S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 930–939 (2015) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2015.12.078 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (532,156,30,52)

А.А. МАХНЕВ, М.М. ХАМГОКОВА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical strongly regular graph with parameters (532,156,30,52). Let Γ be a strongly regular graph with parameters (532,156,30,52) and $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ be a nonsolvable group acting transitively on the vertex set of Γ. Then $\bar{G} = G/O_2(G) \cong J_1$, $S(G) = O_2(G)$ is an irreducible F_2J_1-module, $|O_2(G)| > 2$ and $\bar{G}_a \cong L_2(11)$.

Keywords: strongly regular graph, automorphism group.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a.

Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $|[a]| = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$.

Система инцидентности $(X, \mathbf{L})$, где X — множество точек и $\mathbf{L}$ — множество прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые

Makhnev, A.A., Khamgokova, M.M. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (532,156,30,52).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теорема), и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие).

Поступила 23 ноября 2015 г., опубликована 4 декабря 2015 г.

пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой l, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). *Точечным графом* геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α,s,t называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s,t)$.

Через $Izo(r)$ обозначим псевдогеометрический граф для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$. Для любой вершины a графа $Izo(r)$ подграф $\Sigma=[a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-1}(2r-1,r^3+r^2-r-1)$. А.А. Махнев [1] доказал, что псевдогеометрический граф для $pG_{r-1}(2r-1,r^3+r^2-r-1)$ не существует в случае $r=3$. Граф $Izo(4)$ имеет параметры $(3159,1408,532,704)$ и для любой вершины a подграф $\Sigma=[a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(7,75)$. Далее, для любой вершины $b\in\Sigma$ подграф $\Delta=\Sigma(b)$ имеет параметры $(532,156,30,52)$. В данной работе найдены автоморфизмы графа с параметрами $(532,156,30,52)$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(532,156,30,52)$, G *— группа автоморфизмов графа* Γ, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=19$ *и* $\alpha_1(g)=152$, *либо* $p=7$ *и* $\alpha_1(g)=210l-28$, *либо* $p=2$ *и* $\alpha_1(g)=60l-28$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $p=3$, $n=1$ *и* $\alpha_1(g)=90l+36$, *либо* $p=5$, $n=2$ *и* $\alpha_1(g)=150l-20$ *или* $n=7$ *и* $\alpha_1(g)=150l$;

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $p=2$ *и* $\alpha_1(g)=4m+60t-28$ *или* $p=13$ *и* $\alpha_1(g)=13(4s-30t-14)$, *где* $m=13s-1$;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(i) $p=23$, Ω *— сильно регулярный граф с параметрами* $(49,18,7,6)$ *или* $|\Omega|=95$, *либо*

(ii) $p=19$, $|\Omega|=114$ *и* $\alpha_1(g)=38$;

(iii) $p=17$ *и* $|\Omega|=73,90,107,158$, *либо*

(iv) $p\le 13$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— вершинно симметричный сильно регулярный граф с параметрами* $(532,156,30,52)$. *Если группа автоморфизмов* G *графа* Γ *неразрешима, то* $S(G)=O_2(G)$, *группа* $\bar G=G/O_2(G)$ *изоморфна* J_1, *действует неприводимо на* $O_2(G)$, $|O_2(G)|>2$ *и* $\bar G_a\cong L_2(11)$.

2. Предварительные результаты

Приведем сначала три вспомогательных результата.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(532,156,30,52)$, Δ *— трехвершинный подграф из* Γ, x_i *— число вершин из* $\Gamma-\Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ. *Тогда*

(1) *число* x_0+x_3 *равно* 217, *если* Δ *— коклика, равно* 197, *если* Δ *— объединение изолированной вершины и ребра,*

(2) *число* x_0+x_3 *равно* 154, *если* Δ *— клика, равно* 176, *если* Δ *— геодезический* 2*-путь.*

Доказательство. Пусть Δ — объединение изолированной вершины и ребра. Тогда $x_2 = 134-3x_3$, $x_1 = 198+3x_3$, поэтому $x_0+x_3 = 197$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. $\square$

