S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 901–909 (2015) УДК 519.23
DOI 10.17377/semi.2015.12.076 MSC 62F12

ПОЧТИ ЛИЕВО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

О.Б. ФИНОГЕНОВА

Abstract. A variety of associative rings is called *Lie nilpotent* if it satisfies the identity $[\cdots[[x_1, x_2], \ldots, x_n] = 0$ for some positive integer n, where $[x, y] = xy - yx$. We study almost Lie nilpotent varieties, i.e., minimal elements in the set of all varieties that are not Lie nilpotent. We reduce the case of rings to the case of algebras over a finite prime field by proving that every almost Lie nilpotent variety of rings satisfies the identity $px = 0$ for some prime integer p. We also show that for every finite base field F it is sufficient to study all prime almost Lie nilpotent varieties algebras over any infinite extension of F to find all such varieties of F-algebras. The nonprime almost Lie nilpotent varieties of algebras over positive characteristic fields, both infinite and finite, were described by the author in an earlier paper.

Keywords: Variety of associative algebras, identities of the associated Lie algebra, Lie nilpotency, Engel property, prime variety.

Введение

Всюду далее мы считаем, если не сказано иное, что F — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, и слово «алгебра» означает «F-алгебра».

Для каждой ассоциативной алгебры $\langle A, +, \cdot\rangle$ положим $[x, y] = xy - yx$. Множество A относительно операций $+$ и $[,]$, как легко видеть, становится алгеброй Ли. Она называется ассоциированной алгеброй Ли и является одним из наиболее изучаемых производных объектов исходной алгебры. Тождества

Finogenova, O.B., Almost Lie nilpotent varieties of associative rings.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-00524, и Президентской программы государственной поддержки ведущих научных школ, проект №5161.2014.1.

Поступила 13 ноября 2015 г., опубликована 3 декабря 2015 г.

ассоциированной алгебры Ли формируют специфический подкласс полиномиальных тождеств. К наиболее известным из них относятся тождества лиевой нильпотентности и энгелевости. Напомним, что алгебры или многообразия называются *лиево нильпотентными*, если при некотором натуральном числе n удовлетворяют тождеству $[\cdots[[[x_1,x_2],x_3],\ldots],x_n]=0$, и *энгелевыми*, если удовлетворяют тождеству $[\cdots[[[x,y],y],\ldots],y]=0$. (В дальнейшем мы будем опускать внутренние скобки при *левонормированной* их расстановке, т. е. запись $[\cdots[[[x_1,x_2],x_3]\ldots],x_n]$ будет упрощена до $[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n]$ и т. п.)

Проверка, будет ли данное многообразие лиево нильпотентным или энгелевым, сопряжена, как правило, с техническими трудностями. Более того, если многообразие задается системой тождеств, то даже существование алгоритма такой проверки находится под вопросом, поскольку исследователю требуется вывести из данного набора одно из тождеств бесконечной серии или доказать, что ни одно тождество этой серии следствием данного набора не является. В этой ситуации несомненную пользу может принести более “алгоритмичная”, нежели эквациональная, характеризация изучаемого свойства θ. К таким характеризациям относится, например, описание почти θ-многообразий, т. е. минимальных элементов в множестве многообразий, не удовлетворяющих свойству θ. Согласно лемме Цорна каждое многообразие, не обладающее свойством θ, будет содержать в качестве подмногообразия некоторое почти θ-многообразие. Если алгебры, порождающие почти θ-многообразия, не слишком сложно устроены, то полный список почти θ-многообразий обеспечивает нас алгоритмом проверки: многообразие, задаваемое системой тождеств, удовлетворяет θ тогда и только тогда, когда ни одна из указанных алгебр не удовлетворяет данной системе.

Исчерпывающее описание почти энгелевых многообразий найдено как в случае алгебр над полем, так и в случае колец [1, 6]. В данной работе мы изучаем свойства почти лиево нильпотентных мноообразий колец и алгебр над конечным полем.

