S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 12, стр. 842–853 (2015)* УДК 517.954
DOI 10.17377/semi.2015.12.070 MSC 35M99

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.И. КОЖАНОВ, Н.Р. ПИНИГИНА

Abstract. Solvability questions for boundary and initial-boundary value problems for some classes of high order composite-type equations are studied and, as a result, the existence and uniqueness of regular solutions is proved.Abstract.

**Keywords:** Sobolev type equation, boundary value problem, regular solutions, uniqueness, existence, a priori estimates.

## 1. Постановка задач

В работе будет изучаться разрешимость краевых и начально-краевых задач для некоторых классов уравнений составного (соболевского) типа совокупного порядка $2p+2$, $p>1$ — именно, второго порядка по пространственным переменным и $2p$-го порядка по временной (выделенной) переменной.

Постановки задач ниже будут представлены для случая произвольного целого числа $p$ такого, что $p \geq 2$, формулировки же основных результатов и доказательства будут приведены для случая $p=2$ — ввиду громоздкости формулировок и доказательств в случае $p>2$ и очевидного подобия рассуждений в случае $p>2$ и в случае $p=2$.

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть $\Omega$ есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно-дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $a^{ij,k}(x)$, $a^{0,k}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $k=0,1\dots,2p$ ($p>1$-целое), $\alpha_l(t)$, $l=1,\dots,2p-1$, $f(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$,

Kozhanov, A.I., Pinigina, N.R. Boundary value problems for certain classes of high order composite type equations.



Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект № 3407).

*Поступила 26 декабря 2014 г., опубликована 18 ноября 2015 г.*

$t \in [0,T]$. Далее, пусть $A_k$, $k = 0, \dots, 2p$, есть дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции $v(x)$ определяется равенствами

$$A_k v = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij,k}(x) v_{x_j}\right) + a^{0,k}(x) v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до $n$), причем оператор $A_0$ является эллиптическим в $\overline{\Omega}$. Через $D_t^l$ далее будем обозначать производную $\frac{\partial^l}{\partial t^l}$, через $L$ — дифференциальный оператор

$$Lu = (-1)^{p+1} D_t^{2p} A_0 u + \sum_{k=1}^{2p-1} \alpha_k(t) D_t^{2p-k} A_k u - A_{2p} u.$$

Краевая задача $I_p$: *найти решение уравнения*

$$Lu = f(x,t), \tag{1}$$

*удовлетворяющее условиям*

$$u(x,t)|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = \ldots = D_t^p u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_t(x,T) = \ldots = D_t^{p-1} u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Краевая задача $II_p$: *найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), а также условиям*

$$D_t^{p+1} u(x,T) = \ldots = D_t^{2p-1} u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Краевая задача $III_p$: *найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), а также условиям*

$$D_t^{p+1} u(x,0) = \ldots = D_t^{2p-1} u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Заметим, что в случае $p = 1$ уравнение (1) представляет собой уравнение составного типа, моделирующее известное уравнение Буссинеска-Лява [1]–[3], краевые задачи $I_p$, $II_p$ и $III_p$ для такого уравнения совпадают, и исследование их разрешимости было проведено ранее (см., например, [4]). В случае $p > 1$ краевая задача $I_p$ восходит по своей постановке к работам [5]–[7], в которых изучались подобная задача для неклассических уравнений вида (1) в случае $A_k = I$, $k = 0, 1, \dots, 2p-1$ — именно, для уравнений

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u + \sum_{k=1}^{2p-1} \alpha_k(t) D_t^{2p-k} u - A_{2p} u = f(x,t), \tag{$*$}$$

а также для более общих уравнений

$$\alpha_0(t) D_t^{2p} u + \sum_{k=1}^{2p-1} \alpha_k(t) D_t^{2p-k} u - A_{2p} u = f(x,t)$$

с незнакоопределенной функцией $\alpha_0(t)$. Уточним, что для уравнений составного типа (1) в случае $p > 1$ краевая задача $I_p$ ранее не изучалась.

Далее, краевая задача $II_p$ в случае $p > 1$ не изучалась ранее как для уравнений без составной структуры вида ($*$), так и для уравнений вида (1) (с составной структурой).

Краевая задача $III_p$ представляет собой аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических уравнений. Заметим, что для уравнений ($*$) подобная задача будет *некорректной* — показано это будет в Дополнении.

