S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 874–883 (2015) УДК 519.23
DOI 10.17377/semi.2015.12.074 MSC 62F12

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЯВНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ

А.А. КАЛЕНЧУК, А.И. САХАНЕНКО

Abstract. We construct and investigate a class of explicit estimators for the unknown parameter in a logarithmic regression problem. We present general conditions for these estimators to be asymptotically normal. It is the fourth class of non-linear regression problems for which such explicit estimators are found.

Keywords: logarithmic regression, difficulties in the least squares method, explicit estimators of the parameters, asymptotically normal estimators.

1. Введение

Пусть наблюдается последовательность случайных величин $\{Y_i\}$, для которых справедливо представление

$$Y_i = \ln(1 + \alpha X_i) + \varepsilon_i, \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемая последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\{X_i\}$ — известная числовая последовательность. Наша цель — получить и исследовать явную оценку неизвестного параметра α.

Стандартный способ решения такого рода задач состоит в построении оценок по методу наименьших квадратов. Напомним, что такая оценка выглядит следующим образом:

$$\alpha_n^* := arg \min_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \Big(Y_i - \ln(1 + \alpha X_i)\Big)^2. \tag{2}$$

Kalenchuk, A.A., Sakhanenko, A.I., The existence of explicit asymptotically normal estimators of an unknown parameter in a logarithmic regression problem.

Работа поддержана РФФИ (гранты РФФИ 15-01- 07460а и 13-01-12415офи-м).

Поступила 25 октября 2015 г., опубликована 1 декабря 2015 г.

Однако функция в правой части (2) может иметь до n локальных минимумов, и поиск таких оценок приводит к серьезным вычислительным трудностям (см., например, [1]), особенно, если у нас нет информации о компакте, в котором содержится неизвестный параметр.

В работе удалось построить целый класс статистик, являющихся явными оценками неизвестного параметра, для нахождения которых не нужно использовать сложные вычислительные процедуры типа метода наименьших квадратов. Эти оценки будут описаны в §2 (см. формулу (5)), как дробно-линейные функции от функций от наблюдений и специально подобранных констант. Простейшие такие оценки имеют следующий вид:

$$\hat{\alpha}_{n0} := \frac{n\sum_{i=1}^n X_i e^{Y_i} - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n e^{Y_i}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n e^{Y_i} - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i e^{Y_i}}, \tag{3}$$

$$\hat{\alpha}_{n\infty} := \frac{\sum_{i=1}^n 1/X_i^2 \sum_{i=1}^n e^{Y_i}/X_i - \sum_{i=1}^n 1/X_i \sum_{i=1}^n e^{Y_i}/X_i^2}{n\sum_{i=1}^n e^{Y_i}/X_i^2 - \sum_{i=1}^n 1/X_i \sum_{i=1}^n e^{Y_i}/X_i}. \tag{4}$$

В теореме 1 из §2 будут приведены достаточно общие и простые условия, при которых изучаемые оценки будут асимптотически нормальными. В явном виде будет получена асимптотическая дисперсия этих оценок, а в §3 нам удастся минимизировать эту дисперсию. Однако после исследований в §3 и §4 мы увидим, что в нашем классе оценок не существует оптимальной оценки, имеющей минимальную асимптотическую дисперсию.

Тем не менее, в §5 мы приведем практическую рекомендацию по выбору «приблизительно оптимальных» оценок из вводимого класса. В частности, простейшими из этих оценок будут статистики, приведенные в (3) и (4).

Подчеркнем, что ранее было известно лишь три класса задач нелинейной регрессии, в которых удалось найти явные асимптотически нормальные оценки неизвестного параметра (см. [2], [3], [4]). В данной же работе мы строим такие оценки для четвертого класса задач нелинейной регрессии.

Ниже в работе все пределы берутся при $n \to \infty$.

