S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 910–929 (2015) УДК 515.162
DOI 10.17377/semi.2015.12.077 MSC 57M07

КОМБИНАТОРНАЯ МОДЕЛЬ МЕТРИКИ ЛИПШИЦА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРОКОЛАМИ

В.А. ШАСТИН

Abstract. The zipped word length function introduced by Ivan Dynnikov in connection with the word problem in the mapping class groups of punctured surfaces is considered. We prove that the mapping class group with the metric determined by this function is quasi-isometric to the thick part of the Teichmüller space equipped with the Lipschitz metric.

Keywords: Mapping class group, Teichmüller space, Teichmüller metric, Thurston's asymmetric metric.

1. Введение

Стимулом к написанию этой статьи послужила недавняя работа Ивана Дынникова [4], посвященная проблеме равенства слов в группах классов отображений поверхностей с проколами. В этой работе Дынников описывает эффективный алгоритм решения этой проблемы, в котором в качестве меры сложности элемента группы классов отображений использует модифицированную версию стандартной словарной длины. А именно для любого конечного набора порождающих $\mathcal{G}$ группы классов отображений поверхности S Дынников определяет *сжатую словарную длину* $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ следующим образом:

$$\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi) = \min_{\substack{\varphi = g_1^{k_1}\dots g_m^{k_m}\\ g_1,\dots,g_m\in\mathcal{G}\\ k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}}} \sum_{i=1}^{m} \log_2(|k_i|+1),$$

где $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$.

Shastin, V.A., A combinatorial model of the Lipschitz metric for surfaces with punctures.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Поступила 3 июля 2015 г., опубликована 3 декабря 2015 г.

Для специальных систем образующих $\mathcal{G}$ он доказал, что проблема равенства слов разрешима за полиномиальное относительно сложности $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ время.

Теорема 1 (Дынников [4]). *Пусть S — компактная поверхность, $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in S$ — не пустое множество различных точек, такое что группа классов отображений $G = \mathrm{MCG}(S \setminus \mathcal{P})$ — бесконечна. Пусть также $\mathcal{G}$ —конечная система образующих G, такая что*

1. *любой элемент из $\mathcal{G}$ является дробной степенью скручивания Дэна*;
2. *любое скручивание Дэна из G сопряжено дробной степени некоторого элемента из $\mathcal{G}$.*

Тогда проблема равенства слов в группе G разрешима за полиномиальное относительно сложности $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ время.

Замечание 2. Эта теорема является обобщением основного результата Дынникова и Берта Виста из статьи [5]. В этой работе авторы доказывают теорему 1 для случая, когда группа G является группой кос, а конечная система порождающих $\mathcal{G}$ состоит из полускручиваний Дэна вокруг каждой пары проколов.

В доказательстве теоремы 1 ключевую роль играет обнаруженный Дынниковом геометрический аналог сжатой словарной длины. А именно для любой триангуляции T поверхности S Дынников задает сложность гомоморфизма φ числом $c_T(\varphi)$, которое зависит только от геометрического числа пересечений между T и ее образом при гомоморфизме φ. Для специальных систем порождающих $\mathcal{G}$ из теоремы 1 Дынников доказал, что функции сложности $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ и c_T эквивалентны. А именно верна следующая

Теорема 3 (Дынников [4]). *Существуют числа $K > 1$ и $C > 0$, зависящие от системы порождающих $\mathcal{G}$ и триангуляции T такие, что соотношения*

$$\frac{1}{K} \cdot \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi) - C \leqslant c_T(\varphi) \leqslant K \cdot \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi) + C$$

выполнены для любых $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$.

По функции $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ можно стандартным образом построить право-инвариантную метрику $\rho_{\mathcal{G}}$ на группе $\mathrm{MCG}(S)$:

$$\rho_{\mathcal{G}}(\varphi, \psi) = \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\psi\varphi^{-1}),$$

где $\varphi, \psi \in \mathrm{MCG}(S)$. Используя соотношения между $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ и c_T из теоремы 3, мы показываем, что группа $\mathrm{MCG}(S)$ с метрикой $\rho_{\mathcal{G}}$ может служить комбинаторной моделью пространства Тейхмюллера поверхности S. А именно мы доказываем следующую теорему 4, которая является основным результатом этой работы.

Теорема 4. *Пусть S — двумерная ориентированная поверхность конечного топологического типа без края с непустым множеством проколов, ϵ — положительное вещественное число, σ — гиперболическая структура на S, лежащая в ϵ-толстой части пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ и $\mathcal{G}$ — конечная система порождающих группы $\mathrm{MCG}(S)$, обладающая следующими свойствами:*

1. *Каждый элемент $\mathcal{G}$ является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.*
2. *Каждое скручивание Дэна из $\mathrm{MCG}(S)$ сопряжено дробной степени некоторого элемента из $\mathcal{G}$.*

Обозначим через $i_\sigma\colon \mathrm{MCG}(S) \to \mathcal{T}_\epsilon(S)$ *отображение, которое сопоставляет* $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ *обратный образ* σ *при диффеоморфизме* φ. *Тогда* i_σ *является квазиизометрией между группой* $\mathrm{MCG}(S)$ *со сжатой словарной метрикой* $\rho_{\mathcal{G}}$, *и* ϵ*-толстой частью пространства Тейхмюллера с метрикой Липшица.*

В статье [3] Чой и Рафи доказали, что в толстой части пространства Тейхмюллера метрики Липшица и Тейхмюллера квазиизометричны. Используя этот результат мы получаем следующую теорему 5 как прямое следствие теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть* S *— двумерная ориентированная поверхность конечного топологического типа без края с непустым множеством проколов,* ϵ *— положительное вещественное число,* σ *— гиперболическая структура на* S, *лежащая в* ϵ*-толстой части пространства Тейхмюллера* $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ *и* $\mathcal{G}$ *— конечная система порождающих группы* $\mathrm{MCG}(S)$, *обладающая следующими свойствами:*

1. *Каждый элемент* $\mathcal{G}$ *является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.*
2. *Каждое скручивание Дэна из* $\mathrm{MCG}(S)$ *сопряжено дробной степени некоторого элемента из* $\mathcal{G}$.

Обозначим через $i_\sigma\colon \mathrm{MCG}(S) \to \mathcal{T}_\epsilon(S)$ *отображение, которое сопоставляет* $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ *обратный образ* σ *при диффеоморфизме* φ. *Тогда* i_σ *является квазиизометрией между группой* $\mathrm{MCG}(S)$ *со сжатой словарной метрикой* $\rho_{\mathcal{G}}$ *и* ϵ*-толстой частью пространства Тейхмюллера с метрикой Тейхмюллера.*

Эта теорема является обобщением результата Дынникова и Виста из статьи [5], в которой они получают аналогичный результат в случае, когда поверхность S является проколотой сферой.

Отметим также, что другая комбинаторная модель метрики Тейхмюллера построена в статье Рафи [13]. В этой работе доказано, что расстояние Тейхмюллера между двумя гиперболическими метриками с точностью до квазиизометрии определяется в терминах расстояний в комплексе кривых поверхности между кратчайшими разбиениями на панты, ассоциированными с данными метриками. Несмотря на то, что определенная аналогия между формулами для расстояния Тейхмюллера, полученными в нашей работе и работе [13], существует, точное соотношение между сжатой словарной длиной и расстоянием, введенным Рафи, автору неизвестно.

Благодарности. Автор выражает благодарность Ивану Дынникову за внимание к работе и стимулирующие обсуждения.

