S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 862–867 (2015) УДК 519.177
DOI 10.17377/semi.2015.12.072 MSC 05C50

О СВОЙСТВЕ АНТИПОДАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ГРАФАХ

С.В. АВГУСТИНОВИЧ, Е.В. ГОРКУНОВ, Ю.Д. СЕМИНА

Abstract. A graph $G = (V, E)$ of diameter d is termed to be *antipodal* if for any vertex $x \in V$ there is precisely one another $x' \in V$ such that $d(x, x') = d$. In addition, an antipodal graph is called *rigid* if for any pair of its antipodal vertices $x, x' \in V$ and any third vertex $y \in V$ the equality $d(x, x') = d(x, y) + d(y, x')$ holds. In this paper eigenfunctions of rigid antipodal graphs are investigated. It is shown that every homogeneous eigenfunction of such a graph with odd diameter is determined uniquely from its values on vertices in two middle layers of the graph.

Keywords: antipodality, antipodal graph, eigenfunction of a graph.

1. Введение

Граф *антиподальный*, если для каждой его вершины на расстоянии диаметра от нее находится в точности одна другая. Везде в дальнейшем через x' будем обозначать вершину, диаметрально противоположную вершине x. В настоящей заметке исследуются различные конструкции антиподальных графов, а также некоторые свойства их собственных функций.

Стоит отметить, в литературе рассматривается также более широкое определение антиподальности: граф $G = (V, E)$ диаметра d считается антиподальным, если отношение $R = \{(x, y) \in V^2 \mid d(x, y) = d\}$ является отношением эквивалентности. При таком подходе множество попарно антиподальных вершин может иметь мощность больше 2.

Всякий собственный вектор матрицы смежности графа естественным образом задает на его вершинах так называемую собственную функцию (см. [4]).

Avgustinovich, S.V., Gorkunov, E.V., Syomina, Yu.D. On antipodal properties for eigenfunctions of graphs.

Поступила 21 октября 2015 г., опубликована 27 ноября 2015 г.

Функция $\varphi : V \to R$ называется *собственной функцией* графа $G = (V, E)$, отвечающей собственному числу λ, если для всех $x \in V$ выполняется

$$\sum_{y \in S_1(x)} \varphi(y) = \lambda \varphi(x), \tag{1}$$

где $S_1(x)$ — сфера радиуса 1 с центром в вершине x.

Функцию, заданную на вершинах антиподального графа будем называть *плюс-антиподальной*, если ее значения на диаметрально противоположных вершинах совпадают. Если же упомянутые значения различаются лишь знаком, то функция *минус-антиподальная*. Собственное число λ графа G назовем *однородным*, если все собственные функции, отвечающие этому числу, обладают антиподальностью одного типа. Соответствующие числу λ собственное пространство и собственные функции также будем называть однородными.

Раскраска вершин графа называется *совершенной*, если для каждой вершины цветовой состав окружения однозначно определяется ее цветом. Это означает, что у всех одинаково окрашенных вершин мультинабор цветов соседей (параметры раскраски) всегда один и тот же. Граф называется *дистанционно регулярным*, если его дистанционная раскраска относительно любой вершины является совершенной с одними и теми же параметрами.

Хорошо известно, что собственные функции дистанционно регулярных графов являются дистанционно инвариантными [5]. Отсюда легко выводится свойство антиподальности собственных функций антиподальных дистанционно регулярных графов. Это означает, что каждая пара значений собственной функции на антиподальных вершинах в таком графе либо плюс-антиподальна, либо минус-антиподальна. При этом все функции, отвечающие одному собственному числу, имеют одинаковый тип антиподальности. Иными словами, все собственные числа антиподальных дистанционно регулярных графов однородны.

Свойство антиподальности зачастую бывает полезным при восстановлении комбинаторных объектов по частичной информации. В частности, как показано в [1], двоичный 1-совершенный код однозначно определяется набором своих вершин на двух средних слоях гиперкуба. В [2] с использованием свойства антиподальности выполнено восстановление двоичных равномерно упакованных кодов.

Можно заметить, что в основе метода восстановления, примененного в случае двоичного 1-совершенного кода, лежит лишь свойство антиподальности собственных функций и однородность собственных чисел. Другие свойства самого графа не являются существенными. Это наблюдение будет реализовано в разделе 3.