2. Основные результаты

Далее в статье будем изучать класс статистик вида

$$\hat{\alpha}_n := \frac{B_n \sum_{i=1}^n a_{ni} e^{Y_i}}{A_n \sum_{i=1}^n b_{ni} e^{Y_i}}, \tag{5}$$

и будем считать выполненными следующие условия.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ А. Случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ — независимы и одинаково распределены, причем

$$0 < \sigma^2 := \mathbf{D} e^{\varepsilon_1} < \infty, \tag{6}$$

а числовая последовательность $\{X_i \geq 0\}$ такова, что $X_{n_0} \neq X_1$ при некотором $n_0 < \infty$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ Б. Число наблюдений $n \geq n_0$, а постоянные $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$ подобранны таким образом, что

$$\sum_{i=1}^n a_{ni} = 0 \quad \text{и} \quad A_n := \sum_{i=1}^n a_{ni} X_i \neq 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni} X_i = 0 \quad \text{и} \quad B_n := \sum_{i=1}^{n} b_{ni} \neq 0. \tag{8}$$

Введем обозначения :

$$\theta := \mathbf{E} e^{\varepsilon_i}, \quad \eta_i := e^{\varepsilon_i} - \theta, \quad \sigma_i := 1 + \alpha X_i, \quad Z_i := e^{Y_i}, \tag{9}$$

$$u_{ni} := (a_{ni}/A_n - \alpha b_{ni}/B_n)\sigma_i.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения А, Б, и, кроме того,*

$$\max_{i \le n} u_{ni}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^2 \to 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 \sigma_i^2 \Big/ B_n^2 \to 0. \tag{11}$$

В этом случае $\hat{\alpha}_n$ является асимптотически нормальной оценкой неизвестного параметра α, т.е. при $n \to \infty$

$$\frac{\hat{\alpha}_n - \alpha}{d_n} \Rightarrow N_{(0,1)}, \qquad \text{где} \qquad d_n^2 := \frac{\sigma^2}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^2. \tag{12}$$

Прежде всего поясним идею, лежащую в основе данного утверждения. Заметим, что в обозначениях (9) уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$Z_i = \theta + \alpha\theta X_i + \sigma_i \eta_i, \tag{13}$$

где $\{\eta_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними. Домножая уравнения (13) на числа $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$ и учитывая формулы (7) и (8), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni} Z_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}((1 + X_i\alpha)\theta + \sigma_i\eta_i) = \alpha\theta A_n + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\sigma_i\eta_i, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ni}((1 + X_i\alpha)\theta + \sigma_i\eta_i) = \theta B_n + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}\sigma_i\eta_i. \tag{15}$$

Естественно предположить, что суммами погрешностей, стоящих в крайних правых частях формул (14) и (15) можно пренебречь по сравнению с растущими величинами A_n и B_n. Поделив соотношение (15) на B_n мы получим, что статистику $\sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i / B_n$ естественно рассматривать как оценку для параметра θ. А разделив (15) на A_n, нетрудно прийти к мысли интерпретировать $\sum_{i=1}^{n} a_{ni} Z_i / A_n$ как оценку для произведения параметров $\alpha\theta$. Разделив теперь вторую оценку на первую, мы получим статистику (5) как возможную оценку для интересующего нас параметра α.

Замечание 1. *Подчеркнем, что основной идеей в работе является введение искуственного мешающего параметра θ и его предварительное оценивание.*

Отметим еще, что в статье мы не предполагаем, что погрешности $\{\varepsilon_i\}$ имеют нулевые средние.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству теоремы 1. Далее нам потребуются два известных вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\{\eta_i\}$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины и выполнено условие* (10). *Тогда случайные величины* $\{u_{ni}\eta_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга и*

$$U_n \big/ \sqrt{\mathbf{D}U_n} \Rightarrow N_{(0,1)} \quad \text{при} \quad U_n = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}\eta_i.$$

Лемма 2. *Для того чтобы* $V_n/\theta \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, *достаточно выполнения условий* $\mathbf{E}V_n = \theta$ *и* $\mathbf{D}V_n/\theta^2 \to 0$.