2. Основные определения

Пусть $\overline{S} = \overline{S}_{g,n}$ — связная ориентируемая компактная поверхность рода g с n отмеченными точками $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$. Поверхности $\overline{S}$ соответствует поверхность $S = S_{g,n}$, которая получается удалением отмеченных точек из $\overline{S}$. В дальнейшем мы будем обозначать получившиеся в результате этого проколы на поверхности S теми же буквами, что и соответствующие им отмеченные точки на $\overline{S}$.

Хорошо известно, что *эйлерова характеристика* χ поверхности $S_{g,n}$ выражается следующей формулой:

$$\chi(S_{g,n}) = 2 - 2g - n. \tag{1}$$

В данной работе мы будем рассматривать только поверхности отрицательной эйлеровой характеристики.

Известно (см. [10]), что на каждой поверхности такого типа можно ввести гиперболическую структуру — полную риманову метрику постоянной отрицательной кривизны -1 и конечной площади. Поверхность S с заданной гиперболической структурой σ мы будем обозначать (S, σ).

Определение 6. Будем говорить, что гиперболические структуры σ_1 и σ_2 на поверхности S *эквивалентны*, если существует изометрия $\varphi\colon (S, \sigma_1) \to (S, \sigma_2)$, изотопная тождественному отображению поверхности S.

Пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$ поверхности S — это множество классов эквивалентности гиперболических структур на S.

Замечание 7. Пространство Тейхмюллера поверхности S можно также определить как множество классов изотопии комплексных структур на S. В силу теоремы униформизации (см. [14]) эти определения совпадают.

Определение 8. Пусть ϵ — произвольное положительное число. Тогда ϵ-толстой частью $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ пространства Тейхмюллера поверхности S мы будем называть подмножество пространства $\mathcal{T}(S)$, состоящее из таких классов гиперболических структур σ, что длина каждой σ-геодезической больше ϵ. В дальнейшем мы не будем уточнять значение константы в определении ϵ и просто называть это подмножество 'толстой частью' пространства Тейхмюллера.

На пространстве $\mathcal{T}(S)$ можно ввести несколько естественных метрических структур: метрику Тейхмюллера, метрику Вейля-Петерсона, асимметричную метрику Тёрстона, и т.д. (В работе [11] приведен развернутый список естественных метрик на пространстве Тейхмюллера.) Все эти метрики задают одну и ту же топологию на пространстве $\mathcal{T}(S)$. В этой топологии пространство Тейхмюллера поверхности $S = S_{g,n}$ гомеоморфно открытому шару размерности $6g - 6 + 2n$.

Определение 9. *Группа классов отображений* $\mathrm{MCG}(S)$ поверхности S — это группа классов изотопии сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S:

$$\mathrm{MCG}(S) = \mathrm{Diff}^+(S)/\mathrm{Diff}_0(S).$$

Здесь $\mathrm{Diff}^+(S)$ обозначает группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S, а $\mathrm{Diff}_0(S)$ — ее нормальную подгруппу, состоящую из диффеоморфизмов изотопных тождественному.

Замечание 10. В дальнейшем мы в основном не будем проводить различия между диффеоморфизмами и их классами в группе $\mathrm{MCG}(S)$. Так, если $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$, а α — кривая на поверхности S, то $\varphi(\alpha)$ — это кривая, которая получается как образ α при каком-то диффеоморфизме из класса φ.

Группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^+(S)$ естественным образом действует на множестве всех гиперболических структур на поверхности S. Это(правое) действие определяет действие группы $\mathrm{MCG}(S)$ на $\mathcal{T}(S)$.

Определение 11. *Замкнутой кривой* на поверхности S мы будем называть гладкое отображение $\alpha\colon S^1 \to S$. Обычно мы не будем проводить различия между кривой и ее образом.

Замкнутая кривая называется *простой*, если соответствующее отображение $\alpha\colon S^1 \to S$ является вложением. Замкнутая кривая называется *существенной*, если она не стягивается в точку или прокол.

Мультикривая $\mathcal{A}$ на поверхности S — это непустое множество простых замкнутых попарно непересекающихся кривых на S. Мультикривая называется существенной, если все ее связные компоненты являются существенными кривыми.

Определение 12. *Идеальной дугой* β на поверхности S мы будем называть гладкое отображение $\beta\colon [0,1] \to \overline{S}$ такое, что $\beta^{-1}(\mathcal{P}) = \{0,1\}$, где $\mathcal{P}$ — множество проколов на S. Соответствующее дуге β отображение интервала $(0,1)$ в S мы также будем называть идеальной дугой и обозначать β. Как и в случае кривых, мы не будем проводить различия между дугой и ее образом на $\overline{S}$ и S.

Под гомотопией идеальной дуги β мы понимаем гомотопию $\beta\colon [0,1] \to \overline{S}$ в классе идеальных дуг. В частности такая гомотопия должна быть неподвижна на концах дуги. Идеальная дуга β называется *существенной* если она не стягивается на прокол. Идеальная дуга β называется *простой*, если соответствующее отображение из $(0,1)$ в S является вложением.

Идеальная мультидуга β на поверхности S — это непустое множество простых попарно непересекающихся идеальных дуг на S. Идеальная мультидуга называется существенной, если все ее компоненты являются существенными.

Идеальная триангуляция T на поверхности $S = S$ без края — это максимальная по включению идеальная мультидуга. Легко видеть, что идеальная триангуляция T задает клеточное разбиение $\overline{S}$, двумерные клетки которого соответствуют связным компонентам $\overline{S} \setminus T$. Каждая такая компонента является образом внутренности замкнутого треугольника Δ при гладком отображении φ_Δ, которое взаимно-однозначно на Δ без вершин, и которое отправляет каждую сторону треугольника Δ в некоторую дугу триангуляции T. Нетрудно показать, что все идеальные триангуляции на S имеют одно и то же количество сторон N и треугольников и треугольников M:

$$N = 6g - 6 + 3n, \quad M = 4g - 4 + 2n. \tag{2}$$

Утверждение 13. *Пусть σ — гиперболическая структура на S, α — существенная замкнутая кривая или существенная идеальная дуга на S. Тогда среди замкнутых кривых(соотв. идеальных дуг) гомотопных α найдется единственная σ-геодезическая γ_α. Более того*

1. *Если α является простой, то γ_α также простая.*
2. *Если β — другая существенная замкнутая кривая или идеальная дуга, и такая что α и β не гомотопны и не пересекаются, тогда соответствующие σ-геодезические γ_α and γ_β также не пересекаются.*
3. *Если α — замкнутая кривая, то γ_α является кратчайшей среди всех кривых гомотопных α.*

Доказательство. Доказательство для случая замкнутых кривых можно найти в книгах [6], [7].

Доказательство для случая идеальных дуг нетрудно получить, используя соображения из леммы 3.2. из [7] и формулу для гиперболической метрики в окрестности(см. [1, утверждение D.3.12.]). □

Если α — замкнутая кривая на S, и на поверхности задана гиперболическая структура σ, то через $l_\sigma(\alpha)$ мы будем обозначать длину σ-геодезической гомотопной α.

Определение 14. Пусть α, β — простые кривые на S. Будем говорить, что α и β *трансверсальны*, если они совпадают, не пересекаются или трансверсально пересекаются. Если α и β трансверсальны и ни одна из связных компонент $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ не гомеоморфна диску, то будем говорить, что α и β *существенно пересекаются.*

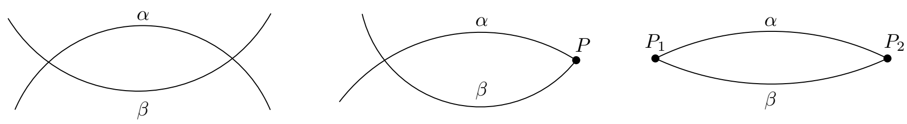

Рис. 1. Три типа дисков в $S \setminus (\alpha \cup \beta)$.