Будем обозначать через $W_n(\bar{x})$ левонормированный лиев коммутатор длины n, т. е.

$$W_n(\bar{x})=[x_1,\ldots,x_n].$$

Через $F\langle X\rangle$ мы обозначаем свободную ассоциативную F-алгебру со счетным множеством порождающих X, а ее элементы называем *многочленами*. Напомним, что замкнутый относительно эндоморфизмов идеал алгебры $F\langle X\rangle$ называется T-*идеалом*. Легко убедиться, что множество всех многочленов $g(\bar{x})$, для которых равенство $g(\bar{x})=0$ является тождеством некоторого многообразия F-алгебр $\mathcal{M}$, образует T-идеал. Он называется *идеалом тождеств* многообразия $\mathcal{M}$ и обозначается через $T_F(\mathcal{M})$. Кроме того, через $T_F(g)$ мы обозначаем T-идеал, порожденный многочленом g. Мы будем опускать нижний индекс в подобных обозначениях, если из контекста будет понятно, об алгебрах над каким кольцом идет речь. Через $\mathsf{v}arA$ обозначается многообразие, порожденное семейством алгебр A, а через $\mathsf{v}ar\Sigma$ — многообразие, задаваемое системой многочленов Σ.

Многочлен называется *однородным по* x, если во всех его одночленах буква x встречается одинаковое число раз. Многочлен называется *полиоднородным*, если он однороден по всем своим переменным. Каждый многочлен f однозначно представим в виде суммы своих *полиоднородных компонент*, т.е. полиоднородных многочленов, состоящих из максимального числа попарно различных слагаемых из f. Напомним, что многообразие называется *однородным*, если вместе с любым многочленом в идеале тождеств данного многообразия содержатся и все полиоднородные компоненты этого многочлена.

Первым из двух основных результатов данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Многообразие колец $\mathcal{V}$ является почти лиево нильпотентным тогда и только тогда, когда $px = 0$ — тождество $\mathcal{V}$ для некоторого простого p, и $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентное многообразие алгебр над полем из p элементов.*

Теорема 1 сводит задачу описания почти лиево нильпотентных многообразий колец к случаю многообразий алгебр над конечным полем. Нами были изучены все такие многообразия, не являющиеся первичными [3]. Напомним, что многообразие алгебр $\mathcal{M}$ называется *первичным*, если для любых T-идеалов I_1 и I_2 из включения $I_1 \cdot I_2 \subseteq T(\mathcal{M})$ следует либо $I_1 \subseteq T(\mathcal{M})$, либо $I_2 \subseteq T(\mathcal{M})$.

Хорошо известно, что любое многообразие алгебр над бесконечным полем однородно. В случае алгебр над конечным полем существуют неоднородные многообразия, например, многообразия, порожденные конечной ненильпотентной алгеброй. В частности, имеются такие многообразия и среди непервичных почти лиево нильпотентных многообразий (см. [3]). Среди первичных почти лиево нильпотентных многообразий неоднородных многообразий, как показывает следующий результат, не существует.

Теорема 2. *Любое первичное почти лиево нильпотентное многообразие алгебр над полем является однородным.*

Этот результат позволяет работать только с многообразиями алгебр над бесконечным полем. Соответствующее утверждение мы сформулируем в виде следствия. Пусть F — поле. Обозначим через $AlmLN_F$ множество всех T-идеалов алгебры $F\langle X\rangle$, каждый из которых задает почти лиево нильпотентное первичное многообразие.

Следствие 1. *Пусть F — подполе поля G. Тогда существует такое инъективное отображение $\phi : AlmLN_F \to AlmLN_G$, что $U = \phi(U) \cap F\langle X\rangle$ для любого $U \in AlmLN_F$.*

Сформулированное следствие, в частности, показывает, что для получения исчерпывающего описания почти лиево нильпотентных многообразий алгебр над полем остается найти все первичные почти лиево нильпотентные многообразия алгебр над бесконечным полем положительной характеристики. Пример такого многообразия в случае бесконечного поля характеристики $p > 3$ известен: его полилинейные тождества нашел Ю. П. Размыслов при построении $(p-1)$-энгелева, но не лиево нильпотентного многообразия [7]; на языке тождеств со следом оно было описано в [5, 8]. Других примеров таких многообразий, а тем более их полного описания, до сих пор не найдено.

