представляется достаточно очевидным, что при $0 < \alpha < \alpha_p$ множество тех $t \in (-\infty, \infty)$, для которых на гиперплоскости Γ_t функция u не удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, должно иметь нулевую меру Хаусдорфа H^d [3], где d меньше единицы и регулярным образом зависит от показателя α.

Для используемой нами схемы доказательств потребуются классы функций соболевского типа, определяемые на множествах дробной размерности. В данном случае нам удобнее воспользоваться введенными П.Хайлашем [4] пространствами M_p^1.

2. Пространства соболевского типа M_p^1

Классы функций M_p^1 могут быть определены на произвольном, не имеющем линейной структуры метрическом пространстве с заданной на нем произвольной мерой, поскольку в определении не используется иных понятий кроме метрики и меры. Даже несколько удивительно, что в евклидовом случае это описание класса функций оказывается эквивалентным классическому определению пространств Соболева, основанному на понятии обобщенной производной.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство с конечным диаметром, а μ – конечная регулярная борелевская мера с носителем в множестве X. Для произвольной μ — измеримой функции $u : X \to \overline{R}$ функцию $g : X \to [0, \infty)$ будем называть допустимой, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq \rho(x, y)(g(x) + g(y))$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и при $p \geq 1$ положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X, \mu)$.

Функциональные классы $S_p^1(X, \rho, \mu)$ и $M_p^1(X, \rho, \mu)$ определяются условиями:

$$S_p^1(X, \rho, \mu) = \{u : X \to \overline{R} \mid D_p(u) \neq \emptyset\},$$

$$M_p^1(X, \rho, \mu) = \{u \in L_p(X, \mu) \mid u \in S_p^1(X, \rho, \mu)\}.$$

Полунорма в пространстве $S_p^1(X, \rho, \mu)$ и норма в пространстве $M_p^1(X, \rho, \mu)$ определяются равенствами

$$||u \mid S_p^1|| = \inf_{g \in D_p(u)} ||g \mid L_p||, \quad ||u \mid M_p^1|| = ||u \mid L_p|| + ||u \mid S_p^1||.$$

Для пространств $M_p^1(X, \rho, \mu)$ получены аналоги многих результатов, известных в евклидовом случае для классических пространств Соболева. При этом полученные в метрическом случае результаты обычно формулируются в весьма общей ситуации и в отличных от евклидовых терминах. Для нас эти функциональные классы играют вспомогательную роль, поэтому мы лишь отметим нужные нм свойства в удобной для наших целей формулировке.

I. В евклидовых областях $G \subset R^n$ с достаточно регулярной границей (к примеру, липшицевой) классическое пространство Соболева $W_p^1(G)$ и пространство

$M_p^1(G, |*|, m_n)$, рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, совпадают как множества функций, а их нормы эквивалентны [4]. В частности, $W_p^1(Q) = M_p^1(Q, |*|, m_n)$ для произвольного куба $Q \subset R^n$.

II. Содержательные результаты для пространств $M_p^1(X, \rho, \mu)$ удается получить в случае, когда мера удовлетворяет условию удвоения

$$\mu(B(x, 2r)) \le C_0 \mu(B(x, r)),$$

т.е. мера шара удвоенного радиуса оценивается через меру исходного шара. Это простое геометрическое условие обеспечивает для меры μ выполнение леммы Витали о покрытии, для локально суммируемых функций выполнение теоремы Лебега о дифференцировании интеграла, ограниченность максимального оператора Харди —Литлвуда в пространствах $L_p(\mu)$ при $p > 1$. Из условия удвоения следует оценка

$$\mu(B(x, r)) \ge C_1 r^s,$$

где $s = \log_2 C_0$. Степень s называется показателем регулярности меры μ и в теоремах вложения играет роль "размерности" метрического пространства (X, ρ) [5].

Далее мы будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения и является регулярной с показателем s.

Символом u_E будем означать среднее значение функции u на множестве E

$$u_E = \fint_E u \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u \, d\mu.$$

Для функций из пространства $M_p^1(X, \rho, \mu)$ при $p > 1$ для произвольных $x \in X$ и $r > 0$ выполняется неравенство Пуанкаре [5]

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| d\mu \le r \fint_{B(x,r)} h \, d\mu, \tag{2}$$

где $h \in L_p(X, \mu)$.

