S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 868–873 (2015) УДК 517.938
DOI 10.17377/semi.2015.12.073 MSC 35L65, 37J35, 70H06

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПОТОКЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

С.В. АГАПОВ

Abstract. In this paper the magnetic geodesic flow on a 2-torus is considered. We study a semi-hamiltonian quasi-linear PDEs which is equivalent to the existence of polynomial in momenta first integral of magnetic geodesic flow on fixed energy level. It is known that diagonal metric associated with this system is Egorov one if degree of the first integral is equal to 2 or 3. In this paper we prove this fact in the case of existence of the first integral of any degree.

Keywords: semi-hamiltonian systems, Egorov metrics.

1. Введение

Рассмотрим геодезический поток в магнитном поле на двумерном торе. Зафиксируем уровень энергии и предположим, что существует дополнительный первый интеграл, полиномиальный по импульсам. Известно, что соответствующая квазилинейная система дифференциальных уравнений в частных производных является полугамильтоновой (см. [1]), то есть в гиперболической области она обладает инвариантами Римана и может быть представлена в виде законов сохранения. С каждой полугамильтоновой системой естественным образом связана диагональная метрика. В [1] доказано, что в случае интегралов степени 2 или 3 эта метрика является метрикой егоровского типа. В этой работе мы обобщаем этот результат на произвольную степень.

Напомним сначала некоторые результаты о геодезическом потоке в отсутствии магнитного поля. Существуют два вида римановых метрик на двумерном торе, для которых геодезический поток интегрируем. Если метрика имеет вид $ds^2 = \Lambda(\alpha x+\beta y)(dx^2+dy^2)$ или $ds^2 = (\Lambda_1(\alpha_1 x+\beta_1 y)+\Lambda_2(\alpha_2 x+\beta_2 y))(dx^2+dy^2)$,

---

Agapov, S.V., On the integrable magnetic geodesic flow on a 2-torus.

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00441).

Поступила 21 октября 2015 г., опубликована 30 ноября 2015 г.

то существует полиномиальный по импульсам первый интеграл степени 1 или 2. Неизвестно, существуют ли метрики с несводимыми полиномиальными интегралами более высоких степеней. Этот вопрос изучался в [2] – [5]. Если геодезический поток интегрируем, то на торе можно ввести глобальные полугеодезические координаты (t, x) (см. [6]), такие, что

$$ds^2 = g^2(t,x)dt^2 + dx^2, \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{g^2} + p_2^2\right).$$

Первый интеграл имеет вид

$$F = \frac{a_0}{g^n}p_1^n + \frac{a_1}{g^{n-1}}p_1^{n-1}p_2 + \ldots + \frac{a_{n-2}}{g^2}p_1^2p_2^{n-2} + \frac{a_{n-1}}{g}p_1p_2^{n-1} + a_np_2^n, \ a_k = a_k(t,x).$$

Условие $\dot{F} = \{F, H\} = 0$ эквивалентно квазилинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$U_t + A(U)U_x = 0 \tag{1}$$

на коэффициенты F. Здесь $U = (a_0, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1})^T, \ a_{n-1} = g, \ a_n = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2a_2 - na_0 \\ 0 & a_{n-1} & \ldots & 0 & 0 & 3a_3 - (n-1)a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 & (n-1)a_{n-1} - 3a_{n-3} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & na_n - 2a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Система (1) является полугамильтоновой (см. [6]). Это означает, что её можно записать в виде законов сохранения, то есть существует такая замена переменных $U^T \to (G_1(U), \ldots, G_n(U))$, что для некоторых $F_1(U), \ldots, F_n(U)$ верны следующие соотношения

$$(G_j(U))_t + (F_j(U))_x = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Более того, в гиперболической области, где все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A вещественны и попарно различны, система (1) обладает инвариантами Римана, то есть существует такая замена переменных

$$U^T \to (r_1(U), \ldots, r_n(U)),$$

что (1) можно записать в виде

$$(r_j)_t + \lambda_j(r)(r_j)_x = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Полугамильтоновы системы введены и изучались С.П. Царевым в [7], [8] (см. также [9]).

В [10] изучался вопрос существования дополнительного первого интеграла геодезического потока, полиномиального по импульсам, произвольной степени в изотермических координатах, $ds^2 = \Lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$. Существование первого интеграла вида

$$F = a_0p_1^n + a_1p_1^{n-1}p_2 + \ldots + a_np_2^n, \qquad a_k = a_k(x,y),$$

с учетом теоремы Колокольцова (см. [5])

$$a_n = c_1 + a_{n-2} - a_{n-4} + \ldots, \qquad a_{n-1} = c_2 + a_{n-3} - a_{n-5} + \ldots,$$

(здесь c_1, c_2 — некоторые константы), ведет к квазилинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0, \tag{2}$$

где $U = (a_0, \dots, a_{n-2}, \Lambda)^T$. Системы такого вида изучались, например, в [11]. Система (2) также является полугамильтоновой (в тех областях, где A или B невырождена).