Лемма 2 (см. [2])**.** *. Пусть* Γ *– сильно регулярный граф с собственными значениями* $k, r, s,\ s<0$ *на* v *вершинах. Если* Γ *содержит индуцированный регулярный подграф* Δ *степени* d *на* w *вершинах, то* $s \le d-(k-d)w/(v-w) \le r$*, причем в случае равенства каждая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $(k-d)w/(v-w)$ *вершинами из* Δ*.*

Если Γ – сильно регулярный граф с собственными значениями $156, 4, -26$ на 532 вершинах, то $-26 \le d-(156-d)w/(532-w) \le 4$.

Лемма 3 (см. [4], теорема 3.2)**.** *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и собственными значениями* $k, r, -m$*. Если* g *— автоморфизм* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*, то* $|\Omega| \le v\cdot\max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$*.*

Доказательство теоремы опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом графу Γ соответствует симметричная схема отношений $(X,\{R_0,R_1,R_2\})$, где R_0 — отношение равенства на множестве вершин X графа Γ, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar\Gamma$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пусть W_i — i-ое собственное подпространство из $\mathbf{C}^v$ матрицы смежности A графа Γ. Так как A перестановочна с любой матрицей из $\psi(G)$, то подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g) = |\{u\in\Gamma \mid d(u,u^g)=j\}|$.

3. **Автоморфизмы графа с с параметрами** $(532, 156, 30, 52)$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(532,156,30,52)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $156^1, 4^{455}, -26^{76}$. Ввиду леммы 3 имеем $|\Omega| \le 182$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности* 76 *равно* $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 152)/30$ *и* $\chi_2(g) - 76$ *делится на* p*;*

(2) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 152$*, либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 210l - 28$*, либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 60l - 28$*;*

(3) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $p = 3$*,* $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 90l + 36$*, либо* $p = 5$*,* $n = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 150l - 20$ *или* $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 150l$*;*

(4) *если* Ω *является* m*-кокликой, то* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 4m + 60t - 28$ *или* $p = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 13(4s - 30t - 14)$*, где* $m = 13s - 1$.

Доказательство. Для $i > 0$ положим $\alpha_i(g) = pw_i$. Имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 156 & 4 & -26 \\ 375 & -5 & 25 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 455 & 35/3 & -91/15 \\ 76 & -38/3 & 76/15 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 100 равно $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g)/3 + 4\alpha_2(g)/15)/28$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = 532 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 152)/30$. По [5, лемма 1] число $\chi_2(g) - 76$ делится на p. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 28 \cdot 19$, то $p = 2, 7, 19$. В случае $p = 19$ имеем $\chi_2(g) = 19(-w_1 + 8)/30$ и $w_1 = 8$.

В случае $p = 7$ число $7w_1 - 152$ делится на 30 и $w_1 = 30l - 4$. В случае $p = 2$ число $w_1 - 76$ делится на 30 и $w_1 = 30l - 14$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Ввиду границы Хофмана имеем $n \leq 156/26+1 = 7$. Если $n = 1$, то p делит 156 и 375, поэтому $p = 3$ и число $\chi_2(g) - 1 = (-w_1 + 42)/10$ делится на 3. Отсюда $\alpha_1(g) = 90l + 36$.

Если $n \geq 2$, то p делит 125 и $32 - n$, поэтому $p = 5$, $n = 2, 7$. В случае $n = 2$ число $(-w_1 + 32)/6$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 150l - 20$. В случае $n = 7$ число $-w_1/6$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 150l$. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \geq 2$. Ввиду границы Хофмана имеем $m \leq 532 \cdot 26/182 = 76$. Далее, p делит 52 и $272 - m$, поэтому $p = 2, 13$ В случае $p = 13$ имеем $m = 13s - 1$ и $\chi_2(g) = (52s - 13w_1 + 148)/30$. Отсюда $\alpha_1(g) = 13(4s + 30t - 14)$. В случае $p = 2$ имеем $m = 2s$ и число $(8s - 2w_1 + 152)/30$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 8s + 60t - 28$.