2. Разложение собственных функций в сумму антиподальных

Антиподальный граф назовем *жестким*, если для произвольной пары антиподальных вершин x и x' и любой третьей вершины y справедливо равенство $d(x, x') = d(x, y) + d(y, x')$. Граф назовем *симметрично антиподальным*, если инволюция, отображающая друг в друга вершины каждой антиподальной пары, является автоморфизмом этого графа.

Предложение 1. *Жесткий антиподальный граф является симметрично антиподальным.*

Доказательство. Действительно, предположим, что некоторая вершина y графа G соседствует с вершиной x, а вершина y' не является соседней с x'. В силу жесткости G, вершина y' лежит на некотором диаметре, соединяющем x и x'. По предположению, расстояние между вершинами y' и x' не меньше двух. Значит, расстояние между y и y' меньше диаметра. Противоречие. □

Заметим, что утверждение, обратное предложению 1, не верно. Контрпримером может служить гиперкуб, в котором удалена пара антиподальных ребер.

Следующая теорема является следствием более общих утверждений, доказанных в [3]. Для полноты изложения приведем ее с доказательством.

Предложение 2. *Любая собственная функция жесткого антиподального графа единственным образом представима в виде суммы плюс-антиподальной и минус-антиподальной собственных функций.*

Доказательство. Назовем два совпадающих действительных числа плюс-антиподальной парой, а различающиеся знаком — минус-антиподальной парой. Тот факт, что всякая пара действительных чисел (A, B) единственным образом представима в виде суммы плюс-антиподальной пары $((A+B)/2, (A+B)/2)$ и минус-антиподальной пары $((A-B)/2, (B-A)/2)$, легко проверяется непосредственно.

Таким образом получим представление заданной собственной функции φ в виде суммы плюс-антиподальной функции φ^+ и минус-антиподальной функции φ^-. В силу сказанного, такое представление единственно, причем для любой вершины x

$$\varphi^+(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(x')}{2} \qquad \text{и} \qquad \varphi^-(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x')}{2}.$$

Остается показать, что функции φ^+ и φ^- являются собственными. Здесь окажется полезным свойство симметрии жесткого антиподального графа, зафиксированное в предложении 1. Из него, в частности, получаем, что сферы $S_1(x)$ и $S_1(x')$ состоят из попарно антиподальных вершин. Это в частности означает, что имеют место равенства

$$\sum_{y\in S_1(x)} \varphi(y') = \sum_{y\in S_1(x')} \varphi(y) = \lambda\varphi(x').$$

Иначе говоря, суммирование по сфере $S_1(x)$ значений φ на вершинах, антиподальных вершинам $S_1(x)$, можно заменить на прямое суммирование по «антиподальной» сфере $S_1(x')$. С учетом этого, простая проверка определения (1) для функций φ^+ и φ^- завершает доказательство.

□

3. Восстановление собственных функций по двум средним слоям

Рассмотрим некоторый жесткий антиподальный граф $G = (V, E)$ нечетного диаметра d. Зафиксируем в нем пару антиподальных вершин o и o' из V и определим пару множеств L и L' следующим образом:

$$L = \{y \in V \mid d(y,o) = \frac{d-1}{2}\},$$
$$L' = \{y \in V \mid d(y,o) = \frac{d+1}{2}\}.$$

Множества L и L' далее будем называть *средними слоями* графа G. Заметим, что L и L' не пересекаются, и при замене o на o' просто меняются местами. Для нежестких графов этого гарантировать нельзя. Сформулируем основное утверждение этого раздела.

Теорема 1. *Произвольная собственная функция жесткого антиподального графа нечетного диаметра, отвечающая заданному однородному собственному числу, однозначно определяется множеством своих значений на двух средних слоях этого графа.*

Доказательство. Предположим от противного, что функции φ_1 и φ_2, отвечающие однородному собственному числу λ, совпадают на $L \cup L'$, но различаются в некоторой вершине $x \in V \setminus (L \cup L')$. Для определенности, положим $d(x, o) < \frac{d-1}{2}$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = \begin{cases} \varphi_1(y) - \varphi_2(y), & \text{если } d(y,o) \leqslant \frac{d+1}{2}; \\ 0, & \text{если } d(y,o) > \frac{d+1}{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что φ является собственной функцией графа G с тем же собственным числом λ и обладает антиподальностью того же типа, что и функции φ_1 и φ_2. При этом $\varphi(x) \neq 0$, в то время как $\varphi(x') = 0$, что противоречит антиподальности φ. $\square$

Отметим, что теорема 1 гарантирует однозначное восстановление функции только в рамках одного однородного собственного пространства. Собственные функции, отвечающие различным собственным числам, вообще говоря могут совпадать на двух средних слоях графа. К сожалению, условие однородности в теореме 1 также не может быть опущено, хотя предложение 2 и дает на это некоторые надежды. Также стоит добавить, что нетривиальные собственные функции жесткого антиподального графа четного диаметра могут быть равны всюду на его среднем слое.