Заметим также, что уравнения соболевского типа, к каковым относятся уравнения (1), активно изучаются в последнее время — см., например, монографии [8]–[10]. Но, как уже говорилось выше, задачи типа задач $I_p$ и $II_p$ в случае $p > 1$ ранее для таких уравнений не изучались.

## 2. Вспомогательные утверждения

Пусть $V_{2,2p}$ есть анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{V_{2,2p}} = \left\{ \int\limits_Q \left( v^2 + (D_t^{2p} v)^2 + \sum_{i,j=1}^n \left[ v_{x_i x_j}^2 + (D_t^{2p} v_{x_i x_j})^2 \right] \right) dx\,dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Как было сказано выше, рассмотрим случай $p = 2$. Более точно, рассмотрим уравнение такого вида

$$Lu = D_t^4 A_0 u + \alpha_1(t) D_t^3 A_1 u + \alpha_2(t) D_t^2 A_2 u + \alpha_3(t) D_t A_3 u - A_4 u = f(x,t), \quad (1')$$

в котором оператор $A_0$ эллиптический. Данный вид отличается от определенного выше оператора $Lu$ тем, что множитель $(-1)$ перед старшей производной по $t$ внесен в сам оператор $A_0$.

**Лемма 1.** *Пусть $\lambda > T$, $f(x,t) \in L_2(Q)$, и пусть выполняются условия*

$$a^{ij,k}(x) = a^{ji,k}(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i,j = 1,\dots,n, \quad k = 0,1,\dots,2p; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \left[\tfrac{3}{2} a^{ij,0}(x) + \alpha_1(t)(\lambda - t) a^{ij,1}(x)\right] \xi_i \xi_j \geq m_0 |\xi|^2, \\ x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m_0 > 0; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \left\{ [(\lambda - t)\alpha_1(t)]''_{tt} a^{ij,1}(x) - [(\lambda - t)\alpha_2(t)]'_t a^{ij,2}(x) \right. \\ \left. + 2(\lambda - t)\alpha_3(t) a^{ij,3}(x) \right\} \xi_i \xi_j \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{3}{2} a^{0,0}(x) + \alpha_1(t)(\lambda - t) a^{0,1}(x) \leq -\overline{a}_0 < 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T]; \tag{10}$$

$$\begin{gathered} [(\lambda - t)\alpha_1(t)]''_{tt} a^{0,1}(x) - [(\lambda - t)\alpha_2(t)]'_t a^{0,2}(x) \\ + 2(\lambda - t)\alpha_3(t) a^{0,3}(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T]; \end{gathered} \tag{11}$$

$$a^{0,0}(x) \leq 0, \quad a^{0,4} \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{12}$$

*Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $I_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка*

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega [u_{x_i tt}^2(x,T) + u_{x_i}^2(x,T)]\,dx + \int\limits_\Omega [u_{tt}^2(x,T) + u^2(x,T)]\,dx \\ + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^T \int\limits_\Omega [u_{x_i tt}^2 + u_{x_i}^2]\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega [u_{tt}^2 + u^2]\,dx\,dt < N_1, \end{gathered} \tag{13}$$

*с постоянной $N_1$, определяющейся лишь функцией $f(x,t)$, коэффициентами операторов $A_k$, $k = \overline{0,4}$, областью $\Omega$ и числом $T$.*

*Доказательство.* Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega Lu(\lambda - t) u_t\,dx\,dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t)(\lambda - t) u_t\,dx\,dt.$$