Последнее утверждение является очевидным следствием из неравенства Чебышева.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим выражение:

$$\hat{\alpha} - \alpha = \frac{B_n \sum_{i=1}^{n} a_{ni} Z_i}{A_n \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i} - \alpha = \frac{B_n \sum_{i=1}^{n} a_{ni} Z_i - \alpha A_n \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i}{A_n \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i} = \frac{U_n}{V_n}, \tag{16}$$

где

$$U_n := \frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^{n} a_{ni} Z_i - \alpha \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i, \quad V_n := \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i. \tag{17}$$

Используя (14) и (15), получаем:

$$U_n = \frac{1}{A_n}(\alpha\theta A_n + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\sigma_i\eta_i) - \alpha \frac{1}{B_n}(\theta B_n + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}\sigma_i\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}\eta_i,$$

$$V_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} b_{ni} Z_i = \frac{1}{B_n}(\theta B_n + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}\sigma_i\eta_i) = \theta + \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} b_{ni}\sigma_i\eta_i. \tag{18}$$

Поскольку независимые и одинаково распределенные случайные величины $\{\eta_i\}$ имеют нулевые средние, то

$$\mathbf{E}U_n = 0, \qquad \mathbf{D}U_n = \mathbf{D}\sum_{i=1}^{n} u_{ni}\eta_i = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^2 \mathbf{D}\eta_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^2. \tag{19}$$

$$\mathbf{E}V_n = \theta, \qquad \frac{\mathbf{D}V_n}{\theta^2} = \frac{\sigma^2}{\theta^2 B_n^2} \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 \sigma_i^2. \tag{20}$$

Теперь из лемм 1 и 2 с учетом условий (10) и (11) вытекают сходимости

$$U_n \big/ \sqrt{\mathbf{D}U_n} \Rightarrow N_{(0,1)}, \qquad V_n/\theta \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Эти факты позволяют нам вернуться к рассмотрению всей дроби U_n/V_n, введенной в (16). Имеем:

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\mathbf{D}U_n}}\theta = \frac{\frac{U_n}{\sqrt{\mathbf{D}U_n}}}{\frac{V_n}{\theta}} \Rightarrow N_{(0,1)}.$$

Таким образом, мы доказали сходимость (12) при ${d_n}^2 = \mathbf{D}U_n/\theta^2$. □

3. Минимизация асимптотической дисперсии d_n^2

Из теоремы 1 следует, что оценка $\hat{\alpha}$ тем точнее оценивает неизвестный параметр α, чем меньше ее асимптотическая дисперсия d_n^2. По этой причине возникает естественная задача минимизировать d_n^2 по $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$. Положим

$$C_k = C_{nk}(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^k}{{\sigma_i}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^k}{(1+\alpha X_i)^2}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{21}$$

Заметим, что в этих обозначениях

$$\Delta = \Delta_n(\alpha) := C_0C_2 - C_1^2 = C_0 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{C_1}{C_0})^2 \frac{1}{{\sigma_i}^2} > 0 \quad \forall\ n \geq n_0. \tag{22}$$

Учитывая строгое неравенство в (22), введем еще обозначения

$$D_k = D_{nk}(\alpha) := C_k + \alpha C_{k+1}, \quad v_{ni} := (X_iD_0 - D_1)/(\sigma_i^2\Delta). \tag{23}$$

Теорема 2. *Пусть предположения А и Б верны при некотором фиксированном n. Тогда*

$$d_n^2 \geq d_{n,opt}^2 := \sigma^2 n/(\theta^2\Delta). \tag{24}$$

При этом равенство в (24) имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_{ni} = K_1(\alpha b_{ni}/B_n + v_{ni}), \quad \forall\ i = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

где $K_1 \neq 0$ — произвольная величина.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству теоремы 2.