Напомним, что для полугамильтоновой системы выполняются следующие соотношения на собственные значения:

$$\partial_{r_j} \frac{\partial_{r_i} \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \partial_{r_i} \frac{\partial_{r_j} \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}, \qquad i \neq j \neq k \neq i.$$

Это означает, что существует такая диагональная метрика

$$ds^2 = H_1^2(r)dr_1^2 + \ldots + H_n^2(r)dr_n^2, \tag{3}$$

что её символы Кристоффеля удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Gamma^k_{ki} = \frac{\partial_{r_i} \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}, \qquad i \neq k.$$

В [10] доказано, что метрика (3), ассоциированная с системой (2), является егоровской, то есть коэффициенты вращения β_{kl} симметричны:

$$\beta_{kl} = \beta_{lk}, \qquad \beta_{kl} = \frac{\partial_{r_k} H_l}{H_k}, \qquad k \neq l,$$

или, эквивалентно, существует такая функция $a(r)$, что $\partial_{r_k} a(r) = H_k^2(r)$. Здесь H_i — коэффициенты Ламе метрики (3), $H_i^2 = g_{ii}$. Следуя [12], соответствующие полугамильтоновы системы мы будем называть егоровскими.

Согласно теореме Павлова и Царева (см. [12]), если система нераспадающаяся ($\partial_{r_i} \lambda_k \neq 0,\ i \neq k$), то её егоровость эквивалентна наличию у нее двух законов сохранения специального вида:

$$F_x + G_y = 0, \qquad F_y + H_x = 0.$$

В [10] эти законы найдены в явном виде для системы (2).

В данной работе мы получаем аналогичные результаты для магнитного геодезического потока.

2. Основная теорема

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}_{mg}, \qquad \dot{p}_j = \{p_j, H\}_{mg}, \qquad j = 1, 2 \tag{4}$$

на двумерном торе в магнитном поле с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$ и скобкой Пуассона следующего вида:

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) + \Omega(x^1, x^2) \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

Если $\{F, H\}_{mg} = 0$, то функция F является первым интегралом геодезического потока (4). Магнитные геодезические потоки (или, эквивалентно, системы с гироскопическими силами) изучались, например, в [13] – [16].

Выберем конформные координаты (x, y), в которых $ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $H = \frac{p_1^2+p_2^2}{2\Lambda}$. Зафиксируем уровень энергии $H = \frac{1}{2}$. Тогда можно параметризовать импульсы следующим образом:

$$p_1 = \sqrt{\Lambda}\cos\varphi, \qquad p_2 = \sqrt{\Lambda}\sin\varphi.$$

Уравнения (4) примут вид

$$\dot{x} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\Lambda}}, \qquad \dot{y} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\Lambda}}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\Lambda_y}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}\cos\varphi - \frac{\Lambda_x}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}\sin\varphi - \frac{\Omega}{\Lambda}.$$

Следуя [1], будем искать первый интеграл F в виде

$$F(x, y, \varphi) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k(x, y)e^{ik\varphi}. \tag{5}$$

Здесь $a_k = u_k + iv_k, a_{-k} = \bar{a}_k$. Условие $\dot{F} = 0$ эквивалентно следующему уравнению

$$F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi + F_\varphi\left(\frac{\Lambda_y}{2\Lambda}\cos\varphi - \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}\sin\varphi - \frac{\Omega}{\sqrt{\Lambda}}\right) = 0. \tag{6}$$

Подставим (5) в (6) и приравняем к нулю коэффициенты при $e^{ik\varphi}$. Мы получим

$$\frac{\Lambda_y}{2\Lambda}\frac{i(k-1)a_{k-1} + i(k+1)a_{k+1}}{2} - \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}\frac{i(k-1)a_{k-1} - i(k+1)a_{k+1}}{2i} + \\ + \frac{(a_{k-1})_x + (a_{k+1})_x}{2} + \frac{(a_{k-1})_y - (a_{k+1})_y}{2i} - \frac{ik\Omega a_k}{\sqrt{\Lambda}} = 0, \tag{7}$$

где $k = 0, \ldots, N+1,\ a_k = 0$ при $k > N$.

После исключения магнитного поля Ω (см. ниже) получаем квазилинейную систему дифференциальных уравнений на a_j вида

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0, \tag{8}$$

где $U = (\Lambda, u_0, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1})^T$. Мы не будем её выписывать явно ввиду громоздкости. В [1] показано, что она является полугамильтоновой для любого N. Там же доказано, что в случае $N = 2, 3$ система (8) является егоровской. В этой работе мы обобщаем этот результат на случай произвольного N.

Теорема 1. *Система* (8) *является егоровской для любого* N.

3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства нам потребуются лишь некоторые уравнения системы (7). При $k = N+1$ получаем соотношение

$$(a_N\Lambda^{-\frac{N}{2}})_x - i(a_N\Lambda^{-\frac{N}{2}})_y = 0,$$

из которого следует, что можно положить $a_N = \Lambda^{\frac{N}{2}}$ (см. [1]).