Если функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $V_{2,4}$ и для нее выполняются условия (2)-(3), то имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\{(\lambda-T)[a^{ij,0}(x)u_{x_jtt}(x,T)u_{x_itt}(x,T)-a^{0,0}(x)u_{tt}^2(x,T)]\\
-([\alpha_1'(T)(\lambda-T)-\alpha(T)]a^{ij,1}(x)+(\lambda-T)\alpha_2(T)a^{ij,2}(x))u_{x_jt}(x,T)u_{x_it}(x,T)\\
+([\alpha_1'(T)(\lambda-T)-\alpha(T)]a^{0,1}(x)+(\lambda-T)\alpha_2(T)a^{0,2}(x))u_t^2(x,T)\\
+[a^{ij,0}(x)+(\lambda-T)\alpha_1(T)a^{ij,1}(x)]u_{x_itt}(x,T)u_{x_it}(x,T)\\
-[a^{0,0}(x)+(\lambda-T)\alpha_1(T)a^{0,1}(x)]u_{tt}(x,T)u_t(x,T)\\
+(\lambda-T)[a^{ij,4}(x)u_{x_j}(x,T)u_{x_i}(x,T)-a^{0,4}(x)u^2(x,T)]\},dx\\
+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\frac{3}{2}a^{ij,0}(x)-(\lambda-t)\alpha_1(t)a^{ij,1}(x)\right]u_{x_jtt}u_{x_itt}\right.\\
-\left[\frac{3}{2}a^{0,0}(x)-(\lambda-t)\alpha_1(t)a^{0,1}(x)\right]u_{tt}^2-\frac{1}{2}\left[[(\lambda-t)\alpha_1(t)]_{tt}'a^{ij,1}(x)\right.\\
\left.+[(\lambda-t)\alpha_2(t)]_t'a^{ij,2}(x)+2(\lambda-t)\alpha_3(t)a^{ij,3}(x)\right]u_{x_it}u_{x_jt}\\
+\frac{1}{2}[[(\lambda-t)\alpha_1(t)]_{tt}'a^{0,1}(x)-[(\lambda-t)\alpha_2(t)]_t'a^{0,2}(x)-2(\lambda-t)\alpha_3(t)a^{0,3}(x)]u_t^2\\
\left.-\frac{1}{2}a^{ij,4}(x)u_{x_j}u_{x_i}+\frac{1}{2}a^{0,4}(x)u^2\right\}\,dx\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}f(\lambda-t)u_t\,dx\,dt. \qquad (14)
\end{gathered}
$$

Требуемая оценка вытекает из условий (7)–(12) и неравенства Юнга. □

**Лемма 2.** *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Кроме того, пусть выполняются условия*

$$
\begin{gathered}
a^{ij,0}(x)\xi_i\xi_j+2[a^{ij,0}(x)+\alpha_1(T)(\lambda-T)a^{ij,1}(x)]\xi_i\eta_j\\
+\{[\alpha_1'(T)(\lambda-T)-\alpha(T)]a^{ij,1}(x)-\alpha_2(T)(\lambda-T)a^{ij,2}(x)\}\eta_i\eta_j\geq 0, \qquad (15)\\
x\in\overline{\Omega},\quad \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
a^{0,0}(x)\xi_0^2+2[a^{0,0}(x)+\alpha_1(T)(\lambda-T)a^{0,1}(x)]\xi_0\eta_0\\
+\{[\alpha_1'(T)(\lambda-T)-\alpha(T)]a^{0,1}(x)-\alpha_2(T)(\lambda-T)a^{0,2}(x)\}\eta_0^2\leq 0, \qquad (16)\\
x\in\overline{\Omega},\quad \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n.
\end{gathered}
$$

*Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $II_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка (13).*

*Доказательство.* Требуемая оценка вытекает из равенства (14), неравенства Юнга и условий (7)–(12), (15), (16). □

Определим дифференциальные операторы

$$
\begin{gathered}
B_kv=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij,k}(x,t)v_{x_j}\right)+b^{0,k}(x,t)v,\\
b^{ij,0}(x,t)=\frac{3}{2}a^{ij,0}(x)-(\lambda-t)\alpha_1(t)a^{ij,1}(x),\\
b^{0,0}(x,t)=\frac{3}{2}a^{0,0}(x)+(\lambda-t)\alpha_1(t)a^{0,1}(x),\\
b^{ij,1}(x,t)=[(\lambda-t)\alpha_1(t)]_{tt}'a^{ij,1}(x)-(\lambda-t)\alpha_2(t)a^{ij,2}(x),\\
b^{0,1}(x,t)=[(\lambda-t)\alpha_1(t)]_t'a^{0,1}(x)-(\lambda-t)\alpha_2(t)a^{0,2}(x),
\end{gathered}
$$

$$b^{ij,2}(x,t) = -\frac{h'(t)}{2}a^{ij,0}(x) - (\lambda - t)\alpha_3(t)a^{ij,3}(x),$$

$$b^{0,2}(x,t) = -\frac{h'(t)}{2}a^{0,0}(x) - (\lambda - t)\alpha_3(t)a^{0,3}(x).$$