Лемма 3. *Пусть предположения А и Б верны при некотором фиксированном n. Тогда справедливо следующее соотношение*

$$\theta^2 d_n^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^2 = \sum_{i=1}^{n} v_{ni}^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{ni} - v_{ni}\sigma_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} v_{ni}^2\sigma_i^2, \tag{26}$$

причем равенство в (26) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$u_{ni} = v_{ni}\sigma_i, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ni}^2 = \sum_{i=1}^{n} (v_{ni}\sigma_i + (u_{ni} - v_{ni}\sigma_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_{ni}^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{ni} - v_{ni}\sigma_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} v_{ni}\sigma_i(u_{ni} - v_{ni}\sigma_i). \tag{28}$$

Покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Используя определения величин u_{ni} и v_{ni} из (9) и (23), получим

$$S := \sum_{i=1}^{n} v_{ni}\sigma_i(u_{ni} - v_{ni}\sigma_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_iD_0 - D_1}{\sigma_i\Delta} u_{ni} - \frac{X_iD_0 - D_1}{\sigma_i\Delta} v_{ni}\sigma_i \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_iD_0}{\sigma_i} u_{ni} - \frac{D_1}{\sigma_i} u_{ni} - \frac{X_iD_0}{\sigma_i} v_{ni}\sigma_i + \frac{D_1}{\sigma_i} v_{ni}\sigma_i \right).$$

Распишем каждое слагаемое, используя условия (7) и (8):

$$S_1 := D_0 \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sigma_i} u_{ni} = D_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i a_{ni}}{A_n} - \alpha \frac{X_i b_{ni}}{B_n} \right) = D_0,$$

$$S_2 := D_1 \sum_{i=1}^n \frac{u_{ni}}{\sigma_i} = D_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{ni}}{A_n} - \alpha \frac{b_{ni}}{B_n} \right) = -\alpha D_1,$$

$$S_3 := D_0 \sum_{i=1}^n X_i v_{ni} = \frac{D_0}{\Delta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i^2 D_0 - X_i D_1}{\sigma_i^2} \right) = \frac{D_0}{\Delta} (C_2 D_0 - C_1 D_1) = D_0,$$

$$S_4 := D_1 \sum_{i=1}^n v_{ni} = \frac{D_1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \frac{X_i D_0 - D_1}{\sigma_i^2} = \frac{D_1}{\Delta} (C_1 D_0 - C_0 D_1) = -\alpha D_1.$$

Таким образом, $S = (S_1 - S_2 - S_3 + S_4)/D = 0$.

Тем самым из (28) следует (26). А из (26) очевидно вытекает и последнее утверждение леммы 3. □

Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что

$$\theta^2 d_{n,opt}^2 / \sigma^2 = \sum_{i=1}^n v_{ni}^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i=1}^n \Big(D_0^2 \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} - 2 D_0 D_1 \frac{X_i}{\sigma_i^2} + \frac{D_1^2}{\sigma_i^2} \Big)$$
$$= \frac{1}{\Delta^2} (C_2 D_0^2 - 2 D_0 D_1 C_1 + D_1^2 C_0)$$
$$= \frac{1}{\Delta^2} \Big(C_2 (C_0 + \alpha C_1)^2 - 2 C_1 (C_0 + \alpha C_1)(C_1 + \alpha C_2) + (C_1 + \alpha C_2)^2 C_0 \Big)$$
$$= \frac{1}{\Delta^2} \Big((C_2 C_0^2 - C_0 C_1^2) + 2\alpha C_1 (C_0 C_2 - C_1^2) + \alpha^2 C_2 (C_0 C_2 - C_1^2) \Big)$$
$$= \frac{1}{\Delta^2} (C_0 \Delta + 2\alpha C_1 \Delta + \alpha^2 C_2 \Delta) = \frac{n}{\Delta}.$$