4. Некоторые конструкции и предположения

Легко проверить, что декартово произведение жестких графов является жестким графом. В [6] описаны все жесткие антиподальные графы диаметра 3. Оказывается, почти все графы на n вершинах являются индуцированными подграфами жестких антиподальных графов диаметра 3 на $2n + 2$ вершинах. Таким образом, класс жестких антиподальных графов довольно богат, причем ограничение снизу на диаметр таких графов не является слишком обременительным, поскольку операция произведения приводит к росту этого параметра. С другой стороны, обескураживает малое число прямых конструкций.

Хотелось бы выдвинуть гипотезу, доказательство которой может обогатить семейство антиподальных графов. Пусть G — произвольный связный граф на n вершинах с множеством ребер E. Рассмотрим граф $S(G)$, множеством вершин которого являются все $n!$ нумераций вершин графа G. Определим две вершины в графе $S(G)$ смежными, если соответствующие нумерации графа G могут быть получены друг из друга одной транспозицией номеров на концах некоторого ребра G.

Очевидно, граф $S(G)$ регулярный степени $|E|$, причем представляется довольно правдоподобным, что если исходный граф G выбрать антиподальным, то и $S(G)$ тоже будет таковым. Однако доказательство этого факта неизвестно даже, когда G — цикл четной длины.

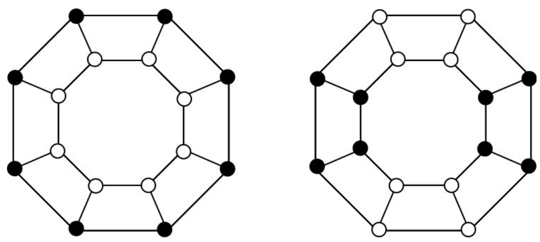

Рис. 1. Пример 2-раскрасок 8-призмы с одинаковыми параметрами, но разным типом антиподальности

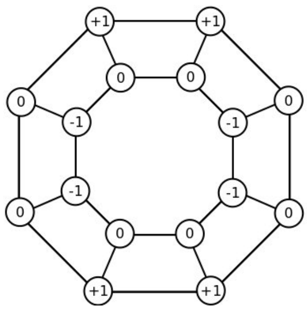

Рис. 2. Пример собственной функции, не обладающей свойством антиподальности

В общем случае свойство антиподальности не выполняется ни для собственных функций, ни для совершенных раскрасок (см. рис. 1, 2). Вместе с тем, это не означает невозможность восстановления соответствующей структуры по двум средним слоям.

Гипотеза 1. *Любая совершенная раскраска в жестком антиподальном графе однозначно восстанавливается по ее значениям на двух средних слоях графа.*

Гипотеза 2. *Любая совершенная 2-раскраска в жестком антиподальном графе обладает свойством либо плюс-антиподальности, либо минус-антиподальности.*

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания. В частности, им справедливо подмечено, что в случае четного диаметра теорема о восстановлении по двум слоям (в этом случае средний слой и один из соседних) будет также верна.

References

[1] С. В. Августинович, *Об одном свойстве совершенных бинарных кодов,* Дискрет. анализ и исслед. опер., Сер. 1, **2**:1 (1995), 4–6. Zbl 0846.94017

[2] Н. Н. Токарева, *О верхней оценке числа равномерно упакованных двоичных кодов,* Дискрет. анализ и исслед. опер., **14**:3 (2007), 90–97. MR2391922

[3] A. L. Andrew, *Eigenvectors of certain matrices,* Linear Algebra Its Appl., **7**:2 (1973), 151–162. MR0318179

[4] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application,* VEB Deutscher Verlag Wissenschaften, Berlin, 1980. MR0572262

[5] D. S. Krotov, *On weight distributions of perfect colorings and completely regular codes,* Des. Codes Cryptogr., **61**:3 (2011), 315–329. MR2831804

[6] D. Stevanović *Antipodal graphs of small diameter,* Filomat, **15** (2001), 79–83. MR2105099

Sergei Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: avgust@math.nsc.ru

Eugenii Vladimirovich Gorkunov
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: gorkunov@math.nsc.ru

Yulia Dmitrievna Syomina
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: jul.syomina@gmail.com