Представим операторы $B_1$, $B_2$ и $A_4$ через оператор $A_0$:

$$B_1 u = h_1(t)A_0 u + \widetilde{B}_1 u,$$

$$B_2 u = h_2(t)A_0 u + \widetilde{B}_2 u,$$

$$A_4 u = \gamma A_0 u + \widetilde{A}_4 u.$$

Для произвольного дифференциального оператора $M$ второго порядка имеет место неравенство

$$\|Mv\|^2_{L_2(\Omega)} \le m_0(M) \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q v^2_{x_i x_j}\,dx\,dt + m_1(M) \int\limits_Q \left( \sum_{i=1}^{n} v^2_{x_i} + v^2 \right) dx\,dt, \quad (17)$$

в котором $v = v(x,t)$, числа $m_0(M)$, $m_1(M)$ определяются коэффициентами оператора $M$.

Далее, для любых двух эллиптических операторов $M_1$ и $M_2$, если функция $v(x)$ обращается в нуль на $\Gamma$ то выполняется неравенство

$$c_0(M_1,M_2) \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega v^2_{x_i x_j}\,dx \le \int\limits_\Omega M_1 v M_2 v\,dx + c_1(M_1,M_2) \int\limits_\Omega v^2\,dx, \quad (18)$$

в котором $c_0(M_1,M_2)$, $c_1(M_1,M_2)$ — некоторые положительные числа, зависящие от коэффициентов операторов $M_1$, $M_2$ и области $\Omega$, см. [11, 12].

**Лемма 3.** *Пусть $\lambda > T$ и пусть выполняются условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q); \quad (19)$$

$$\begin{gathered} \gamma \ge 0, \quad h_1(t) \in C^1([0,T]), \quad h_2(t) \in C([0,T]), \\ h_1(T) \ge 0, \quad h_2(t) \ge 0, \quad t \in [0,T]; \end{gathered} \quad (20)$$

$$b^{ij,0}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \beta_0|\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta_0 > 0; \quad (21)$$

*существует положительное число $\delta_*$ такое, что*

$$c_0(B_0,A_0) - \left[ \frac{3T^2\delta_*^2 m_0(A_0)}{4} + \frac{2m_0(\widetilde{B}_1) + T^2[m_0(\widetilde{A}_4)] + m_0(\widetilde{B}_2)}{4\delta_*^2} \right] > 0. \quad (22)$$

*Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $I_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка*

$$\int\limits_Q [A_0 u_{tt}]^2\,dx\,dt < N_2 \quad (23)$$

*с постоянной $N_2$, зависящей от функции $f(x,t)$, коэффициентов операторов $A_k$, $k = \overline{1,4}$, области $\Omega$ и числа $T$.*

*Доказательство.* Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_Q Lu(\lambda-t)A_0u_t\,dx\,dt = -\int\limits_Q f(x,t)(\lambda-t)A_0u_t\,dx\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega\{(\lambda-T)[A_0u_{tt}(x,T)]^2+h(t)[A_0u_t(x,T)]^2+\gamma(\lambda-T)[A_0u(x,T)]^2\}\,dx\\ +\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\{B_0u_{tt}\cdot A_0u_{tt}+h_2(t)[A_0u_t]^2+\tfrac{\gamma}{2}[A_0u]^2\}\,dx\,dt\\ =\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\{f(x,t)\cdot A_0u_t-\widetilde{B}_1u_{tt}\cdot A_0u_t-\widetilde{B}_2u_t\cdot A_0u_t-\widetilde{A}_4u\cdot A_0u_t\}\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{24}$$

Оператор $B_0$ эллиптичен согласно условию (21). В силу (18) для первого слагаемого второго интеграла левой части выполняется неравенство

$$c_0(B_0,A_0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q u^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt\le\int\limits_Q B_0u_{tt}A_0u_{tt}\,dx\,dt+c_1(B_0,A_0)\int\limits_Q u^2_{tt}\,dx\,dt.\tag{25}$$