Доказательства

Мы начнем с простой, но полезной леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентное многообразие алгебр. Для любого многочлена $g(\bar{x})$ либо $g \in T(\mathcal{V})$, либо $W_n(x_1, \dots, x_n) \in T(g) + T(\mathcal{V})$ для некоторого натурального числа n.*

Доказательство. Если $g \notin T(\mathcal{V})$, то идеал $T(g) + T(\mathcal{V})$ задает собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{V}$. Каждое собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно. Следовательно, для некоторого n имеем $W_n(x_1, \dots, x_n) \in T(g) + T(\mathcal{V})$. $\square$

Для произвольного $I \subseteq F\langle X\rangle$ обозначим

$$F^{-1}I = \{f \in F\langle X\rangle |\ mf \in I \text{ при некотором } m \in F \setminus \{0\}\}.$$

Многообразие F-алгебр $\mathcal{M}$, для которого $F^{-1}T_F(\mathcal{M}) = T_F(\mathcal{M})$, будем называть многообразием *без аддитивного кручения.*

Следующее утверждение, по-видимому, является фольклорным, его доказательство можно найти, например, в [2, лемма 4].

Лемма 2. *Пусть F — область целостности, G — поле, содержащее F, Δ — подмножество $F\langle X\rangle$, замкнутое относительно частичных линеаризаций и взятия однородных компонент. Тогда $T_G(\Delta) \cap F\langle X\rangle = F^{-1}T_F(\Delta)$.*

В доказательстве теоремы 1 нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольной алгебры U мы обозначаем через $\overleftarrow{U}$ алгебру, антиизоморфную алгебре U. Кроме того, положим

$$A(U) = \begin{pmatrix} U & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы готовы доказать теорему 1.

Доказательство. Предположим сначала, что многообразие $\mathcal{V}$ не имеет аддитивного кручения. Тогда с помощью стандартных рассуждений, использующих определитель Вандермонда, нетрудно показать, что многообразие $\mathcal{V}$ однородно. Взяв в качестве множества Δ в лемме 2 идеал $T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V})$, получим $T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}) = T(\mathcal{V})_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}\langle X\rangle$. Следовательно, многообразие $\mathbb{Q}$-алгебр, имеющее идеал тождеств $T(\mathcal{V})_{\mathbb{Q}}$, не является лиево нильпотентным многообразием, так как ни один многочлен W_n не лежит в $T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V})$, а значит, и в $T(\mathcal{V})_{\mathbb{Q}}$. Следовательно, для некоторого почти лиево нильпотентного многообразия $\mathbb{Q}$-алгебр $\mathcal{U}$ выполняется

$$T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}) = T(\mathcal{V})_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}\langle X\rangle \subseteq T_{\mathbb{Q}}(\mathcal{U}) \cap \mathbb{Z}\langle X\rangle. \tag{1}$$

Очевидно, $T_{\mathbb{Q}}(\mathcal{U}) \cap \mathbb{Z}\langle X\rangle$ не содержит ни одного из многочленов W_n, т. е. многообразие колец с таким T-идеалом не лиево нильпотентно. Поскольку $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентно, включение в (1) не может быть строгим. Следовательно,

$$T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}) = T_{\mathbb{Q}}(\mathcal{U}) \cap \mathbb{Z}\langle X\rangle. \tag{2}$$

Список всех почти лиево нильпотентных многообразий алгебр над полем нулевой характеристики известен: Ю. Н. Мальцев описал все почти энгелевы многообразия [6], а А. Р. Кемер в [4] доказал, что все ассоциированные с ассоциативными энгелевы алгебры в этом случае лиево нильпотентны[1]. Почти

[1]Немного позже Е. И. Зельманов показал, что произвольная энгелева алгебра Ли над полем нулевой характеристики нильпотентна [9].

лиево нильпотентных многообразий $\mathbb{Q}$-алгебр согласно [4, 6] всего два: многообразие, порожденное $A(\mathbb{Q})$, и двойственное ему многообразие, порожденное $\overleftarrow{A}(\mathbb{Q})$. Согласно (2), для многообразий колец выполняется одно из равенств: $\mathcal{V} = \mathsf{v}arA(\mathbb{Q})$ или $\mathcal{V} = \mathsf{v}ar\overleftarrow{A}(\mathbb{Q})$. Это невозможно, так как для любого простого конечного поля G имеем следующие включения для многообразий колец

$$\mathsf{v}arA(G) \subsetneq \mathsf{v}arA(\mathbb{Q}) \quad \text{и} \quad \overleftarrow{A}(G) \subsetneq \mathsf{v}ar\overleftarrow{A}(\mathbb{Q}),$$

причем кольца $A(G)$ и $\overleftarrow{A}(G)$ не лиево нильпотентны. Противоречие.