III. Если $0 < \gamma < 1$, то $\rho_\gamma(x, y) = (\rho(x, y))^\gamma$ вновь является метрикой. Это позволяет ввести гельдеровы классы функций M_p^γ, заменяя оценку в исходном определении пространств M_p^1 на

$$|u(x) - u(y)| \le (\rho(x, y))^\gamma (g(x) + g(y)).$$

При этом легко заметить, что

$$M_p^\gamma(X, \rho, \mu) = M_p^1(X, \rho_\gamma, \mu),$$

т.е. гельдеровы классы относительно исходной метрики можно рассматривать как пространства с "единичной" гладкостью, но относительно гельдеровой метрики. Часто это оказывается удобным, поскольку при получении результатов для пространств M_p^γ достаточно пересчитать показатель регулярности меры μ относительно гельдеровой метрики и воспользоваться утверждением для пространств M_p^1.

Согласно работе [5] для всех точек Лебега локально суммируемой функции u выполняется неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le C(\rho(x, y))^\gamma \big(u_\gamma^\#(x) + u_\gamma^\#(y)\big), \tag{3}$$

где $0 < \gamma \leq 1$ и $u^{\#}_{\gamma}$– уточненная максимальная функция порядка γ, однозначно определенная во всех точках множества X равенством

$$u^{\#}_{\gamma}(x) = \sup_{r>0} r^{-\gamma} \fint\limits_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, d\mu.$$

IV. Нас будут интересовать свойства следов функций из пространств $M^1_p(X, \rho, \mu)$ на подмножествах $E \subset X$, имеющих "размерность" меньшую чем исходное метрическое пространство.

Рассмотрим единичный куб $Q \subset R^n$ и обозначим через Q_t сечение куба гиперплоскостью $x_n = t$. Пусть $0 < d < 1$ и на множестве $E \subset (-1, 1)$ задана такая мера η, что для всех $x \in E$ выполняется оценка $\eta(B(x, r) \cap E) \leq Cr^d$. Рассмотрим множество $D = Q_0 \times E$ и меру $\mu = \eta \times H^{n-1}$ на множестве D. При $1 < p < n$ след произвольной функции $u \in W^1_p(Q) = M^1_p(Q, |*|, m_n)$ согласно теореме 3 работы [6] определен μ почти всюду на множестве D и

при любом $0 < \gamma < 1 - \dfrac{1-d}{p}$ *след* $u|_D \in M^1_q(D, |*|^{\gamma}, \mu)$, *где* $q = p\dfrac{(n-1+d)}{n-(1-\gamma)p}$.

Как и в евклидовом случае при показателях суммируемости больших «размерности» пространства функции соболевского типа будут гельдеровыми.

Лемма. *При $p > s$ пространство $M^1_p(X, \rho, \mu)$ непрерывно вложено в пространство гельдеровых относительно метрики ρ функций $C^{\alpha}(X)$, где $\alpha \leq 1 - \dfrac{s}{p}$.*

При $\alpha < 1 - \dfrac{s}{p}$ утверждение является следствием работы [7]. Учитывая неравенство (3), для предельного значения $\alpha = 1 - \dfrac{s}{p}$ достаточно показать, что $u^{\#}_{\alpha} \in L_{\infty}(X)$. Используя s-регулярность меры μ, неравенства Пуанкаре и Гельдера, для интеграла, входящего в определение $u^{\#}_{\alpha}$, получаем

$$r^{-\alpha} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, d\mu r^{1-\alpha} \fint_{B(x,r)} h \, d\mu$$

$$\leq ||h \mid L_p|| r^{1-\alpha} \mu(B(x,r))^{-1/p} \leq C_1 ||h \mid L_p|| \, r^{1-s/p-\alpha} \leq C_0 ||u \mid M^1_p||.$$

Гельдерова функция на множестве полной меры продолжается по непрерывности на все пространство с сохранением гельдеровости.

3. О гельдеровости соболевских функций на гиперплоскостях

Поскольку свойства функций, связанные с непрерывностью, обычно используются локально и не меняются при движении всего евклидова пространства, то далее мы будем рассматривать соболевские пространства W^1_p на единичном кубе $Q \subset R^n$.

Обозначим через E_{α} множество таких $t \in (-1, 1)$, что на сечении Q_t функция u не удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. Как было отмечено в введении, при $n - 1 < p \leq n$ для произвольной функции $u \in W^1_p(Q)$ можно гарантировать гельдеровость с показателем $\alpha_p = 1 - \dfrac{n-1}{p}$ на почти всех сечениях Q_t, т.е. $H^1(E_{\alpha_p}) = 0$. При $\alpha < 1 - \dfrac{n-d}{p} < 1 - \dfrac{n-1}{p} = \alpha_p$ размерность множества "плохих" сечений будет меньше.