Оценим слагаемые в правой части (24) с помощью неравенства Юнга и неравенства (17). Имеем

$$I_1=\int\limits_Q f(x,t)\cdot A_0u_t\,dx\,dt\le\frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_Q[A_0u_t]^2\,dx\,dt+\frac{1}{2\delta_0^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dx\,dt,$$

$$I_2=\int\limits_Q\widetilde{B}_1u_{tt}\cdot A_0u_t\,dx\,dt\le\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q[A_0u_t]^2\,dx\,dt$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\left[m_0(\widetilde{B}_1)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q u^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt+m_1(\widetilde{B}_1)\int\limits_Q\left(\sum_{i=1}^n u^2_{x_itt}+u^2_{tt}\right)\,dx\,dt\right],$$

$$I_3=\int\limits_Q\widetilde{B}_2u_t\cdot A_0u_t\,dx\,dt\le\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q[A_0u_t]^2\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\left[m_0(\widetilde{B}_2)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q u^2_{x_ix_j}\,dx\,dt+m_1(\widetilde{B}_2)\int\limits_Q\left(\sum_{i=1}^n u^2_{x_it}+u^2_t\right)\,dx\,dt\right],$$

$$I_4=\int\limits_Q\widetilde{A}_4u\cdot A_0u_t\,dx\,dt\le\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q[A_0u_t]^2\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\left[m_0(\widetilde{A}_4)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q u^2_{x_ix_jt}\,dx\,dt+m_1(\widetilde{A}_4)\int\limits_Q\left(\sum_{i=1}^n u^2_{x_it}+u^2_t\right)\,dx\,dt\right].$$

Далее, для любой функции $v(x,t)$ такой, что $v_t(x,0)=0$ при $x\in\Omega$ имеет место неравенство

$$\int\limits_Q v_t^2\,dx\,dt\le\frac{T^2}{2}\int\limits_Q v_{tt}^2\,dx\,dt.\tag{26}$$

Учитывая оценку (13) и неравенство (26), получим

$$I_1+I_2+I_3+I_4 \le \frac{T^2(\delta_0^2+3\delta_1^2)}{4}\int\limits_Q [A_0u_{tt}^2]^2\,dx,dt$$

$$+\frac{2m_0(\widetilde{B}_1)+T^2[m_0(\widetilde{A}_4)+m_0(\widetilde{B}_2)]}{4\delta_1^2}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q v^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt+K_1, \qquad (27)$$

постоянная $K_1$ здесь определяется коэффициентами операторов $A_k$, $k=\overline{1,4}$, областью $\Omega$ и числом $T$. Используя еще раз (18) придем к неравенству

$$c_0(B_0,A_0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q v^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt$$

$$\le\left[\frac{3T^2\delta_1^2m_(A_0)}{4}+\frac{2m_0(\widetilde{B}_1)+T^2m_0(\widetilde{A}_4)+T^2m_0(\widetilde{B}_2)}{4\delta_1^2}\right]\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q v^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt.$$

Положим $\delta_1=\delta_*$. Учитывая (22) и подбирая $\delta_0$ малым, получим оценку

$$\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q v^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt\le K_2.$$

Из этого неравенства и из неравенства (17) получаем оценку (23). □

Через $B_3$ обозначим оператор

$$B_3\equiv A_0+\alpha(t)(\lambda-t)A_1.$$

**Лемма 4.** *Пусть выполняются условия леммы 3. Кроме того, пусть выполняется условие*

$$\exists\,\delta_{**}:\ \delta_{**}>0,\ \frac{\lambda-T}{2}c_0(A_0,A_0)-\frac{\delta_{**}^2m_0(B_3)}{2}-\frac{Tm_0(A_0)}{2\delta_{**}^2}>0. \qquad (28)$$

*Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $II_2$ для уравнения* $(1')$ *из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка* (23).

*Доказательство.* При выполнении условий задачи $II_2$ равенство (24) имеет вид

$$\tfrac12\int\limits_\Omega\{(\lambda-T)[A_0u_{tt}(x,T)]^2+h(t)[A_0u_t(x,T)]^2+\gamma(\lambda-T)[A_0u(x,T)]^2\}\,dx$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\{B_0u_{tt}\cdot A_0u_{tt}+h_2(t)[A_0u_t]^2+\tfrac{\gamma}{2}[A_0u]^2\}\,dx\,dt$$

$$=\int\limits_\Omega B_3u_{tt}(x,T)A_0u_t(x,T)\,dx$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\{f(x,t)\cdot A_0u_t-\widetilde{B}_1u_{tt}\cdot A_0u_t-\widetilde{B}_2u_t\cdot A_0u_t-\widetilde{A}_4u\cdot A_0u_t\}\,dx\,dt.$$