Следовательно, любое почти лиево нильпотентное многообразие колец $\mathcal{V}$ имеет ненулевое аддитивное кручение. Это означает, что для некоторого простого числа p и многочлена g, не лежащего в $T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V})$, имеем $pg \in T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V})$. (До конца этого утверждения мы будем опускать нижний индекс в записях, типа $T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V})$, поскольку речь идет только о многообразиях колец.) Если $px \notin T(\mathcal{V})$, то по лемме 1 для некоторых натуральных чисел n и m верны включения $W_n \in T(px) + T(\mathcal{V})$ и $W_m \in T(g) + T(\mathcal{V})$. Следовательно,

$$W_n(W_m(\bar{x}), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) = W_{m+n-1}(\bar{x}) \in T(pg) + T(\mathcal{V}) \subseteq T(\mathcal{V}).$$

Противоречие. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $px = 0$ для некоторого простого p. Почти лиево нильпотентное многообразие колец с тождеством $px = 0$ можно считать многообразием алгебр над полем из p элементов. $\square$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется несколько технических утверждений.

Для любых подмножеств B и C алгебры A будем обозначать через $\{B, C\}$ подпространство, порожденное множеством $\{[b, c]; b \in B, c \in C\}$, а через $[B, C]$ — идеал, порожденный этим множеством.

Лемма 3. *Пусть A — алгебра, а B_1, B_2, B_3 — идеалы A. Тогда равенство $\{\{B_1, B_2\}, B_3\} = 0$ влечет $B_3B_2B_1[A, A]B_1[A, A][\{A, A\}, A] = 0$.*

Доказательство. В силу очевидного тождества $y[x, z] = [x, yz] - [x, y]z$, выполняющегося в любой ассоциативной алгебре, имеем равенство

$$B_3[\{B_1, B_2\}, A] = 0. \tag{3}$$

Кроме того, для любых элементов x, y, z, t из A выполняется

$$x[[y, z], t] = [[y, xz], t] - [y, x][z, t] - [[y, x], t]z - [x, t][y, z]. \tag{4}$$

Возьмем $x \in \{B_1, B_2\}$, $y \in B_1$, $z, t \in A$. Тогда, поскольку $\{B_1, B_2\} \subseteq B_2$, из (4) следует включение

$$\begin{aligned}\{B_1, B_2\}\{\{B_1, A\}, A\} \subseteq \{\{B_1, B_2\}, A\} + \{B_1, \{B_1, B_2\}\}\{A, A\} \\ + \{\{B_1, \{B_1, B_2\}\}, A\}A + \{\{B_1, B_2\}, A\}\{B_1, A\}.\end{aligned}$$

Из него благодаря (3) получаем

$$B_3[B_1, B_2][\{B_1, A\}, A] = 0. \tag{5}$$

Считая теперь, что в (4) $x \in \{B_1, A\}$, y, z, $t \in A$, и используя (5), получаем

$$B_3[B_1, B_2]\{B_1, A\}[\{A, A\}, A] = 0.$$

Последнее равенство гарантирует выполнение требуемого равенства

$$B_3B_2B_1[A, A]B_1[A, A][\{A, A\}, A] = 0,$$

так как $B_1\{A,A\}\subseteq\{B_1,A\}+\{B_1,A\}A$ и $B_2B_1[A,A]\subseteq[B_1,B_2]$, □