Теорема 1. *Пусть* $0 < d < 1, n-d < p < n$ *и* $\alpha < 1 - \dfrac{n-d}{p}$. *Тогда для всякой функции* $u \in W^1_p(Q)$ *ее след* $u|_{Q_t}$ *принадлежит пространству Гельдера* $C^\alpha(Q_t)$ *при* H^d *почти всех* $t \in (-1,1)$, *т.е.* $H^d(E_\alpha) = 0$.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует такое множество $\tilde{E} \subset E_\alpha$, что $0 < H^d(\tilde{E}) < \infty$. Согласно [3] для H^d почти всех $x \in \tilde{E}$

$$\limsup_{r\to 0} \frac{H^d(B(x,r)\cap \tilde{E})}{\omega_d\, r^d} \le 1, \qquad \omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)},$$

обозначим множество таких точек через $E_0, H^d(E_0) > 0$. Рассмотрим множества

$$E_n = \{x \in E_0 \mid H^d(B(x,r)\cap E_0) \le 2\omega_d\, r^d, \quad r < 2^{-n}\}.$$

Поскольку $E_n \subset E_{n+1}$ и $E_0 \subset \bigcup E_n$, то существуют множество $E \subset E_0$ и $r_0 > 0$ такие, что $0 < H^d(E) < \infty$ и $H^d(B(x,r)\cap E) \le 2\omega_d\, r^d$ при $r < r_0$. Учитывая конечность диаметра множества E и возможность покрытия его конечным числом шаров радиуса r_0, получаем $H^d(B(x,r)\cap E) \le Cr^d$ при всех $r > 0$. Рассмотрим множество $D = E \times Q_0$ и меру $\mu = H^d \times H^{n-1}$.

Дальнейшее доказательство построено на цепочке вложений

$$W^1_p(Q) \Longrightarrow M^1_q(D, |*|^\gamma, \mu) \Longrightarrow M^1_q(Q_t, |*|^\gamma, \nu) \Longrightarrow C^\alpha(Q_t).$$

Пусть $0 < \varepsilon < p+d-n$ и $\gamma = 1 - \dfrac{1-d}{p} - \varepsilon$. Поскольку для $x \in D$ выполняется оценка $\mu(B(x,r)\cap D) \le Cr^{n-1+d}$, то по свойству IV для функции $u \in W^1_p(Q)$ след $u|_D$ будет принадлежать пространству $M^1_q(D, |*|^\gamma, \mu)$.

Согласно теореме Фубини для всякой функции $h \in L_q(D)$

$$\int\limits_D |h|^q d\mu = \int\limits_E \left(\int\limits_{Q_t} |h|^q dH^{n-1} \right) dH^d < \infty,$$

т.е. $h \in L_q(Q_t)$ при H^d почти всех $t \in E$.

Следовательно при H^d почти всех $t \in E$ сужение $u|_{Q_t}$ принадлежит пространству $M^1_q(Q_t, |*|^\gamma, H^{n-1})$.

Мера Хаусдорфа H^{n-1} на сечении Q_t является $(n-1)$ -регулярной относительно стандартной евклидовой метрики $|*|$ и $\dfrac{n-1}{\gamma}$ -регулярной относительно метрики $|*|^\gamma$. При выбранных условиях $q > \dfrac{n-1}{\gamma}$ и по лемме сужение $u|_{Q_t}$ принадлежит классу $C^\beta(Q_t)$ относительно метрики $|*|^\gamma$, где $\beta = 1 - \dfrac{n-1}{\gamma q}$.

Остается пересчитать показатель гельдеровости относительно стандартной евклидовой метрики $|*|$

$$\alpha(\varepsilon) = \gamma \cdot \beta = \gamma - \frac{n-1}{q} = 1 - \frac{1-d}{p} - \frac{n-1}{q} - \varepsilon.$$

Поскольку при $\varepsilon \to +0$ показатель $\gamma \to 1 - \dfrac{n-1}{p}$, а показатель суммируемости $q \to p$, то

$$\alpha(\varepsilon) = 1 - \frac{n-d}{p} - O(\varepsilon).$$

Для любого значения $\alpha < 1 - \dfrac{n-d}{p}$ можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что будет выполняться неравенство $\alpha < \alpha(\varepsilon)$.

В результате мы получаем, что $u|_{Q_t}$ принадлежит классу $C^{\alpha}(Q_t)$ при H^d почти всех $t \in E$. Однако это противоречит определению множества E. Следовательно наше предположение было ошибочным и $H^d(E_\alpha) = 0$, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Получение результата для предельного показателя $\alpha_0 = 1 - \dfrac{n-d}{p}$ упирается в отсутствие подходящей теоремы вложения (свойство IV). Нужные нам оценки удается получить при дополнительном предположении об однородности строения множества E относительно меры Хаусдорфа. Известно (см. [3, с. 58]), что в общем случае существуют такие множества, что $0 < H^d(E) < \infty$ и

$$\liminf_{r \to 0} \frac{H^d(B(x,r) \cap E)}{r^d} = 0$$

для H^d почти всех $x \in E$.