Оценим первое слагаемое правой части по неравенству Юнга

$$\int\limits_\Omega B_3u_{tt}(x,T)A_0u_t(x,T)\,dx\le\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_\Omega[B_3u_{tt}(x,T)]^2\,dx+\frac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_\Omega[A_0u_t(x,T)]^2\,dx.$$

Вновь применяя неравенство (17), а также неравенство

$$\int\limits_{\Omega} v_t^2(x,T)\,dx \le T\int\limits_{Q} v_{tt}^2\,dx\,dt,$$

которое выполняется для любой функции $v(x,t)$ из пространства $V_{2,4}$ такой, что $v(x,0)=0$, получим

$$\int\limits_{\Omega} B_3u_{tt}A_0u_t\,dx \le \frac{\delta_2^2 m_0(B_3)}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u^2_{x_ix_jtt}(x,T)\,dx$$

$$+\frac{\delta_2^2 m_1(B_3)}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n} u^2_{x_itt}(x,T)+u^2_{tt}(x,T)\right)dx$$

$$+\frac{Tm_0(A_0)}{2\delta_2^2}\int\limits_{Q}\sum_{i,j=1}^{n} u^2_{x_ix_jtt}\,dx\,dt+\frac{Tm_1(A_0)}{2\delta_2^2}\int\limits_{Q}\left(\sum_{i=1}^{n} u^2_{x_itt}+u^2_{tt}\right)dx.$$

Далее, в силу неравенства (18) имеем

$$\frac{\lambda-T}{2}\int\limits_{\Omega}[A_0u_{tt}(x,T)]^2\,dx \ge \frac{\lambda-T}{2}c_0(A_0,A_0)\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u^2_{x_ix_jtt}(x,T)\,dx.$$

Тогда, учитывая оценку (13) и выбирая $\delta_2=\delta_{**}$ при выполнении условия (28) получим оценку (23). □

**Лемма 5.** *Пусть выполняются условия леммы 3. Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $I_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка*

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}[A_0D_t^4u]^2\,dx\,dt < N_3, \tag{29}$$

*в которой постоянная $N_3$ определяется функцией $f(x,t)$, коэффициентами операторов $A_k$, $k=\overline{1,4}$, областью $\Omega$ и числом $T$.*

**Лемма 6.** *Пусть выполняются условия леммы 4. Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $II_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка (29).*

*Доказательство.* Требуемая оценка (29) вытекает из оценок (13), (23) и неравенства (17). Младшие производные по переменной $t$ нормы в $L_2(Q)$ оцениваются через старшие производные в $L_2(Q)$. □

**Лемма 7.** *Пусть выполняются условия*

$$a^{ij,0}(x)=a^{ji,0}(x),\quad j=1,\dots,n,$$

$$a^{ij,0}(x)\xi_i\xi_j \ge m_0|\xi|^2,\quad x\in\overline{\Omega},\quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

*Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $III_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка*

$$\int\limits_{\Omega}[D_t^3u(x,t)]^2\,dx < N_4, \tag{30}$$

*в которой $t \in [0,T]$, постоянная $N_4$ определяется функцией $f(x,t)$, коэффициентами операторов $A_k$, $k=\overline{0,4}$, а также числом $T$.*

*Доказательство.* Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^t \int\limits_\Omega Lu \cdot D_\tau^3 u\,dx\,d\tau = -\int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \cdot D_\tau^3 u\,dx\,d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя начальные и краевые условия, условия леммы, применяя неравенство Юнга и лемму Гроноулла, получим требуемую оценку. □

**Лемма 8.** *Пусть выполняются условия леммы 7. Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $III_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка*

$$\int\limits_\Omega [D_t^3 A_0 u(x,t)]^2\,dx < N_5, \tag{31}$$

*в которой $t \in [0,T]$, постоянная $N_5$ определяется функцией $f(x,t)$, коэффициентами операторов $A_k$, $k=\overline{1,4}$, а также числом $T$.*

*Доказательство.* Доказательство этой леммы проводится с помощью несложного анализа равенства

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega Lu \cdot D_\tau^3 A_0 u\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \cdot D_\tau^3 A_0 u\,dx\,d\tau$$

с применением второго основного неравенства для эллиптических операторов, оценки (30), неравенства Юнга и леммы Гроноулла. □

**Лемма 9.** *Пусть выполняются условия леммы 7. Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи $III_2$ для уравнения $(1')$ из пространства $V_{2,4}$ выполняется оценка*

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega [D_\tau^4 A_0 u]^2\,dx\,d\tau < N_6, \tag{32}$$

*в которой $t \in [0,T]$, постоянная $N_6$ определяется функцией $f(x,t)$, коэффициентами операторов $A_k$, $k=\overline{1,4}$, а также числом $T$.*

Доказательство этой леммы очевидно.