Определение 15. Пусть α, β — простые неизотопные кривые на S. Тогда *геометрическим числом пересечений* $\langle \alpha, \beta \rangle$ кривых α и β мы будем называть следующую величину:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \min_{\alpha', \beta'} \#\{x \mid x \in \alpha' \cap \beta'\},$$

где минимум ищется среди всех простых трансверсальных кривых α', β' изотопных соответственно α, β. Если же α и β изотопны, мы полагаем геометрическое число пересечений $\langle \alpha, \beta \rangle$ равным 0.

Некоторые важные свойства геометрического числа пересечений кривых на поверхностях представлены в следующем утверждении и следствии из него.

Утверждение 16. *Пусть α и β — простые существенные кривые на поверхности S. Тогда для любой гиперболической структуры σ на S σ-геодезические γ_α и γ_β существенно пересекаются. Более того, если α и β существенно пресекаются, то существует изотопия поверхности S, переводящая α и β в γ_α и γ_β соответственно.*

Доказательство. Доказательство для случая замкнутой S приведено [2]. Общий случай доказывается аналогично. □

Следствие 17. *Пусть α и β — простые существенные кривые на S. Тогда*

1. *существует изотопная α простая кривая α' такая, что кривые α' и β существенно пересекаются*;
2. *пусть α и β трансверсальны. Тогда они пресекаются существенно в том и только том случае, если число пересечений этих кривых совпадает с их геометрическим числом пересечения:*

$$\#\{x \mid x \in \alpha \cap \beta\} = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Мы также напомним определения псевдометрического пространства и квазиизометрии между псевдометрическими пространствами:

Определение 18. Псевдометрическое пространство (X, d) — это пара (X, d), где X — множество, а $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — неотрицательно определенная функция (называемая псевдометрикой), обладающая следующими свойствами:

1. $d(x,x) = 0$ выполнено для всех $x \in X$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$ выполнено для всех $x, y \in X$,
3. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ выполнено для всех $x, y, z \in X$.

В отличие от метрических пространств расстояние между двумя различными точками псевдометрического пространства может быть равно 0.

Определение 19. Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) — псевдометрические пространства, а $K \geqslant 1$, $C \geqslant 0$ — вещественные числа. Тогда отображение $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ называется (K, C)-квазиизометрией, если f обладает следующими свойствами:

1. Для всех $x_1, x_2 \in X$ выполняется
$$\frac{1}{K} d_X(x_1, x_2) - C \leqslant d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant K d_X(x_1, x_2) + C.$$
2. Для любой точки $y \in Y$ найдется точка $x \in X$, такая что $d_Y(f(x), y) \leqslant C$.

Псевдометрики d_1 и d_2, заданные на одном множестве X называются *(K,C)-квазиизометричными*, если тождественное отображение X является (K, C)-квазиизометрией между (X, d_1) и (X, d_2).

Определим также аналог квазиизометрии для функций:

Определение 20. Пусть X—множество, f, g — неотрицательные функции на X. Тогда f и g называются *эквивалентными*, если найдутся вещественные числа $K \geqslant 1$, $C \geqslant 0$, такие, что для любого $x \in X$ выполнено
$$\frac{1}{K} f(x) - C \leqslant g(x) \leqslant K f(x) + C.$$

3. Метрики Тейхмюллера и Липшица

В этой работе нам понадобятся две из перечисленных выше метрик на пространстве Тейхмюллера: метрика Тейхмюллера и асимметричная метрика Тёрстона. Первая из них определяется в терминах комплексных структур на поверхности.

Определение 21. Пусть J, J' пара комплексных структур на поверхности S, $\phi\colon S \to S$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, x — произвольная точка на S. Пусть кроме того z — это комплексная координата структуры J в окрестности точки x, $z' = \phi(z)$ — комплексная координата структуры J' в окрестности $\phi(x)$. Тогда *коэффициент дилатации* $K_\phi(x)$ отображения ϕ в точке x задается следующей формулой:
$$K_\phi(x) = \frac{|\partial_z \phi| + |\partial_{\bar z} \phi|}{|\partial_z \phi| - |\partial_{\bar z} \phi|}. \tag{3}$$
Отметим, что $K_\phi(x)$ не зависит от выбора локальных координат в окрестности точек x и $\phi(x)$.

Если величина $K[\phi] = \sup\limits_{x \in S} K_\phi(x) < \infty$, то диффеоморфизм f называется *допустимым* относительно пары J, J'.

Расстоянием Тейхмюллера $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ между комплексными структурами J, J' называется следующая величина:
$$d_{\mathcal{T}}(J, J') = \inf_{\phi \sim \mathrm{id}} \log K[\phi], \tag{4}$$
где инфимум берется по всем допустимым диффеоморфизмам ϕ поверхности S изотопным тождественному.

Очевидно, что функция $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ зависит только от классов эквивалентности комплексных структур J, J' на S и тем самым определяет функцию на декартовом квадрате пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$. Тейхмюллер доказал (см. [15]), что величина $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ конечна для любых комплексных структур J, J' на S и определяет метрику на пространстве $\mathcal{T}(S)$.

Асимметричная метрика Тёрстона и ее симметризация — метрика Липшица — определяются в терминах гиперболических структур на поверхности.

Определение 22. Пусть σ, τ — гиперболические структуры на S и $\phi\colon S \to S$ — диффеоморфизм S. Тогда *константа Липшица* $L(\varphi; \sigma, \tau)$ диффеоморфизма ϕ, рассматриваемого как отображение метрических пространств (S, σ) и (S, τ), определяется следующим образом:

$$L(\phi; \sigma, \tau) = \sup_{x \neq y} \left(\frac{d_\tau(\phi(x), \phi(y))}{d_\sigma(x, y)} \right),$$

где $x, y \in S$.

В терминах константы Липшица Тёрстон в работе [16] определил следующую функцию $L(\sigma, \tau)$ от упорядоченной пары гиперболических структур на S:

$$L(\sigma, \tau) = \inf_{\phi \sim \mathrm{id}} \log(L(\phi; \sigma, \tau)),$$

где инфимум берется по всем допустимым диффеоморфизмам ϕ поверхности S изотопным тождественному.

Очевидно, что функция $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ зависит только от классов эквивалентности гиперболических структур σ, τ на S и тем самым определяет функцию на декартовом квадрате пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$. В работе [16] Тёрстон показал, что функция $L(\sigma, \tau)$ обладает следующими свойствами:

- Функция $L(\sigma, \tau)$ неотрицательна.
- $L(\sigma, \tau) = 0$ в том и только в том случае, если гиперболические метрики σ и τ являются эквивалентными
- Функция $L(\sigma, \tau)$ удовлетворяет неравенству треугольника:

$$L(\sigma_1, \sigma_3) \leqslant L(\sigma_1, \sigma_2) + L(\sigma_2, \sigma_3),$$

  для любых гиперболических структур σ_1, σ_2, σ_3 на S.

Отметим, что вообще говоря $L(\sigma, \tau) \neq L(\tau, \sigma)$. Тем самым эта функция задает асимметричную метрику на пространстве Тейхмюллера, которая называется *асимметричной метрикой Тёрстона.*

В этой работе мы будем пользоваться другим описанием для асимметричной метрики Тёрстона, которое получено в работе [16].

Теорема 23 (Тёрстон, [16])**.** *Для любой поверхности S и гиперболических метрик σ, τ на S расстояние $L(\sigma, \tau)$ определяется следующей формулой:*

$$L(\sigma, \tau) = \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{l_\tau(\alpha)}{l_\sigma(\alpha)} \right) \right),$$

где супремум ищется среди всех простых существенных замкнутых кривых α на S.