Лемма 4. *Пусть для целого $n\geq 3$ многообразие $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождеству $W_n(\bar{x})=0$, тогда для любого $k\leq n-3$ $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождеству*

$$W_{n-k}(\bar{y}_1)W_{n-k}(\bar{y}_2)\cdots W_{n-k}(\bar{y}_{2^k})=0.$$

Доказательство. Сделаем в W_n подстановку $x_{n-1}\mapsto zx_{n-1}$. Получим

$$0=[W_{n-2},zx_{n-1},x_n]=$$
$$z[W_{n-2},x_{n-1},x_n]+[z,x_n][W_{n-2},x_{n-1}]+[W_{n-2},z][x_{n-1},x_n]+[W_{n-2},z,x_n]x_{n-1}.$$

Первое и четвертое слагаемые принадлежат $T(W_n)$. Положим $z=W_{n-2}(\bar{u})$ и тем самым, благодаря тождеству Якоби, превратим первый коммутатор третьего слагаемого в следствие W_n. Значит, по модулю $T(W_n)$

$$[W_{n-2}(\bar{u}),x_n][W_{n-2},x_{n-1}]=0,$$

т. е. $W_{n-1}(\bar{y}_1)W_{n-1}(\bar{y}_2)=0$ есть тождество многообразия $\mathcal{M}$. Поскольку

$$W_suW_m\subseteq T(W_s\cdot W_m)$$

для любых s,m, можно повторить проделанные действия для каждого W_{n-1}, чтобы получить произведение четырех многочленов W_{n-2} и так далее. □

Лемма 5. *В любом многообразии из тождества $x^k=0$ следует*

$$x^{k-1}yx^{k-1}=0.$$

Доказательство. Пусть $x^k=0$ — тождество нашего многообразия. Тогда

$$\begin{aligned}0&=(x+x^{k-1}y)^k-x^k-(x^{k-1}y)^k\\&=x^{k-1}yx^{k-1}(1+yx^{k-2}+yx^{k-1}yx^{k-3}+\cdots)+\sum_i u_ix^kv_i\\&=x^{k-1}yx^{k-1}(1+yx^{k-2}+yx^{k-1}yx^{k-3}+\cdots).\end{aligned}$$

Поскольку в любой нильалгебре из равенства $z+zt=0$ следует $z=0$, то $x^{k-1}yx^{k-1}=0$. □

Лемма 6. *Все первичные почти лиево нильпотентные многообразия алгебр над полем положительной характеристики энгелевы.*

Доказательство. Очевидно, что многообразие является энгелевым тогда и только тогда, когда не содержит ни одного почти энгелева многообразия в качестве подмногообразия. При этом ясно, что почти лиево многообразие может содержать почти энгелево подмногообразие, только если совпадает с ним. Исчерпывающее описание почти энгелевых многообразий алгебр над полем положительной характеристики было найдено нами в [1]. Все почти энгелевы многообразия [1, теоремы 1, 2] удовлетворяют тождеству $[x,y][z,t]=0$, а значит, не являются первичными. Поэтому любое первичное многообразие не может совпадать ни с одним почти энгелевым многообразием. □

Теперь мы готовы доказать теорему 2.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — первичное почти лиево нильпотентное многообразие над конечным полем F характеристики p. По лемме 6 многообразие $\mathcal{V}$ является энгелевым, т. е. удовлетворяет при некотором натуральном числе n тождеству вида $W_n(x, y, \dots, y) = 0$. Хорошо известно, и нетрудно проверяется, что $W_p(x, y, \dots, y) = [x, y^p]$. Это означает, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[x, y^{p^n}] = 0$.

Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ неоднородно. Тогда $T(\mathcal{V})$ обладает многочленом

$$f(x, \bar{z}) = f_1(x, \bar{z}) + f_2(x, \bar{z}), \tag{6}$$

где $f_1(x, \bar{z})$ — однородный по x многочлен, не лежащий в $T(\mathcal{V})$, а число вхождений x в любой одночлен из $f_2(x, \bar{z})$ больше числа вхождений x в одночлены из f_1. Пусть максимальная степень одночленов из $f(x, \bar{z})$ по x равна m. Сделаем в тождество $f = 0$ подстановки $x \mapsto xy_i^{p^n}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тождество $[x, y^{p^n}] = 0$ позволяет собирать все коммутативные между собой множители вида $y_i^{p^n}$ слева от одночленов. Стандартные рассуждения, использующие определитель Вандермонда, приводят к тождеству $(\prod_{1 \le i < j \le m} (y_j^{p^n} - y_i^{p^n})) f_1(x, \bar{z}) = 0$. Многообразие $\mathcal{V}$ первично, а $f_1(x, \bar{z})$ не лежит в $T(\mathcal{V})$, поэтому

$$\prod_{1 \le i < j \le m} (y_j^{p^n} - y_i^{p^n}) \in T(\mathcal{V}).$$

Последнее включение гарантирует, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^k - x^l = 0$ для некоторых $k \ne l$. В частности, это означает, что все радикальные по Джекобсону алгебры из $\mathcal{V}$ удовлетворяют тождеству $x^k = 0$.