## 3. Разрешимость задач $I_p$–$III_p$

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda > T$, и пусть выполняются условия* (7), (9), (11), (12), (19)–(22), *а также условия*

$$\begin{gathered}\left[\tfrac{3}{2}a^{ij,0}(x) + \rho\alpha_1(t)(\lambda - t)a^{ij,1}(x)\right]\xi_i\xi_j \ge m_0|\xi|^2,\\ x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m_0 > 0, \quad \rho \in [0,1],\end{gathered} \tag{8'}$$

$$\frac{3}{2}a^{0,0}(x) + \rho\alpha_1(t)(\lambda - t)a^{0,1}(x) \le -\overline{a}_0 < 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad \rho \in [0,1]. \tag{10'}$$

*Тогда краевая задача $I_2$ имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V_{2,4}$.*

*Доказательство.* Воспользуемся методом продолжения по параметру [13].

Пусть $\rho$ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач $I_{2,p}$: *найти решение уравнения*

$$\begin{aligned} L_\rho u = D_t^4 A_0 u + \rho[\alpha_1(t) D_t^3 A_1 u + \alpha_2(t) D_t^2 A_2 u \\ +\alpha_3(t) D_t A_3 u - A_4 u] = f(x,t), \quad 0 \le \rho \le 1, \end{aligned} \tag{$1'_\rho$}$$

*удовлетворяющее условиям* (2), (3) *и* (4) (*при* $p = 2$).

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество всех чисел $\rho$, для которых краевая задача $(1'_\rho)$, (2)-(4) разрешима в пространстве $V_{2,4}$. Множество $\mathfrak{R}$ непусто, так как число 0 принадлежит ему, и при $\rho = 0$ разрешимость краевой задачи $(1'_0)$, (2)-(4) очевидна. Рассмотрим равенство

$$\int_0^T \int_\Omega L_\rho u (\lambda - t) u_t \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)(\lambda - t) u_t \, dx \, dt.$$

Для функции $u(x,t)$, принадлежащей пространству $V_{2,4}$, при выполнении условий (7), (8′), (9), (10′), (11), (12) имеет место оценка (13).

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^T \int_\Omega L_\rho u (\lambda - t) A_0 u_t \, dx \, dt = -\int_0^T \int_\Omega f(x,t)(\lambda - t) A_0 u_t \, dx \, dt.$$

При выполнении условий (19)-(22) выполняется оценка (23). Из равенства

$$-\int_0^T \int_\Omega L_\rho u (\lambda - t) A_0 D_t^4 u \, dx \, dt = -\int_0^T \int_\Omega f(x,t)(\lambda - t) A_0 D_t^4 u \, dx \, dt,$$

при выполнении условий (19)-(22) следует, что выполняется оценка (29). Из оценок (13), (23) и (29) следует открытость и замкнутость множества $\mathfrak{R}$ [13]. Следовательно, оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$, и краевая задача $I_2$ имеет решение. Единственность следует из оценки (13). □

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия леммы* (7), (8′), (9), (10′), (11), (12), (19)–(22), (28). *Кроме того, пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} a^{ij,0}(x)\xi_i\xi_j + 2[a^{ij,0}(x) + \alpha_1(T)(\lambda - T)a^{ij,1}(x)]\xi_i\eta_j \\ +\{[\rho\alpha_1'(T)(\lambda - T) - \rho\alpha(T)]a^{ij,1}(x) - \rho\alpha_2(T)(\lambda - T)a^{ij,2}(x)\}\eta_i\eta_j \ge 0, \\ x \in \overline{\Omega}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \rho \in [0,1]; \end{gathered} \tag{15′}$$

$$\begin{gathered} a^{0,0}(x)\xi_0^2 + 2[a^{0,0}(x) + \rho\alpha_1(T)(\lambda - T)a^{0,1}(x)]\xi_0\eta_0 \\ +\{[\rho\alpha_1'(T)(\lambda - T) - \rho\alpha(T)]a^{0,1}(x) - \rho\alpha_2(T)(\lambda - T)a^{0,2}(x)\}\eta_0^2 \le 0, \\ x \in \overline{\Omega}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \rho \in [0,1]. \end{gathered} \tag{16′}$$

*Тогда краевая задача* $II_2$ *имеет единственное решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $V_{2,4}$.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия*

$$a^{ij,0}(x)\xi_i\xi_j \ge m_0|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Тогда краевая задача* $III_2$ *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $V_{2,4}$.