Определение 24. *Метрикой Липшица* d_L на пространстве Тейхмюллера поверхности S называется следующая симметризация асимметричной метрики Тёрстона:

$$d_L(\sigma,\tau) = \max\{L(\sigma,\tau), L(\tau,\sigma)\},$$

где $\sigma, \tau \in \mathcal{T}(S)$.

Определение метрики Липшица было дано в [3]. В этой работе авторы показали, что метрики Тейхмюллера и Липшица квазиизометричны на толстой части пространства Тейхмюллера. Однако на всем пространстве Тейхмюллера эти метрики существенно различаются(см. [3]).

4. Доказательство основных результатов

Мы переходим к доказательству основных результатов этой статьи.

Доказательство теоремы 4. Ключевым фактом, который мы будем использовать для доказательства наших результатов является теорема 3. Напомним, что в этой теореме Дынниковым доказано, что для специальных систем порождающих $\mathcal{G}$ группы $\mathrm{MCG}(S)$ и для любой идеальной триангуляции T поверхности S сжатая словарная длина $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ эквивалентна функции сложности c_T, зависящей только от геометрического числа пересечений между триангуляцией ее образе при гомоморфизме.

В этой работе мы будем использовать функцию сложности, которая является аналогом c_T и определяется следующим образом:

$$\|\varphi\|_T = \log(\langle \varphi(T), T\rangle + 1), \tag{5}$$

где $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$, T — идеальная триангуляция S, а $\langle \varphi(T), T\rangle$ — геометрическое число пересечения триангуляций T и $\varphi(T)$.

Используя определение функции c_T из работы [4] легко доказать следующие неравенства

$$\|\varphi\|_T \leqslant c_T(\varphi) \leqslant N^2\|\varphi\|_T + N^2 \log 2,$$

показывающие эквивалентность c_T и $\|\varphi\|_T$.

Замечание 25. Мы специально не приводим в этой работе точное определение функции c_T, чтобы не вводить лишних обозначений.

Мы будем также использовать ассоциированную с метрикой Липшица функцию сложности $\| \ \|_{L,\sigma}$ на $\mathrm{MCG}(S)$:

$$\|\varphi\|_{L,\sigma} = L(\sigma, \varphi^*(\sigma)),$$

для любого $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$.

Основной результат, который потребуется нам для доказательства теоремы 4, состоит в том, что функции сложности $\| \ \|_{L,\sigma}$ и $\| \ \|_T$ эквивалентны.

Теорема 26. *Пусть S — двумерная ориентированная поверхность конечного топологического типа без края с непустым множеством проколов, T — идеальная триангуляция поверхности S, σ — гиперболическая структура на S. Тогда существуют положительные числа c_1, c_2, зависящие от T и σ, такие, что для любого $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ выполнено:*

$$\|\varphi\|_T - c_1 \leqslant \|\varphi\|_{L,\sigma} \leqslant \|\varphi\|_T + c_2.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что доказательство теоремы 26 в случае, когда S является сферой с 3 проколами тривиально, поскольку группа классов отображений этой поверхности конечна. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать поверхности отличные от этой.

Нам потребуется следующее обозначение. Если $\mathcal{A}$ — мультикривая, или идеальная мультидуга, а T — идеальная триангуляция поверхности S, то через $\langle \mathcal{A}, T \rangle$ мы будем обозначать сумму геометрических чисел пересечений их компонент:

$$\langle \mathcal{A}, T \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}, e \in T} \langle \alpha, e \rangle. \tag{6}$$

Утверждение 27. *Существуют такие положительные числа c и C, зависящие от S, T и σ, что для любой простой замкнутой существенной кривой α на S выполняются следующие неравенства:*

$$c\langle \alpha, T \rangle \leqslant l_\sigma(\alpha) \leqslant C\langle \alpha, T \rangle.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения нам потребуется следующая лемма из гиперболической геометрии.

Лемма 28 ([12]). *Пусть P — прокол на поверхности S, и $\mathcal{U}_P$ — подмножество S, состоящая из орициклов вокруг P, длина которых в метрике σ меньше единицы. Тогда множество $\mathcal{U}_P$ является нормальной окрестностью прокола P, эти окрестности, отвечающие разным проколам, не пересекаются и любая простая σ-геодезическая не пересекается с этими окрестностями.*

Теперь приведем доказательство утверждения 27. Рассмотрим изотопную T идеальную триангуляцию T', ребра которой являются σ-геодезическими, и σ-геодезическую γ_α изотопную α. В силу следствия 17 геометрическое число пересечения $\|\alpha\|_T$ совпадает с числом точек пересечения γ_α T'. Последнее, в свою очередь, совпадает с количеством геодезических дуг α_i в $\gamma_\alpha \cap S \setminus T'$. Поскольку каждая компонента Δ в $S \setminus T'$ является внутренностью идеального гиперболического треугольника, длина каждой дуги α_i, содержащейся в Δ, совпадает с длиной некоторой геодезической дуги α_i' в идеальном гиперболическом треугольнике. Кроме того каждая дуга α_i' содержится в дополнении до орициклических окрестностей вершин идеального гиперболического треугольника, соответствующих орициклическим окрестностям $\Delta \cap \mathcal{U}_P$, где $\mathcal{U}_P$ — орициклическая окрестность прокола P из прошлой леммы. В силу компактности такого дополнения, найдутся такие положительные числа c_Δ и C_Δ, что длина каждой дуги α_i лежащей в Δ ограничена снизу и сверху соответственно c_Δ и C_Δ . Поскольку количество компонент $S \setminus T'$ конечно, то найдутся такие положительные числа c и C, зависящие от S, T и σ, но не от кривой α, что длина каждой из дуг α_i больше c, но меньше C. Тем самым мы получаем, что для любой α выполнены неравенства

$$c\langle \alpha, T \rangle \leqslant l_\sigma(\alpha) \leqslant C\langle \alpha, T \rangle.$$

□

В силу теоремы 23 функция $\|\varphi\|_{L,\sigma}$ может быть записана в следующем виде:

$$\|\varphi\|_{L,\sigma} = \sup_\alpha \left(\log \left(\frac{l_{\varphi^*(\sigma)}(\alpha)}{l_\sigma(\alpha)} \right) \right) = \sup_\alpha \left(\log \left(\frac{l_\sigma(\varphi(\alpha))}{l_\sigma(\alpha)} \right) \right),$$

где супремум ищется среди всех простых существенных кривых на поверхности S.

Из утверждения 27 следует, что найдется такое неотрицательное число C', что неравенство

$$\left|\sup_\alpha\left(\log\left(\frac{l_\sigma(\varphi(\alpha))}{l_\sigma(\alpha)}\right)\right)-\sup_\alpha\left(\log\left(\frac{\langle\varphi(\alpha),T\rangle}{\langle\alpha,T\rangle}\right)\right)\right|\leqslant C'$$

выполняется для любого $\varphi\in\mathrm{MCG}(S)$.

Поэтому для доказательства теоремы 26, достаточно найти такие положительные числа C_1 и C_2, что для любого $\varphi\in\mathrm{MCG}(S)$ выполнены следующие неравенства:

$$\|\varphi\|_T-C_1\leqslant\sup_\alpha\left(\log\left(\frac{\langle\varphi(\alpha),T\rangle}{\langle\alpha,T\rangle}\right)\right)\leqslant\|\varphi\|_T+C_2. \tag{7}$$

Начнем с доказательства левого неравенства. Для этого нам потребуется следующее

Утверждение 29. *Пусть β — существенная идеальная дуга на $S\neq S_{0,3}$, β' — граница маленькой трубчатой окрестности β в $\overline{S}$. Тогда, если β' является связной кривой, она существенна и выполнено следующее неравенство*:

$$\langle\beta,T\rangle\leqslant\frac{1}{2}\langle\beta',T\rangle.$$

В случае, когда β' состоит из двух компонент, как минимум одна из этих компонент, обозначим ее β'_1, удовлетворяет следующим двум свойствам:

- *β'_1 является существенной,*
- *для β'_1 выполнено следующее неравенство:*

$$\langle\beta,T\rangle\leqslant 3\langle\beta'_1,T\rangle.$$

Доказательство. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 30. *Пусть D — диск с двумя проколами. Тогда есть только три различных изотопических класса простых существенных идеальных дуг в D.*

Пусть C — цилиндр с одним проколом. Тогда есть только один изотопический класс простых существенных идеальных дуг в C .