Здесь мы воспользовались определениями (22) и (23), а также тем фактом, что $C_0 + 2\alpha C_1 + +\alpha^2 C_2 = n$. Таким образом, утверждение (24) теоремы 2 превращается в очевидное следствие неравенства (26) леммы 3. Если в (24) имеем равенство, то и в (26) тоже, а, значит, справедливо (27). В силу (9) это означает, что

$$u_{ni} = \Big(\frac{a_{ni}}{A_n} - \alpha \frac{b_{ni}}{B_n} \Big) \sigma_i = v_{ni} \sigma_i,$$

откуда

$$a_{ni} = K_1 (\frac{\alpha b_{ni}}{B_n} + v_{ni}),$$

где $K_1 = A_n$, что совпадает с выражением (25).

Обратно, если (25) верно при некотором $K_1 \neq 0$, то в силу определения (9)

$$u_{ni} = \Big(\frac{K_1 (\alpha b_{ni}/B_n + v_{ni})}{K_1 \sum_{i=1}^n v_{ni} X_i} - \frac{\alpha b_{ni}}{B_n} \Big) \sigma_i,$$

где

$$\sum_{i=1}^n v_{ni} X_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2 D_0 - X_i D_1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{\Delta} (C_2 D_0 - C_1 D_1)$$
$$= \frac{1}{\Delta} \Big(C_2 (C_0 + \alpha C_1) - C_1 (C_1 + \alpha C_2) \Big) = \frac{1}{\Delta} \Delta = 1,$$

откуда следует, что верна формула (27). Значит, ввиду леммы 3, в (26) и (24) имеют место равенства.

□

4. Дополнительная оптимизация

С целью расширить область применения теоремы 1 естественно попытаться максимально ослабить условие (11), минимизируя выражение в его левой части путем выбора последовательности $\{b_{ni}\}$. В силу теоремы 2 (см. подробности в приводимом ниже следствии 1) такой предварительный выбор последовательности $\{b_{ni}\}$ не мешает оптимизировать асимптотическую дисперсию изучаемых оценок, поскольку у нас всегда есть возможность дальнейшего «подстраивания» последовательности $\{a_{ni}\}$ по формуле (25).

Теорема 3. *Если при данном n верны предположения A и Б, то*

$$Q_n := \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 \sigma_i^2 / B_n^2 \geq Q_{n,opt} := C_2/\Delta. \tag{29}$$

При этом равенство в (29) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$b_{ni} = K_2 (C_2 - C_1 X_i)/\sigma_i^2 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \tag{30}$$

где $K_2 \neq 0$ — произвольная величина.

Введем обозначения:

$$b_{ni}^*(\alpha) := \frac{C_2(\alpha) - C_1(\alpha) X_i}{(1+\alpha X_i)^2}, \quad a_{ni}^*(\alpha) := \frac{C_0(\alpha) X_i - C_1(\alpha)}{(1+\alpha X_i)^2}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{31}$$

Следствие 1. *Если верны предположения A и Б, то равенства в* (24) *и* (29) *имеют место одновременно тогда и только тогда, когда*

$$b_{ni} = K_2 b_{ni}^*(\alpha) \quad \text{и} \quad a_{ni} = K_3 a_{ni}^*(\alpha) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

где $K_2 \neq 0$ и $K_3 \neq 0$ - произвольные величины.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству теоремы 3 и следствия 1. Положим

$$u_i := b_{ni}\sigma_i / B_n, \qquad v_i := b_{ni}^*(\alpha)/\Delta = (C_2 - C_1 X_i)/\sigma_i^2 \Delta. \tag{33}$$

Лемма 4. *При любых $\{b_{ni}\}$, удовлетворяющих* (8), *справедливо соотношение:*

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i\sigma_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \sigma_i^2 = Q_{n,opt}. \tag{34}$$