Если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то p делит 52 и 125, противоречие. $\square$

Лемма 5. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $[a] \subset \Omega$*, то* $\Omega = a^{\perp}$ *и* $p = 2, 5$*;*

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 30, 52)$ *и* $p \leq 23$.

Доказательство. Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Тогда для $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u] \cap \Omega$ содержит 52 вершины из $[a]$, поэтому $\alpha_1(g) = 0$ и $\Omega = a^{\perp}$. Далее, $\chi_2(g) = (4 \cdot 157 + 152)/30 = 26$ и $\chi_2(g) - 76$ делится на p, поэтому $p = 2, 5$.

Пусть Σ является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 30, 52)$. Тогда $n = 2u$, $u^2 = (k' - 52) + 121$ и $k' = u^2 - 69$. Пусть $u < 15$. Если 13 делит k', то $u = 2$, а если 13 делит $k' - 31$, то $u = 3$. В любом случае имеем противоречие.

Если $\Omega(a)$ — регулярный подграф степени 30, то по лемме 2 имеем $-26 \leq 30 - 126|\Omega(a)|/(532 - |\Omega(a)|) \leq 4$, поэтому $91 \leq |\Omega(a)|$.

Пусть $p > 47$. Тогда Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 30, 52)$, противоречие.

Пусть $p = 47$. Тогда $\lambda_\Omega = 30$, $\mu_\Omega = 5, 52$, $|\Omega| = 62, 109, 156$ и степени вершин в Ω равны 109. Пусть $p = 43$. Тогда $\lambda_\Omega = 30$, $\mu_\Omega = 9, 52$, $|\Omega| = 59, 102, 145$ и степени вершин в Ω равны 113. Пусть $p = 41$. Тогда $\lambda_\Omega = 30$, $\mu_\Omega = 11, 52$, $|\Omega| = 81, 122, 163$ и степени вершин в Ω равны 115. Пусть $p = 37$. Тогда $\lambda_\Omega = 30$, $\mu_\Omega = 15, 52$, $|\Omega| = 88, 125, 162$ и степени вершин в Ω равны 119. В любом случае имеем противоречие с тем, что для смежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $a^\perp \cap b^\perp$ содержит не менее 188 вершин из Ω.

Пусть $p = 31$. Тогда $\lambda_\Omega = 30$, $\mu_\Omega = 21, 52$, $|\Omega| = 67, 98, 129, 160$ и степени вершин в Ω равны 32, 63, 94. Отсюда Ω — регулярный граф степени 94, поэтому Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(v', 94, 30, 52)$, противоречие.

Если $|\Omega| > 176$, то ввиду леммы 1 любая $\langle g\rangle$-орбита длины p не содержит треугольников и геодезических 2-путей, поэтому является кокликой и $\alpha_1(g) = 0$.

Пусть $p = 29$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 30$, $\mu_\Omega = 23, 52$, $|\Omega| = 68, 97, 126, 155, 184$ и степени вершин в Ω равны 40, 69, 98, 127. Если $|\Omega| = 184$, то $\chi_2(g) = (4 \cdot 184 + 152)/30$, противоречие.

Если $|\Omega| = 68$, то Ω является регулярным графом степени 40 на 68 вершинах, противоречие с леммой 2. Если $|\Omega| = 97$, то для вершины a степени 69 в Ω подграф $\Omega(a)$ регулярен степени 30, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 40, снова противоречие с леммой 2. Значит, $|\Omega| = 126, 155$.

Если a — вершина степени 127 в Ω, $u \in [a] - \Omega$, то $|\Omega - a^\perp| = 27$ и u смежна с вершиной $b \in \Omega(a)$. В этом случае $[b]$ содержит не менее 38 вершин из $\Omega - a^\perp$, противоречие.