Дуги, представляющие эти изотопические классы показаны на рисунке 2.

Доказательство. Мы докажем, что существует только одна с точностью до изотопии простая идеальная дуга, соединяющая разные проколы, которые в дальнейшем мы будем обозначать P_1 и P_2, в диске с двумя проколами. Доказательства для других случаев аналогичны этому.

Рассмотрим две различные простые существенные дуги α и β данного типа. Малой изотопией одной из этих дуг мы можем добиться, чтобы все пересечения α и β стали трансверсальны. Если так получилось, что дуги не пересекаются, то в силу теоремы Жордана они вместе ограничивают вложенный диск и поэтому изотопны. Если они пересекаются, будем идти вдоль кривой α, начиная с прокола P_1, до первой точки пересечения X с кривой β. Обозначим дуги кривых α и β, идущие от P_1 в X, α_1 и β_1. Кривая, образованная α_1 и β_1 ограничивает или диск, или диск с проколом P_2. В первом случае мы можем протолкнуть β сквозь этот диск и убрать точку пересечения X. Во втором

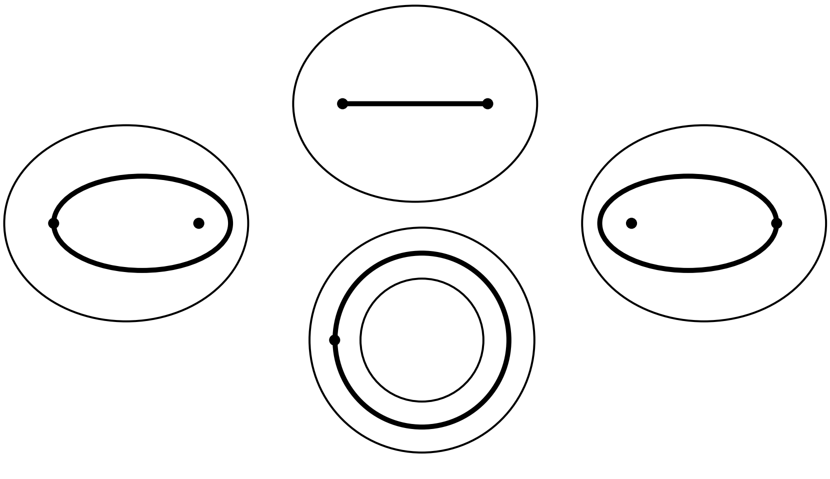

Рис. 2. Три типа простых идеальных дуг в диске с двумя проколами и простая идеальная дуга в цилиндре с проколом.

случае мы рассмотрим дуги, α_2 и β_2 с началом в P_2, которые строятся также как и α_1, β_1. Дуги α_2 и β_2 лежат внутри (возможно, за исключением их общего конца) диска с проколом, ограниченного α_1, β_1. Поэтому дуги α_2 и β_2 ограничивают диск и мы снова можем сократить число точек пересечения α и β с помощью изотопии. Тем самым после конечного числа таких изотопий мы получим непересекающиеся дуги, которые, как мы уже показали, являются изотопными. □

Теперь перейдем к доказательству утверждения.

Сначала рассмотрим случай, когда кривая β' является связной, т.е. концы дуги β различны. Тогда связная компонента U множества $S \setminus \beta'$, которая содержит дугу β, является диском с двумя проколами P_1, P_2 — концами β. Если мы предположим, что кривая β' не является существенной, то множество $S \setminus U$ является диском или диском с одним проколом. В этом случае S является сферой с двумя или тремя проколами, что противоречит нашим ограничениям на тип поверхности S.

Теперь произотопируем кривую β' так, чтобы она стала существенно пересекаться с триангуляцией T. В силу известной теореме о продолжении изотопии (см., например [9]) мы можем продолжить изотопию β' до изотопии поверхности S. Будем обозначать образы кривых β, β' и множества U под действием этой изотопии теми же символами, что и раньше. Мы также обозначим через $\overline{U}$ замыкание U в S.

Рассмотрим ребра триангуляции T, которые смежны с одним из проколов P_1 или P_2. Если среди них найдется ребро e, которое соединяет P_1 и P_2 и содержится внутри U, то по лемме 30 e изотопно дуге β и поэтому $\langle \beta, T\rangle = 0 \leqslant \frac{1}{2}\langle \beta', T\rangle$.

Если среди этих ребер найдется ребро e', целиком лежащее в U, у которого оба конца совпадают с P_1, то в силу леммы 30 e' ограничивает диск с одним проколом и тем самым T содержит ребро, лежащее внутри U и соединяющее P_1 с P_2.

Если же триангуляция T не имеет ребер, которые целиком лежат внутри U, то найдутся ребра $e_1, e_2 \in T$, которые пересекают β' и смежны с проколами P_1 и P_2 соответственно. Пересекая e_i с $\overline{U}$, мы получаем дуги $\alpha_i \in e_i$, $i \in \{1,2\}$, такие что они целиком лежат $\overline{U}$, а дуга α_i смежна с P_i, и пересекает β' в одной точке X_i(см. часть рисунка 3, расположенную слева вверху).

С помощью небольшой изотопии α_1 и α_2 мы можем получить две такие простые кривые α'_1 и α'_2, что они целиком лежат в $\overline{U}$, не пересекаются, не пересекают триангуляцию T, и пересекают кривую β' в точках X'_1 и X'_2 соответственно (см. часть рисунка 3, расположенную справа вверху). Точки X'_1 и X'_2 разбивают β' на две части δ_1 и δ_2. Мы можем объединить дуги α'_1, δ_1, α'_2 и дуги α'_1, δ_2, α'_2 и получить две кусочно гладкие дуги β_1, β_2 соответственно (одна из этих дуг изображена на рисунке 3 слева внизу). С помощью небольшой изотопии мы можем сгладить эти дуги, не изменяя при этом количество точек пересечения этих дуг с триангуляцией(одна из этих дуг изображена на рисунке 3 справа внизу). Как следует из построения этих дуг и леммы 30, получившиеся дуги изотопны β, а суммарное число точек пересечения этих дуг с триангуляцией T равняется $\langle \beta', T\rangle$. Тем самым одна из этих дуг пересекает T не более чем в $\frac{1}{2}\langle \beta', T\rangle$ точках, и поэтому мы доказали утверждение в этом случае.