Причем равенство в (34) достигается тогда и только тогда, когда

$$u_i = v_i \sigma_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Доказательство. Доказательство аналогично выводу Леммы 3. Рассмотрим выражение

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (v_i\sigma_i + (u_i - v_i\sigma_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i\sigma_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} v_i\sigma_i (u_i - v_i\sigma_i). \tag{36}$$

Покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Из определений (33) имеем

$$\tilde{S} := \sum_{i=1}^{n} v_i\sigma_i(u_i - v_i\sigma_i) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_2 - C_1X_i}{\sigma_i}u_i - \frac{C_2 - C_1X_i}{\sigma_i}v_i\sigma_i\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_2}{\sigma_i}u_i - \frac{C_1X_i}{\sigma_i}u_i - C_2v_i + C_1X_iv_i\right).$$

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно, учитывая условия (7) и (8).

$$\tilde{S}_1 := C_2\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\sigma_i} = C_2\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{ni}}{B_n} = C_2,$$

$$\tilde{S}_2 := C_1\sum_{i=1}^{n}\frac{X_iu_i}{\sigma_i} = C_1\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{ni}\sigma_iX_i}{\sigma_i} = 0,$$

$$\tilde{S}_3 := C_2\sum_{i=1}^{n}v_i = \frac{C_2}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_2 - C_1X_i}{\sigma_i^2} = \frac{C_2}{\Delta}(C_2C_0 - C_1^2) = C_2,$$

$$\tilde{S}_4 = C_1\sum_{i=1}^{n}X_iv_i = C_1\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{C_2 - C_1X_i}{\sigma_i^2} = C_1(C_2C_1 - C_1C_2) = 0.$$

Следовательно, $\tilde{S} = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4)/\Delta = 0$.

Таким образом, из (36) вытекает (34), а из него немедленно следуют остальные утверждения леммы 4. □

Доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что

$$Q_{n,opt} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2\sigma_i^2 = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(C_2 - C_1X_i)^2}{\sigma_i^2} = \frac{1}{\Delta^2}(C_2^2C_0 - 2C_1^2C_2 + C_1^2C_2) =$$
$$= \frac{1}{\Delta^2}C_2(C_0C_2 - C_1^2) = \frac{C_2}{\Delta}.$$

Таким образом из утверждения (34) леммы 4 очевидно следует неравенство (29) теоремы 3. Если же в (29) имеем равенство, то справедливо равенство и в (34), а потому справедливо (35). Но в силу обозначений (33) это означает, что

$$u_i := b_{ni}\sigma_i/B_n = \sigma_iv_i = (C_2 - C_1X_i)/\sigma_i\Delta.$$

Но отсюда вытекает (30) при $K_2 = B_n/\Delta$.

Обратно, если (30) верно при некотором $K_2 \neq 0$, то, в силу определения (8), выражение b_{ni}/B_n не зависит от K_2 и, значит, верно (35). В этом случае (34) превращается в тождество, из которого немедленно следует равенство в (29). □

Доказательство следствия 1. Ранее было показано, что равенства в условиях теорем 2 и 3 достигаются тогда и только тогда, когда при всех $i = 1, \ldots, n$

$$a_{ni} = K_1(\alpha b_{ni}/B_n + v_{ni}),$$
$$b_{ni} = K_2(C_2 - C_1X_i)/\sigma_i^2 = K_4b_{ni}^*(\alpha).$$

Подставим второе равенство в первое и учтем, что

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ni} = K_2(C_0C_2 - C_1^2) = K_2\Delta$$

в силу определений (8), (21) и (22). В итоге получим

$$a_{ni} = K_1(\alpha K_4 b^*_{ni}/B_n + v_{ni}) = K_1(\alpha \frac{C_2 - C_1 X_i}{\sigma_i^2 \Delta} + \frac{X_i D_0 - D_1}{\sigma_i^2 \Delta})$$

$$= \frac{K_1}{\sigma_i^2 \Delta}(C_0 X_i - C_1) = \frac{K_1}{\Delta} a^*_{ni}(\alpha) = K_3 a^*_{ni}(\alpha).$$

□

5. Практическая рекомендация

В следствии 1 найден явный вид оптимальных, в некотором смысле, величин $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$. Однако, эти оптимальные величины оказались функциями от неизвестного параметра α. Поэтому мы не можем подставить эти оптимальные величины в формулу (5), так как величина $\hat{\alpha}_n$ обязана быть статистикой. Значит, не существует оптимальной оценки в классе статистик вида (5).