Подмножество E метрического пространства (X, ρ) называют d-множеством, если существует такая мера η, что для шаров выполняется оценка

$$C_1 r^d \le \eta(B(x,r)) \le C_2 r^d \quad (r \le diam E).$$

Мера η на d-множестве допускает двухстороннюю оценку через меру Хаусдорфа H^d.

Как и ранее рассмотрим единичный куб $Q \subset R^n$ и d-множество $E \subset (-1,1)$, $0 < d < 1$. Пусть множество $D = Q_0 \times E$ и мера $\mu = \eta \times H^{n-1}$, тогда $\mu(B(x,r) \cap D \sim r^{\omega}$, где $\omega = n - 1 + d$ и $r \le diam E$.

При $1 < p < n$ след произвольной функции $u \in W_p^1(Q)$ определен μ почти всюду на множестве D и

$$u|_D \in M_p^1(D, |*|^{\gamma_0}, \mu), \quad \textit{где} \;\; \gamma_0 = 1 - \frac{1-d}{p}.$$

Доказательство этого утверждения основано на результатах работы [8], согласно которой $u|_D \in B_p^{\gamma_0}(D)$, а норма в пространстве Бесова определяется равенством

$$\|u \mid B_p^{\gamma_0}\| = \|u \mid L_p\| + \left(\int\limits_D \int\limits_D \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{\omega + p\gamma_0}} d\mu(x) d\mu(y) \right)^{1/p} < \infty. \qquad (4)$$

Покажем, что $B_p^{\gamma_0}(D) \subset M_p^1(D, |*|^{\gamma_0}, \mu)$. Пусть $x, y \in D, r \le 2|x-y|$ и шар B_r содержит точки x, y. Тогда

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - u_{B_r}| + |u(y) - u_{B_r}|$$

$$\le 2|x-y|^{\gamma_0} \left(\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^{\gamma_0}} + \frac{|u(y) - u_{B_r}|}{r^{\gamma_0}} \right) \le |x-y|^{\gamma_0} \left(g(x) + g(y) \right),$$

где

$$g(x) = 2\sup\left\{\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^{\gamma_0}} \;\Big|\; x \in B_r, \quad r \leq 2\operatorname{diam} D\right\}.$$

Довольно просто удается показать, что $g \in L_p(D)$. Выберем значение r так, что

$$g(x) \leq 4\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^{\gamma_0}}.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^{\gamma_0}} \leq \fint_{B_r} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\gamma_0}} d\mu(y) \leq \left(\int_D \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{\omega + p\gamma_0}} d\mu(y)\right)^{1/p}.$$

Из (4) следует, что $g \in L_p(D)$ и $B_p^{\gamma_0}(D) \subset M_p^1(D, |*|^{\gamma_0}, \mu)$.

Практически дословное повторение доказательства теоремы 1 приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть $0 < d < 1$, d-множество $E \subset (-1,1)$, $n - d < p < n$ и $\alpha = 1 - \dfrac{n-d}{p}$. Тогда для всякой функции $u \in W_p^1(Q)$ ее след $u|_{Q_t}$ принадлежит пространству Гельдера $C^\alpha(Q_t)$ при H^d почти всех $t \in E$.*

При $n - 1 < p \leq n$ для произвольной функции $u \in W_p^1(Q)$ можно гарантировать гельдеровость с показателем $\alpha_p = 1 - \dfrac{n-1}{p}$ на почти всех сечениях G_t, т.е. $H^1(E_{\alpha_p}) = 0$. При $\alpha \leq 1 - \dfrac{n-d}{p} < 1 - \dfrac{n-1}{p} = \alpha_p$ размерность множества “плохих” сечений будет меньше и $H^d(E_\alpha) = 0$. При $\alpha \to 0$ размерность исключительного множества E_α будет убывать и стремиться к значению $d_p = n - p$.

Значение $d_p = n - p$ является критическим. Если $d \leq n - p$ и $H^d(E) < \infty$, то множество E имеет нулевую $(1,p)$ - емкость, что позволяет легко построить пример функции $u \in W_p^1(Q)$, имеющей неустранимые разрывы на сечениях Q_t при всех $t \in E$.