Если a — вершина степени 40 в Ω, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $9x + 38y + 67z + 96(40 - x - y - z) = 23(|\Omega| - 41)$, поэтому $29(3x + 2y + z) = 96 \cdot 40 - 23(|\Omega| - 41)$ и либо $|\Omega| = 126$ и $3x + 2y + z = 65$, либо $|\Omega| = 155$ и $3x + 2y + z = 42$. В первом случае $x + y + z = 40$ и $2x + y = 25$, поэтому $z \geq 15$. Пусть вершины $b_1, ..., b_{15} \in \Omega(a)$ смежны с 67 вершинами из $\Omega_2(a)$. Тогда $[b_i] \cap [b_j]$ содержит β вершин из $\Omega_2(a)$, $49 \leq \beta \leq 51$. Отсюда степени вершин b_i в графе $\Omega(a)$ равны 1, $\{b_1, ..., b_{15}\}$ — коклика и $[b_i] \cap [b_j]$ содержит 51 вершин из $\Omega_2(a)$ для любых различных $i, j \in \{1, ..., 15\}$. Если c, d — две вершины степени 30 в $\Omega(a)$, то можно считать, что $b_1, ..., b_6 \in \Omega(c)$, $b_7, ..., b_{12} \in \Omega(d)$, поэтому число вершин степени 30 в $\Omega(a)$ не больше 2, противоречие. Отсюда $\Omega(a)$ — объединение изолированных ребер. Если ребро из $\Omega(a)$ смежно с вершиной из $\Omega_2(a)$, то оно смежно с 29 вершинами из $\Omega_2(a)$. Если ребро $\{b_i, c_i\}$ из $\Omega(a)$ смежно с 29 вершинами из $\Omega_2(a)$, то $\Omega_2(a)$ содержит 38 вершин из $[b_i] - [c_i]$ и 19 вершин из $[c_i] - [b_i]$, противоречие. Значит, ребро $\{b_i, c_i\}$ смежно с 0 вершин из $\Omega_2(a)$ и $|[c_i] \cap \Omega_2(a)| = 9$. Противоречие с тем, что тогда $x \geq 15$.

Итак, в случае $|\Omega| = 126$ степени вершин в Ω равны 69, 98. Так как число вершин степени 69 в Ω четно, то Ω — регулярный граф степени 69, противоречие с леммой 2.

В случае $|\Omega| = 155$ имеем $x + y + z \geq 39$. Допустим, что вершина $b \in \Omega(a)$ смежны с 96 вершинами из $\Omega_2(a)$. Тогда $x+y+z = 39$, $2x+y \leq 3$, $z \geq 36$ и число ребер между множеством вершин из $\Omega(a)$, смежных с 67 вершинами из $\Omega_2(a)$, и $\Omega_2(a)-[b]$ не меньше $36 \cdot 16$. Противоречие с тем, некоторая вершина из $\Omega_2(a)-[b]$ смежна по крайней мере с 32 вершинами из $\Omega(a)$. Значит, $x + y + z = 40$, $3x + 2y + z = 42$ и $2x + y = 2$. Если $x = 0$, то $y = 2, z = 38$, а если $x = 1$, то

$y = 0, z = 39$. Пусть Δ — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных с 67 вершинами из $\Omega_2(a)$. Если b_1, b_2 — смежные вершины из Δ, то $[b_1] \cap [b_2]$ содержит не менее 20 вершин из $\Omega_2(a)$, поэтому степень по крайней мере одной из этих вершин в $\Omega(a)$ равна 1 и $|[b_1] \cap [b_2] \cap \Omega_2(a)| = 29$. Если b — вершина из Δ степени 30 в $\Omega(a)$, то $|\Delta(b)| \geq 27$ и $\Delta(b)$ содержит две вершины b_1, b_2, смежные с общей $\langle g \rangle$-орбитой на $[a] - \Omega$. Противоречие с тем, что $[b_1] \cap [b_2]$ содержит 31 вершин из $a^\perp$ и не менее $76 - 47$ вершин из $\Omega_2(a) - [b]$. Значит, степень любой вершины из Δ в $\Omega(a)$ равна 1, противоречие с тем, что число вершин степени 30 в $\Omega(a)$ четно и пересечение окрестностей двух из них содержит вершину из Δ.