Положим $k = N$ в (7) и рассмотрим действительную и мнимую части полученного уравнения. Отсюда найдем выражение для магнитного поля

$$\Omega = \frac{(N-1)(\Lambda_y u_{N-1} - \Lambda_x v_{N-1}) + 2\Lambda((v_{N-1})_x - (u_{N-1})_y)}{4N\Lambda^{\frac{N+1}{2}}}, \tag{9}$$

а также следующее соотношение:

$$2\Lambda((u_{N-1})_x + (v_{N-1})_y) = (N-1)(v_{N-1}\Lambda_y + u_{N-1}\Lambda_x). \tag{10}$$

Сделаем замены следующего вида:

$$f_k = u_k \Lambda^{-\frac{k}{2}}, \qquad g_k = v_k \Lambda^{-\frac{k}{2}}, \qquad k = 0, \dots, N-1.$$

Тогда соотношения на коэффициенты a_k заметно упростятся. Из (9), (10) следует

$$\Omega = \frac{(g_{N-1})_x - (f_{N-1})_y}{2N}, \tag{11}$$

$$(f_{N-1})_x + (g_{N-1})_y = 0. \tag{12}$$

Полагая $k = N-1$ в (7), получаем уравнения:

$$(N-1) f_{N-1}((g_{N-1})_x - (f_{N-1})_y) + N((f_{N-2})_y - (g_{N-2})_x - N\Lambda_y) = 0,$$

$$(N-1) g_{N-1}((g_{N-1})_x - (f_{N-1})_y) + N((f_{N-2})_x + (g_{N-2})_y + N\Lambda_x) = 0,$$

которым, с учетом (12), можно придать следующий вид:

$$R_x + \left(\frac{N-1}{2}(g_{N-1}^2 - f_{N-1}^2) - N^2\Lambda + N f_{N-2} \right)_y = 0, \tag{13}$$

$$R_y + \left(\frac{N-1}{2}(f_{N-1}^2 - g_{N-1}^2) - N^2\Lambda - N f_{N-2} \right)_x = 0, \tag{14}$$

где

$$R = (N-1) f_{N-1} g_{N-1} - N g_{N-2}.$$

Тем самым, мы показали, что система (8) действительно является системой егоровского типа. Теорема 1 доказана.

References

[1] M. Bialy, A.E. Mironov, *New semi-hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces*, Central European Journal of Mathematics, **10**:5 (2012), 1596 – 1604. MR2949640

[2] M.V. Pavlov, S.P. Tsarev, *On Local Description of Two-Dimensional Geodesic Flows with a Polynomial First Integral*, arXiv: 1509.03084v1.

[3] V.V. Kozlov et al., *Polynomial integrals of geodesic flows on a two-dimensional torus*, Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics, **83**:2 (1995), 469 – 481. MR1317298

[4] V.V. Kozlov et al., *On the integrability of hamiltonian systems with toral position space*, Mathematics of the USSR–Sbornik, **63**:1 (1989), 121 – 139. MR0933488

[5] V.N. Kolokol'tsov, *Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities*, Mathematics of the USSR–Izvestiya, **21**:2 (1983), 291 – 306. Zbl 0548.58028

[6] M. Bialy, A. E. Mironov, *Rich quasi-linear system for integrable geodesic flow on 2-torus*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, **29**:1 (2011), 81 – 90. MR2725282

[7] S.P. Tsarev, *On Poisson brackets and one-dimensional hamiltonian systems of hydrodynamic type*, Doklady Mathematics, **31** (1985), 488 – 491. MR0796577

[8] S.P. Tsarev, *The geometry of hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method*, Mathematics of the USSR–Izvestiya, **37**:2 (1991), 397 – 419. MR1086085

[9] B. Sevennec, *Geometrie des systemes de lois de conservation*, Memories, Soc.Math.de France, Marseille, **56** (1994). MR1259465

[10] M. Bialy, A.E. Mironov, *Integrable geodesic flows on 2-torus: formal solutions and variational principle*, Journal of Geometry and Physics, **87**:1 (2015), 39 – 47. MR3282356

[11] M. Bialy, *Richness or semi-hamiltonicity of quasi-linear systems that are not in evolution form*, Quarterly of Applied Math. 2013. **71**:4 (2013), 787 – 796. MR3136996

[12] M.V. Pavlov, S.P. Tsarev, *Tri-hamiltonian structures of Egorov Systems of hydrodynamic type*, Functional Analysis and its Applications, **37**:1 (2003), 32 – 45. MR1988008

[13] V.V. Kozlov, *Symmetries, topology, and resonances in Hamiltonian mechanics*, Springer, Verlag, Berlin. 1996. MR1411677

[14] V.V. Ten, *Polynomial first integrals for systems with gyroscopic forces*, Math. Notes, **68**:1 (2000), 135 – 138. MR1818972

[15] S.V. Bolotin, *First integrals of systems with gyroscopic forces*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., **6** (1984), 75 – 82. MR0775310

[16] I.A. Taimanov, *On an integrable magnetic geodesic flow on the two-torus*, arXiv: 1508.03745v1.

Sergei Vadimovich Agapov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: agapov.sergey.v@gmail.com