4. О функциях с градиентами из пространств Лоренца

Из последнего замечания следует, что пространство Соболева $W_{n-1}^1(Q)$ содержит функции имеющие неустранимые разрывы на сечениях Q_t при всех $t \in (-1,1)$. Чтобы имело смысл говорить о непрерывности на гиперплоскостях для некоторого класса функций с первыми обобщенными производными этот класс должен быть более узким чем $W_{n-1}^1(Q)$. С другой стороны, желательно, чтобы этот класс содержал все пространства $W_p^1(Q)$ при $p > n - 1$. Этими свойствами обладает пространство $W_{n-1,1}^1(Q)$, у функции которого обобщенный градиент принадлежит пространству Лоренца $L_{n-1,1}(Q)$.

Двухиндексная шкала пространств Лоренца $L_{p,q}$ включает в себя шкалу пространств Лебега, при этом является более “тонкой”. Введение в теорию пространств Лоренца можно найти в книге [9].

Отметим лишь, что на метрическом пространстве (X, ρ) с мерой μ пространство Лоренца $L_{p,1}$ может быть определено следующим образом:

i) для измеримой функции h функцию распределения определим условием

$$\omega(s) = \mu(\{x \in X \;:\; |h(x)| > s\}), \quad s \geq 0;$$

ii) $h \in L_{p,1}(X)$, если

$$\int\limits_0^\infty (\omega(s))^{1/p}\,ds < \infty.$$

Согласно работе [10], всякая функция $u \in W^1_{n,1}(Q)$ является n-абсолютно непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для произвольного семейства непересекающихся шаров $\{B_k \subset Q\}$ из условия

$$\sum_k m_n(B_k) < \delta$$

следует

$$\sum_k (osc_{B_k} u)^n < \varepsilon.$$

В работе [11] аналогичный результат получен для функций соболевскго типа на однородных метрических пространствах.

Пусть теперь функция $u \in W^1_{n-1,1}(Q)$. Рассмотрим функции распределения

$$\omega_n(s) = m_n(\{x \in Q \ : \ |\nabla u|(x) > s\});$$

$$\omega_{n-1}(s,t) = H^{n-1}(\{x \in Q_t \ : \ |\nabla u|(x) > s\}),$$

тогда

$$\omega_n(s) = \int\limits_{-1}^{1} \omega_{n-1}(s,t)\,dt$$

Используя неравенства Гельдера, Минковского и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_0^\infty (\omega_{n-1}(s,t))^{1/(n-1)}\ ds\right)\,dt$$

$$\le \left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_0^\infty (\omega_{n-1}(s,t))^{1/(n-1)}\ ds\right)^{n-1} dt\right)^{1/(n-1)} \left(\int\limits_{-1}^{1} dt\right)^{(n-2)/(n-1)}$$

$$\le C\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{-1}^{1}\omega_{n-1}(s,t)\,dt\right)^{1/(n-1)} ds = \int\limits_0^\infty (\omega_n(s))^{1/(n-1)}\ ds < \infty.$$

Следовательно при почти всех $t \in (-1,1)$

$$\int\limits_0^\infty (\omega_{n-1}(s,t))^{1/(n-1)}\ ds < \infty,$$

и $u|_{Q_t} \in W^1_{n-1,1}(Q_t)$.

Согласно результату работы [10] всякая функция $u \in W^1_{n-1,1}(Q)$ будет $(n-1)$-абсолютно непрерывна на почти всех сечениях Q_t.

References

[1] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир, 1973. MR0348563

[2] H. Federer, W.P. Ziemer, *The Lebesgue set of a function whose distributon derivatives are p-th summable*, Indiana Univ. Math. J., **22**:2 (1972), 139–158. MR0435361

[3] Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Н.: Научная книга, 2002. MR1158660

[4] P. Hajlasz, *Sobolev Spaces on an Arbitrary Metric Space*, Potential Anal., **5**:4 (1996), 403–415. MR1401074

[5] P. Hajlasz, J. Kinnunen, *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions*, Rev. Mat. Iberoamericana, **14**:3 (1998), 601–622. MR1681586

[6] А.С. Романов, *О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева*, Сиб.матем. журн., **40**:5 (1999), 931–937. MR1721684

[7] А.С. Романов, *О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа*, Сиб.матем. журн., **48**:4 (2007), 848–866. MR2355379

[8] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets R^n*, Math. Reports, Harwood Acad. Publ., **2**:1, 1984. MR0820626

[9] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М.: Мир, 1974.

[10] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Maly, *On functions with derivatives in a Lorentz space*, Manuscripta math., **100**:1 (1999), 87–101. MR1714456

[11] А.С. Романов, *Об абсолютной непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах*, Сиб.матем. журн., **49**:5 (2008), 1147–1156. MR2469060

Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: asrom@math.nsc.ru