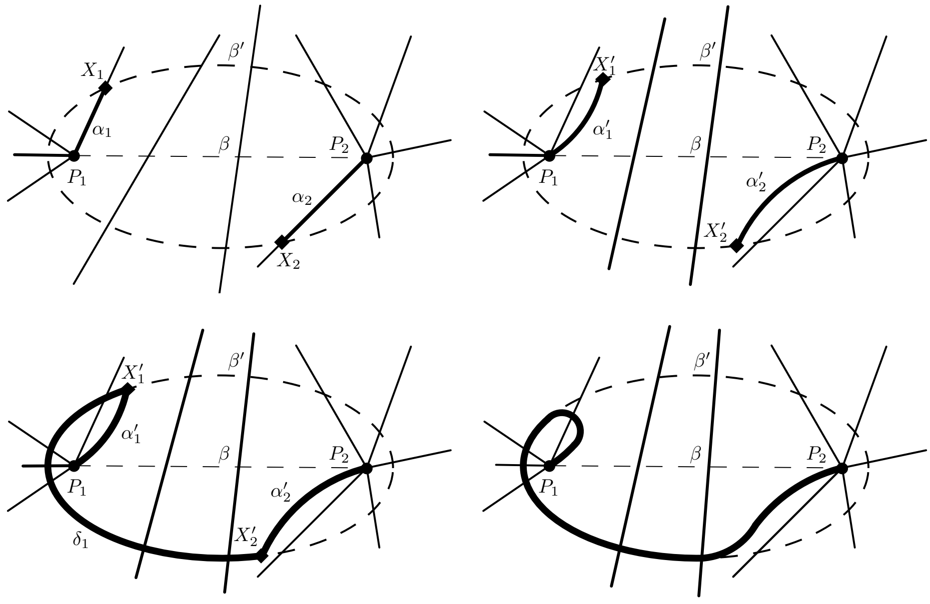

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству первого случая утверждения 29.

В случае, когда β' состоит из двух компонент β'_1 и β'_2, мы будем использовать аналогичные соображения.

Во-первых, отметим, что по крайней мере одна из компонент β' является существенной. Действительно, если и β'_1, β'_2 не являются существенными, то каждая из этих кривых ограничивает диск с одним проколом, и тогда S будет сферой с тремя проколами, что противоречит нашим ограничениям на тип поверхности. Без ограничения общности будем считать, что кривая β'_1 является существенной.

С помощью изотопии поверхности S мы можем деформировать кривую β' так, чтобы она существенно пересекалась с триангуляцией T. Связная компонента U множества $S \setminus \beta'$, содержащая дугу β является цилиндром с одним проколом P — концом β.

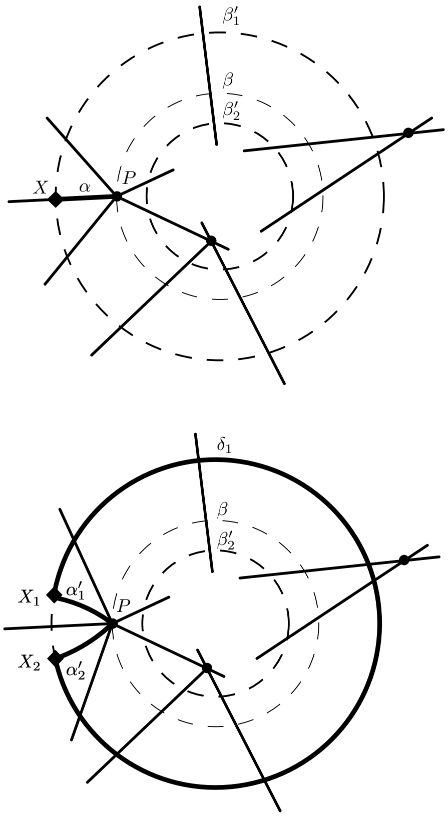

Рис. 4. Иллюстрация к доказательству второго случая утверждения 29.

Рассмотрим ребра триангуляции T, которые смежны с проколом P. Если среди них найдется ребро, которое содержится внутри U, то по лемме 30 оно изотопно дуге β и поэтому $\langle \beta, T\rangle = 0 \leqslant \langle \beta'_1, T\rangle$. Если T не содержит ребер, лежащих внутри U, то возможно два случая. В первом случае найдется ребро $e \in T$, которое пересекает существенную компоненту β'(без ограничения общности β'_1) и смежно P. Во втором случае только одна компонента (без ограничения общности β'_1) является существенной и все ребра T смежные с P не пересекают β'_1.

Если e пересекает существенную компоненту β', то найдется дуга $\alpha \in e$, которая смежна с P, лежит в $\overline{U}$ и пересекает β' только в одной точке X (см. часть рисунка 4, расположенную слева вверху).

Малыми деформациями α можно получить две простые дуги α'_1 и α'_2, которые смежны с P, лежат в $\overline{U}$, не пересекаются, не пересекают триангуляцию T и пересекаются с β' в точках X_1 и X_2 соответственно (см. часть рисунка 4, расположенную справа вверху).

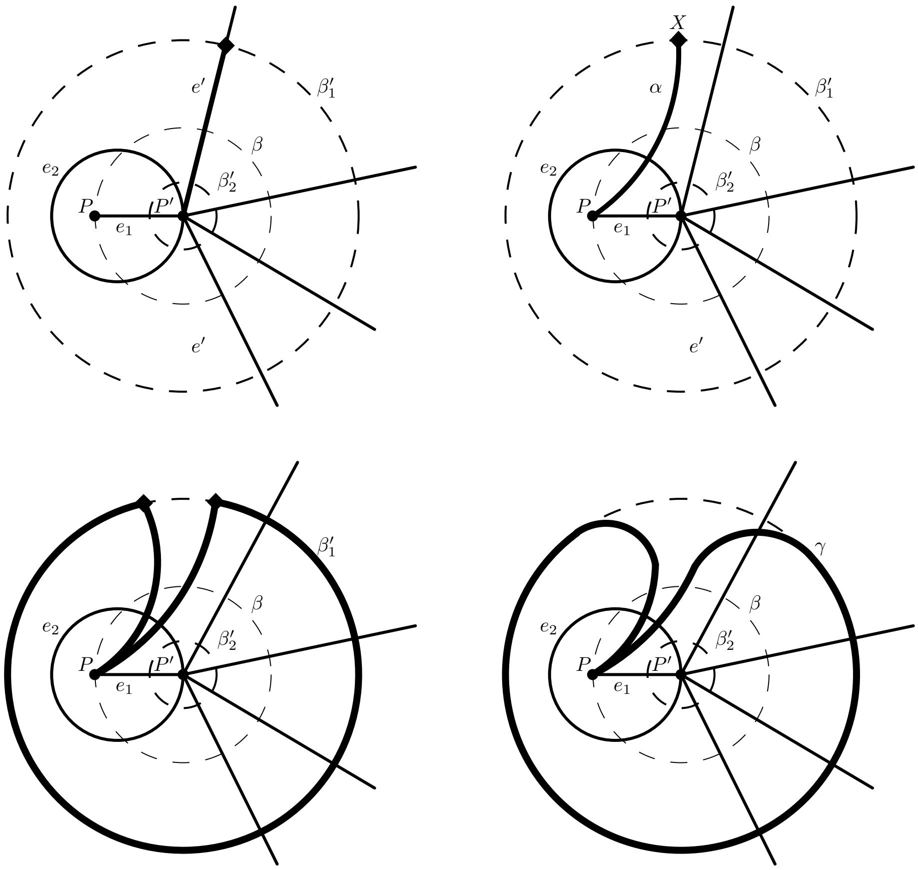

Рис. 5. Иллюстрация к доказательству последнего случая утверждения 29.

Точки X_1 и X_2 разбивают β_1' на две дуги δ_1 и δ_2. Мы можем объединить дуги α_1', δ_1, α_2' и α_1', δ_2, α_2' и получить простые кусочно-гладки дуги γ_1, γ_2 соответственно. Только одна из этих дуг является существенной и с помощью небольшой изотопии мы можем сгладить эту дугу, не изменяя при этом количество ее точек пересечения с триангуляцией(см. нижнюю часть рисунка 4). Как следует из построения и леммы 30, получившаяся дуга изотопна β, а количество точек пересечения этой дуги с триангуляцией T не превосходит $\langle \beta_1', T\rangle$

Тем самым $\langle \beta, T\rangle \leqslant \langle \beta_1', T\rangle$ и в этом случае утверждение тоже доказано.