С целью обойти эту проблему мы можем порекомендовать вместо оптимальных величин $\{a_{ni} = a^*_{ni}(\alpha)\}$ и $\{b_{ni} = b^*_{ni}(\alpha)\}$ использовать их приближения $\{a_{ni} = a^*_{ni}(\alpha_0)\}$ и $\{b_{ni} = b^*_{ni}(\alpha_0)\}$ при некоторых специально выбранных α_0. Получающуюся в этом случае оценку $\hat{\alpha}_{n,\alpha_0}$ можно представить в виде

$$\hat{\alpha}_{n,\alpha_0} := \frac{C_{n0}(\alpha_0)E_{n1}(\alpha_0) - C_{n1}(\alpha_0)E_{n0}(\alpha_0)}{C_{n2}(\alpha_0)E_{n0}(\alpha_0) - C_{n1}(\alpha_0)E_{n1}(\alpha_0)}, \tag{37}$$

где использованы следующие обозначения

$$E_{nk}(\alpha_0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^k e^{Y_i}}{(1+\alpha_0 X_i)^2}, \quad C_{nk}(\alpha_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^k}{(1+\alpha_0 X_i)^2}.$$

Конечно, мы рекомендуем постараться выбрать α_0 «как можно ближе» к неизвестному α. В частности, если мы ожидаем, что α «достаточно маленькое», то можно порекомендовать использовать оценку из (3), которая является частным случаем (37) при $\alpha_0 = 0$.

Наконец, домножая на α_0^4 одновременно и числитель и знаменатель в (37), а затем устремляя $\alpha_0 \to \infty$, мы получим статистику из (4). Понятно, что эту оценку можно порекомендовать использовать в случае, когда мы ожидаем, что α «достаточно велико».

Замечание 2. *Отметим, что в классе всех оценок могут, в принципе, существовать оценки с меньшей, по крайней мере на константу, асимптотической дисперсией, чем оценки из (5). Такой может, например, быть оценка по методу наименьших квадратов в случаях, конечно, когда она существует.*

Подчеркнем, что при широких предположениях, построенную в (5) *оценку можно достаточно просто улучшить, используя один шаг в знаменитой процедуре, восходящей к работе Р. Фишера* [5]. *Более подробно свойства таких улучшенных оценок будут изучены в одной из следующих работ авторов.*

References

[1] Е.З. Демиденко, *Оптимизация и регрессия*, Москва, Наука, 1989. MR1007832

[2] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии*, Сибирский математический журнал, **41**:1 (2000), 150–163. MR1756483

[3] К.В. Ермоленко, А.И. Саханенко, *Явные асимптотически нормальные оценки неизвестного парметра частично-линейной регрессии*, Сибирские электронные математичсекие известия, **10** (2013), 719–726. Zbl 06509110

[4] Е.Н. Савинкина, А.И. Саханенко, *Явные оценки неизвестного параметра в одной задаче степенной регрессии*, Сибирские электронные математичсекие известия, **11** (2014), 725–733. Zbl 06510922

[5] Fisher R.A., *Theory of statistical estimation*, Proc. Camb. Phil. Soc., **22** (1925), 700–725. JFM 51.0385.01

Anjelika Alexandrovna Kalenchuk
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ya.kalenchuk15@yandex.ru

Alexandr Ivanovich Sakhanenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: aisakh@mail.ru