Теоремы о разрешимости задач $I_p - III_p$ при $p > 2$ доказываются аналогично при помощи априорных оценок и метода продолжения по параметру.

Дополнение. О некорректности начально-краевой задачи для уравнений $(*)$.

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $u_m(x,t)$, $m = 1, 2, \ldots$, есть функции

$$u_m(x,t) = \frac{1}{m^2} e^{\frac{\sqrt{3}m^{1/3}t}{2}} \cos \frac{m^{1/3}t}{2} \sin mx.$$

При $x \in \Omega$, $t > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, имеют место равенства

$$D_t^6 u_m - u_{mxx} = 0.$$

Для функций $u_m(x,t)$ при $x \in \Omega$, $m = 1, 2, \ldots$, выполняются условия

$$u_m(x,t)|_{t=0} = \frac{1}{m^2} \sin mx, \quad D_t u_m(x,t)|_{t=0} = \frac{\sqrt{3}}{m^{5/3}} \sin mx,$$

$$D_t^2 u_m(x,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{m^{4/3}} \sin mx, \quad D_t^3 u_m(x,t)|_{t=0} = 0,$$

$$D_t^4 u_m(x,t)\big|_{t=0} = -\frac{1}{2m^{2/3}} \sin mx, \quad D_t^5 u_m(x,t)|_{t=0} = -\frac{\sqrt{3}}{2m^{1/3}} \sin mx.$$

Очевидно, что при $m \to \infty$ для $k = \overline{0,5}$ имеют место сходимости

$$\|D_t^k u_m(x,0)\|_{L_2(\Omega)} \to 0.$$

Далее очевидно, что для любого положительного числа $t$ выполняется

$$\|u_m(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \to \infty$$

при $m \to \infty$.

Данный пример показывает, что начально-краевая задача для уравнений $(*)$ с данными Коши при $t = 0$ обладает свойством неустойчивости. Другими словами, начально-краевая задача для уравнения $(*)$ с данными Коши при $t = 0$ *некорректна*.

## References


[1] Х. Икези, *Экспериментальное исследование солитонов в плазме* (Солитоны в действии. М.: Мир, 1981, 163–184).

[2] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, М.: Мир, 1977.

[3] Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, *Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной*, Новосибирск: Научная книга, 1998. MR1831690

[4] С.Я. Якубов, *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения*, Баку: Элм, 1985. Zbl 0622.34001

[5] В.Н. Врагов, *К теории краевых задач для уравнений смешанного типа*, Дифференциальные уравнения, **13**:6 (1976), 1098–1105.

[6] В.Н. Врагов, *О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа*, Математический анализ и смежные вопросы математики, Новосибирск: Наука, 1978, 5–13. MR0554054

[7] И.Е. Егоров, В.Е. Федоров *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка*, Новосибирск: изд-во ВЦ СО РАН, 1995. MR1800114

[8] S.G. Pyatkov, *Operator Theory. Nonclassical Problems*, Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002. MR2009753

[9] G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov, *Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. MR2225515

[10] А.Г. Свешников, Ю.Д. Плетнер, М.О. Корпусов, А.Б. Альшин, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, М.: Физматлит, 2007. Zbl 1179.35007

[11] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1973. MR0509265

[12] О.А. Ладыженская, *Об интегральных оценках сходимости приближенных методов и решениях в функционалах для линейных эллиптических операторов*, Вестник ЛГУ, серия матем., мех., астр., **13**:2 (1958), 60–69. Zbl 0080.30801

[13] В.А. Треногин, *Функциональный анализ*, М.: Наука, 1980. MR0598629

Alexandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Academician Koptyug 4,
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 2,
630090, Novosibirsk, Russia
*E-mail address*: kozhanov@math.nsc.ru

Nirguyana Romanovna Pinigina
Ammosov North-Eastern Federal University,
ul. Belinskogo 58,
677000, Yakutsk, Russia
*E-mail address*: n-pinig@mail.ru