Наконец мы рассмотрим случай, когда кривая β_2' не является существенной, а все ребра триангуляции T смежные с P не пересекаются с β_1'. В этом случае компонента V множества $S \setminus \beta_1'$, содержащая β, является диском с двумя проколами P, P', кривая β_2' стягивается на прокол P' и дуга β — единственная с точностью до изотопии существенная дуга в V с концами в проколе P(см. рисунок 5). Поскольку ребра T смежные с P не пересекают β_1', триангуляция T содержит ребра e_1, e_2, которые содержатся в V и соединяют проколы P, P' и P' с самим собой соответственно(см. рисунок 5). Эти ребра ограничивают замкнутый треугольник Δ в T. Рассмотрим замкнутый треугольник Δ' смежный

Δ и обозначим e' любую из сторон Δ' отличную от e_2. Эта сторона пересекает дугу β_1', поскольку e' не может быть изотопна e_1 или e_2. Поэтому найдется точка X на кривой β_1', которая содержится внутри Δ'(см. часть рисунка 5, расположенную справа вверху). Построим теперь дугу α, которая соединяет P с X, лежит в $\overline{V}\cap(\Delta\cup\Delta')$ и пересекает T только в одной точке (см. часть рисунка 5, расположенную справа вверху). Используя дугу α мы можем, аналогично прошлому случаю, построить простую существенную кривую γ, которая содержится в V, соединяет P с собой и пересекает T не более чем в $\langle\beta',T\rangle+2$ точках. Две дополнительные точки пересечения возникают из точки пересечения дуги α с ребром e_2(см. нижнюю часть рисунка 5). Как следует из леммы 30, дуга γ изотопна β, и поэтому выполнены следующие неравенства

$$\langle\beta,T\rangle\leqslant\langle\beta_1',T\rangle+2\leqslant 3\langle\beta_1',T\rangle.$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку кривая β_1' является существенной и поэтому существенно пересекается с T не менее чем в одной точке. Утверждение 29 доказано. □

Переходим к доказательству левого неравенства в (7). Рассмотрим произвольное ребро β триангуляции T. В силу предыдущего утверждения существует такая простая существенная замкнутая кривая β_0, что она является частью границы β' трубчатой окрестности β в $\overline{S}$, и выполнены следующие неравенства:

$$\langle\varphi(\beta),T\rangle\leqslant 3\langle\varphi(\beta_0),T\rangle\leqslant\frac{6m\langle\varphi(\beta_0),T\rangle}{\langle\beta_0,T\rangle},$$

где m — максимальная степень вершины триангуляции T. Последнее неравенство в этой цепочке выполняется, поскольку $\langle\beta_0,T\rangle\leqslant\langle\beta',T\rangle\leqslant 2m$, что нетрудно понять из рисунка 6.

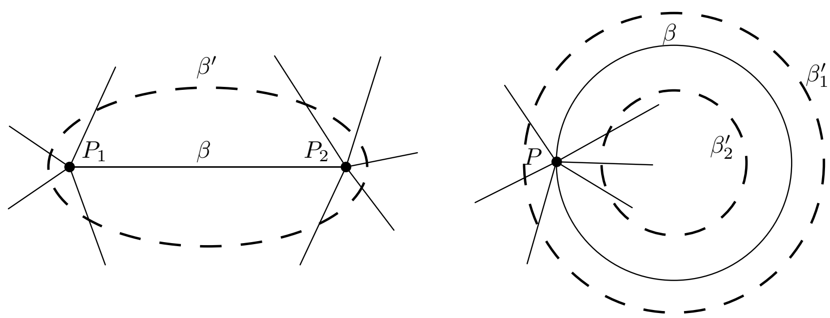

Рис. 6. Число пересечений β' с T не превосходит $2m$.

По определению $\|\varphi\|_T = \log\left(\sum\limits_{\beta\in T}\langle\varphi(\beta), T\rangle + 1\right)$, поэтому мы имеем

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_T &\leqslant \log\left(\sum_{\beta\in T} 3\langle\varphi(\beta_0), T\rangle + 1\right) \leqslant \log\left(3\left(1+\frac{1}{N}\right)\cdot\sum_{\beta\in T}\langle\varphi(\beta_0), T\rangle\right)\\
&\leqslant \log\left(\left(1+\frac{1}{N}\right)\cdot\sum_{\beta\in T}\frac{6m\langle\varphi(\beta_0), T\rangle}{\langle\beta_0, T\rangle}\right)\\
&\leqslant \log\left(6m(N+1)\sup_{\alpha}\left(\frac{\langle\varphi(\alpha), T\rangle}{\langle\alpha, T\rangle}\right)\right)\\
&\leqslant \log\left(\sup_{\alpha}\left(\frac{\langle\varphi(\alpha), T\rangle}{\langle\alpha, T\rangle}\right)\right) + \log(6m(N+1)),
\end{aligned}$$

где N — число ребер в триангуляции T. Второе неравенство в этой цепочке выполнено, поскольку для каждого ребра β триангуляции T кривая β_0 является существенной, и поэтому $\|\varphi(\beta_0)\|_T$ больше 1. Тем самым мы доказали левое неравенство (7), где роль константы C_1 играет $\log(6m(N+1))$.

Для того, чтобы доказать правое неравенство в (7), нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 31. *Пусть T и T' — идеальные триангуляции поверхности S, α — простая существенная замкнутая кривая на S. Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$\langle\alpha, T'\rangle \leqslant \langle\alpha, T\rangle\cdot(2\langle T', T\rangle + 1).$$

Доказательство. Произотопируем кривую α и триангуляцию T' так, чтобы выполнялись следующие условия:

- α и T, а также T' и T существенно пересекаются,
- α и T' пересекаются трансверсально,
- отсутствуют точки тройного трансверсального пересечения α, T и T'. При этом точки тройного пересечения, в которых пара ребер T и T' совпадает, а α пересекает эти ребра, могут существовать.

Для произвольного треугольника Δ триангуляции T мы обозначим через α_Δ и T'_Δ прообразы α и T' в Δ относительно характеристического отображения φ_Δ этого треугольника. Поскольку α и T, а также T' и T существенно пересекаются, эти прообразы состоят из простых дуг, и каждая дуга либо соединяет различные стороны Δ, либо совпадает с одной из сторон этого треугольника. Легко видеть, что можно так произотопировать α_Δ в Δ, оставляя концы дуг α_Δ неподвижными, что α_Δ и T'_Δ по прежнему будут пересекаться трансверсально, и каждая дуга из α_Δ будет пересекать дугу из T'_Δ не более чем в одной точке.