Пусть R — свободная счетнопорожденная алгебра многообразия $\mathcal{V}$. Предположим, что коммутаторный идеал $[R, R]$ этой алгебры порождает собственное подмногообразие $\mathcal{M}$ в многообразии $\mathcal{V}$. Подмногообразие $\mathcal{M}$ лиево нильпотентно, поэтому по лемме 4 удовлетворяет при некотором s тождеству

$$W_3(x_1, y_1, z_1) W_3(x_2, y_2, z_2) \cdots W_3(x_s, y_s, z_s) = 0$$

и его следствию

$$W_3(x_1, y_1, z_1) t_1 W_3(x_2, y_2, z_2) \cdots t_{s-1} W_3(x_s, y_s, z_s) = 0.$$

Наличие данных тождеств гарантирует в R выполнение равенства

$$([\{[R, R], [R, R]\}, [R, R]][R, R])^s = 0.$$

Многообразие $\mathcal{V}$ первично, поэтому из последнего равенства следует

$$[\{[R, R], [R, R]\}, [R, R]] = 0.$$

Остается воспользоваться леммой 3, чтобы получить $[R, R]^6 [\{R, R\}, R] = 0$. Противоречие с первичностью или лиевой ненильпотентностью многообразия $\mathcal{V}$. Итак, $\mathcal{V} = \mathsf{v}ar[R, R]$.

Так как многообразие $\mathcal{V}$ энгелево, оно не содержит ни одной полной матричной алгебры второго порядка над полем. Это означает, что все полупростые алгебры из $\mathcal{V}$ коммутативны. Следовательно, коммутаторный идеал $[R, R]$ лежит в радикале алгебры R. Выше было показано, что радикальные кольца удовлетворяют тождеству $x^k = 0$, поэтому такому тождеству удовлетворяет само многообразие $\mathcal{V}$. Покажем, что это невозможно, если $\mathcal{V}$ неоднородно.

Пусть $\mathcal{V}$ неоднородно, и у нас есть многочлен $f = f_1 + f_2$ вида (6), лежащий в $T(\mathcal{V})$. Можно считать без ограничения общности, что

$$f_1(x+y,\bar{z}) - f_1(x,\bar{z}) - f_1(y,\bar{z}) \in T(\mathcal{V}), \tag{7}$$

в противном случае мы найдем другой такой многочлен с помощью процесса линеаризации. Так как $f_1(x,\bar{z}) \notin T(\mathcal{V})$, по леммам 1 и 4 в $\mathcal{V}$ выполняется тождество

$$[x_{11},x_{12},x_{13}]x_{14}[x_{21},x_{22},x_{23}]x_{24}\cdots[x_{s1},x_{s2},x_{s3}]x_{s4} = \sum_i a_i f_1(b_i,\ldots)c_i.$$

Благодаря включению (7) можно считать, что все b_i — некоторые одночлены. Этот факт гарантирует, что в записи каждого одночлена из $f_2(b_i,\ldots)$ по крайней мере одна переменная встречается не меньше двух раз. Заменим в последнем тождестве $f_1(b_i,\ldots)$ на $-f_2(b_i,\ldots)$ и получим

$$[x_{11},x_{12},x_{13}]x_{14}[x_{21},x_{22},x_{23}]x_{24}\cdots[x_{s1},x_{s2},x_{s3}]x_{s4} = -\sum_i a_i f_2(b_i,\ldots)c_i. \tag{8}$$