Обозначим точки пересечения α и T через $X_1, \ldots, X_n$ таким образом, чтобы $\alpha_i = [X_i, X_{i+1})$ представляли собой непересекающиеся полуинтервалы в α. Здесь мы полагаем, что $1 \leqslant i \leqslant n$ и $X_{n+1} = X_1$. По построению каждый α_i лежит в одном из треугольников Δ триангуляции T, и мы утверждаем, что каждый из этих полуинтервалов пересекает T'_Δ не более чем в $2\langle T', T\rangle + 1$ точках. Действительно, число дуг в T'_Δ, которые не совпадают ни с одной из сторон треугольника Δ не превосходит числа точек пересечения этих дуг со сторонами Δ. В свою очередь, число этих точек не превосходит $2\langle T', T\rangle$ поскольку прообраз точки персечения триангуляций T' и T при отображении φ_Δ состоит из не более чем двух точек. Для получения правильной оценки нужно добавить 1 к $2\langle T', T\rangle$ поскольку α_i пересекает ровно одну из сторон Δ. Тем самым мы получаем

$$\langle \alpha, T'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, T'\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n} (2\langle T', T\rangle + 1) = \langle \alpha, T\rangle \cdot (2\langle T', T\rangle + 1),$$

что и требовалось доказать. □

Рассмотрим простую существенную замкнутую кривую α на поверхности S и диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$. Для тройки $(\varphi(\alpha),\ \varphi(T),\ T)$ неравенство из леммы 31 записывается следующим образом:

$$\langle \varphi(\alpha), T\rangle \leqslant \langle \varphi(\alpha), \varphi(T)\rangle \cdot (2\langle T, \varphi(T)\rangle + 1).$$

Поскольку все величины в этом неравенстве являются положительными и $\langle \varphi(\alpha), \varphi(T)\rangle = \langle \alpha, T\rangle$, $\log(2\langle T, \varphi(T)\rangle + 1) \leqslant \|\varphi\|_T + \log 2$ мы получаем

$$\log\left(\frac{\langle \varphi(\alpha), T\rangle}{\langle \alpha, T\rangle}\right) \leqslant \|\varphi\|_T + \log 2.$$

Переходя к супремуму по всем простым замкнутым существенным кривым мы получаем правое неравенство в (7), где роль константы C_2 играет $\log 2$. Это завершает доказательство теоремы 26. □

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 4.

Из определения метрики Липшица следует, что $\mathrm{MCG}(S)$ действует изометриями этих метрик. Если мы зафиксируем теперь точку $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ и рассмотрим орбиту этой точки относительно действия $\mathrm{MCG}(S)$, то ограничение метрики Липшица на эту орбиту задает правоинвариантную псевдометрику $\rho_{L,\sigma}$ на группе $\mathrm{MCG}(S)$:

$$\rho_{L,\sigma}(\phi, \psi) = d_L(\varphi^*(\sigma), \psi^*(\sigma)) \tag{8}$$

для любых $\phi, \psi \in \mathrm{MCG}(S)$, где $\phi^*(\sigma)$ обозначает обратный образ гиперболической структуры σ при отображении ϕ.

Замечание 32. Функция $\rho_{L,\sigma}$, вообще говоря, не является метрикой, поскольку стабилизаторы некоторых точек $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ в группе $\mathrm{MCG}(S)$ нетривиальны.

Теперь заметим, что для любого $\epsilon > 0$ и произвольной гиперболической структуры σ, лежащей в ϵ-толстой части пространства Тейхмюллера поверхности S отображение $i_\sigma\colon (\mathrm{MCG}(S), \rho_{L,\sigma}) \to (\mathcal{T}_\epsilon(S), d_L)$, которое сопоставляет $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ структуру $\varphi^*(\sigma)$ является квазиизометрией. Действительно действие группы $\mathrm{MCG}(S)$ на $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ является кокомпактным (см. [8, утверждение 4.8.]). Поэтому отображение i_σ является $(1, D_\epsilon)$-квазиизометрией, где D_ϵ — диаметр фактор-пространства $\mathcal{T}_\epsilon(S)/\mathrm{MCG}(S)$ в метрике d_L.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что сжатая словарная метрика $\rho_{\mathcal{G}}$ и $\rho_{L,\sigma}$ квазиизометричны.

Кроме того, поскольку $\rho_{\mathcal{G}}$ и $\rho_{L,\sigma}$ являются правоинвариантными метриками, для этого достаточно доказать, что функции сложности $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ и $\| \ \|_{L,\sigma}$ эквивалентны. Действительно, пусть существуют $K > 1$ и $C > 0$ такие, что следующие неравенства

$$\frac{1}{K} \cdot \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi) - C \leqslant \|\varphi\|_{L,\sigma} \leqslant K \cdot \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi) + C$$

выполняются для любого $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$. Также в силу правой инвариантности метрики $\rho_{L,\sigma}$ выполнено следующее равенство:

$$\rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) = \max\{\|\psi\varphi^{-1}\|_{L,\sigma}, \|\varphi\psi^{-1}\|_{L,\sigma}\}.$$

Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned}
\rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) &= \max\{\|\psi\varphi^{-1}\|_{L,\sigma}, \|\varphi\psi^{-1}\|_{L,\sigma}\} \\
&\leqslant K \max\{\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\psi\varphi^{-1}), \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi\psi^{-1})\} + C \\
&\leqslant K \max\{\rho_{\mathcal{G}}(\varphi, \psi), \rho_{\mathcal{G}}(\psi, \varphi)\} + C \\
&= K\rho_{\mathcal{G}}(\varphi, \psi) + C \\
\rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) &= \max\{\|\psi\varphi^{-1}\|_{L,\sigma}, \|\varphi\psi^{-1}\|_{L,\sigma}\} \\
&\geqslant \frac{1}{K} \max\{\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\psi\varphi^{-1}), \mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}(\varphi\psi^{-1})\} - C \\
&\geqslant \frac{1}{K} \max\{\rho_{\mathcal{G}}(\varphi, \psi), \rho_{\mathcal{G}}(\psi, \varphi)\} - C \\
&= \frac{1}{K}\rho_{\mathcal{G}}(\varphi, \psi) - C.
\end{aligned}$$

В свою очередь эквивалентность функций сложности $\mathrm{zwl}_{\mathcal{G}}$ и $\| \ \|_{L,\sigma}$ следует из теоремы 3 и теоремы 26. □

Доказательство теоремы 5. Теорема 5 получается как следствие теоремы 4 и результатов Чой и Рафи, которые в своей работе [3] доказали что на толстой части пространства Тейхмюллера метрики Липшица и Тейхмюллера квазиизометричны. □

References

[1] Riccardo Benedetti, Carlo Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992. MR1219310

[2] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts, **9**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. MR0964685

[3] Y.-E. Choi, K. Rafi, *Comparison between Teichmüller and Lipschitz metrics*, J. Lond. Math. Soc (2) **76**:2 (2007), 739–756. MR2377122

[4] I. Dynnikov, *Counting intersections of normal curves*, unpublished preprint.

[5] I. Dynnikov, B. Wiest, *On the complexity of braids*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **9**:4 (2007), 801—840. MR2341833

[6] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class group*, Princeton Math. Ser. 49, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2011. Zbl 1245.57002

[7] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Thurston's work on surfaces*, translated by Djun Kim and Dan Margalit, Mathematical Notes, 48, Princeton University Press, 2012. MR3053012

[8] Ursula Hamenstädt, *Teichmüller theory in «Moduli Spaces of Riemann Surfaces»*, B. Farb, R. Hain, E. Looijenga, Editors, AMS/PCMI, 2013, 45–108. MR3114682

[9] M. W. Hirsch, *Differential topology. Grad. Texts in Math.*, **33**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976. MR0448362

[10] M. Kapovich, *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups: Lectures on Thurston's Hyperbolization*, Birkhauser's series "Progress in Mathematics", 2000.

[11] A. Papdopoulos, *Introduction to Teichmüller Theory, Old and New, Handbook of Teichmüller spaces*, **I**, European Mathematical Society Publishing House, 1-30, Zürich, 2007.

[12] R. C. Penner and J. L. Harer, *Combinatorics of train tracks*, Annals of Mathematics Studies, **125**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. MR1144770

[13] K. Rafi, *A combinatorial model for the Teichmüller metric*, GAFA Geometric And Functional Analysis, **17**:3 (2007), 936–959. MR2346280

[14] Д. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, М: Издательство иностранной литературы, 1960. MR0122987

[15] O. Teichmüller, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1982. Zbl 0545.01013

[16] W. P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, Preprint, 1986.

Vladimir Alekseevich Shastin
Laboratory of Quantum Topology,
Chelyabinsk State University,
Brat'ev Kashirinykh street 129,
Chelyabinsk 454001, Russia
E-mail address: `vashast@gmail.com`