По лемме 5 в $T(\mathcal{V})$ есть тождество $x^{k-1}yx^{k-1} = 0$. Сделаем в (8) подстановку $x_{ij} \mapsto y_{ij}x_{ij}^{k-1}z_{ij}$, $i = 1,\ldots,s$, $j = 1,\ldots,4$. Правая часть (8) в результате подстановки превратится в тождество, так как в каждом одночлене правой части есть переменная, которая встречается не меньше двух раз. Следовательно в тождество превратится и левая часть (8). Это тождество означает выполнение в R равенства $([\{I,I\},I]I)^s = 0$, где I есть идеал R, порожденный всеми элементами вида $ar^{k-1}b$. В силу первичности многообразия получаем равенство $[\{I,I\},I] = 0$, откуда благодаря лемме 3 следует $I^6[\{R,R\},R] = 0$. Поскольку, $[\{R,R\},R] \neq 0$, имеем $I = 0$. Это означает, что в многообразии $\mathcal{V}$ выполняется тождество $x^{k-1} = 0$. Предположив, что k было выбрано минимальным среди чисел со свойством $x^k \in T(\mathcal{V})$, получаем противоречие. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ первично. Теорема 2 доказана. $\square$

Докажем теперь следствие 1.

Доказательство. Пусть $U \in AlmLN_F$. По теореме 2 идеал U замкнут относительно взятия однородных компонент. Следовательно, по лемме 2 имеем $U = T_F(U) = T_G(U) \cap F\langle X\rangle$. Это означает, что $T_G(U)$ не содержит ни одного из многочленов W_n. По лемме Цорна $T_G(U) \subseteq H$, где H — T-идеал алгебры $G\langle X\rangle$, задающий почти лиево нильпотентное многообразие G-алгебр. Положим, $\phi(U) = H$. Очевидно, $U \subseteq \phi(U) \cap F\langle X\rangle$. Последнее включение не может быть строгим, так как в любом T-идеале, строго содержащем U, есть какой-нибудь многочлен W_n. Следовательно, $U = \phi(U) \cap F\langle X\rangle$. Осталось заметить, что $\phi(U)$ задает первичное многообразие G-алгебр. В противном случае, согласно лемме 1 идеал $\phi(U)$ содержал бы многочлен с коэффициентами из F вида $W_n(\bar{x})W_m(\bar{y})$. Это невозможно, так как $U \in AlmLN_F$. $\square$

References

[1] O.B. Finogenova, *Varieties of associative algebras satisfying Engel identities*, Algebra and Logic, **43**:4 (2004), 271–284; translation from Algebra i Logika **43**:4 (2004), 482–505. MR2105850

[2] O.B. Finogenova, *Almost commutative varieties of associative rings and algebras over a finite field*, Algebra and Logic **52** (2014), 484–510; translation from Algebra i Logika **52** (2013), 731–768. MR3242619

[3] O.B. Finogenova, *Almost Lie nilpotent non-prime varieties of associative algebras*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN **4**, V.21 (2015), 282–291 (in Russian).
[4] A.R. Kemer, *Nonmatrix varieties*, Algebra and Logic **19** (1981), 157–178; translation from Algebra i Logika **19** (1980), 255–283. MR0609015
[5] A. R. Kemer, *Multilinear components of the prime subvarieties of the variety* $VarM_2(F)$, Algebras and Representation Theory **4** (2001), 87-–104. MR1825809
[6] Yu.N. Mal'tsev, *Varieties of associative algebras*, Algebra Logic 15 (1977), 361–364. translation from Algebra i Logika, 15 (1976), 579–584. MR0485632
[7] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations of Math. Monographs, **138**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Algebra, Proc. Int. Conf. Memory A. I. Mal'cev, Novosibirsk/USSR 1989, Contemp. Math. **131** (1992), Pt. 2, 173–192. MR1291603
[8] L.M. Samoilov, *The unitary closure property of the prime varieties of associative algebras*, Sib. Math. J. **51** (2010), 712–722; translation from Sib. Mat. Zh. 51 (2010), 890–903. MR2732306
[9] E. I. Zel'manov, *On Engel-Lie algebras*, Sib. Math. J. **29** (1988), 777–781; translation from Sib. Mat. Zh. **29** (1988), 112–117. MR0971234

Olga Borisovna Finogenova
Ural Federal University,
ul. Lenina, 51,
620083, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: ob.finogenova@urfu.ru