Таким образом, если $|\Omega| = 155$, то степени вершин в Ω равны 69, 98. Ввиду леммы 2 Ω не является регулярным графом степени 69. Далее, подграф Ω_0 из вершин степени 98 в Ω является кокликой и $[a] \cap [b]$ содержит 52 вершины из Ω для любых двух вершин $a, b \in \Omega_0$. Если Ω_0 содержит 3 вершины a, b, c, то $\Omega(c)$ содержит γ вершин из $[a] \cap [b]$, по $52 - \gamma$ вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и $\gamma - 6$ вершин из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$. В этом случае $6 \leq \gamma \leq 14$. Если $e \in [a] \cap [b] \cap \Omega(c)$, то $\Omega(e)$ содержит не более 45 вершин из $([a] \cap [b]) \cup ([b] \cap [c]) \cup ([a] \cap [c])$ и степень e в графе Ω не больше 56, противоречие. Значит, Ω_0 содержит единственную вершину a и $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 30, поэтому число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $98 \cdot 38 = 52y + 23(56 - y)$. Отсюда $y = 84$, противоречие. $\square$

Лемма 6. *Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и $p \geq 17$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 23$ *и либо Ω — сильно регулярный граф с параметрами* $(49, 18, 7, 6)$*, либо* $|\Omega| = 95$*;*

(2) $p = 19$*,* $|\Omega| = 114$ *и* $\alpha_1(g) = 38$*;*

(3) $p = 17$ *и* $|\Omega| = 73, 90, 107, 158$.

Доказательство. Допустим, что $p = 23$. Тогда $\lambda_\Omega = 7, 30$, $\mu_\Omega = 6, 29, 52$, $|\Omega| = 23x + 3$, $x \leq 7$ и степени вершин в Ω равны 18, 41, 64, 87, 110, 133. Если $|\Omega| = 26$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (26,18,7,6), противоречие. Далее, $\chi_2(g) = (46x + 82 - \alpha_1(g)/2)/15$, поэтому $\alpha_1(g) = 46s$ и $x + 7 + 7s$ делится на 15.

В случае $x = 7$ число $s + 2$ делится на 15, противоречие. В случае $x = 6$ число $7s + 13$ делится на 15, противоречие. В случае $x = 5$ имеем $s = 3t$ и $4 + 7t$ делится на 5, поэтому $s = 9$ и $\alpha_1(g) = 414$, противоречие с тем, что каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 23 является кликой.

Если $|\Omega - a^\perp| = 7$, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $10|\Omega(a)|$, но не больше $52 \cdot 7$, поэтому $|\Omega(a)| \leq 36$, поэтому $|\Omega(a)| = 18$ и $|\Omega| = 26$, противоречие.

В случае $|\Omega| = 49$ подграф Ω сильно регулярен с параметрами (49,18,7,6). Пусть $|\Omega| = 72$. Если a — вершина степени 18 в Ω, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $53 \cdot 6 = 33y + 10(18 - y)$, поэтому $y = 6$. Если b — вершина степени 41 в Ω, то число ребер между $\Omega(b)$ и $\Omega_2(b)$ равно $29z + 6(53 - z) = 10 \cdot 41$, поэтому $z = 4$. Пусть A — множество вершин степени 18 в Ω, B — множество вершин степени 41 в Ω. Тогда A — регулярный граф степени 12, число ребер между A и B равно $6|A| = (72 - |A|)(|A| - 49)$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 41, противоречие с леммой 2.

Допустим, что $p = 19$. Тогда $\lambda_\Omega = 11, 30$, $\mu_\Omega = 14, 33, 52$, $|\Omega| = 19x$, $x \leq 9$ и степени вершин в Ω равны 23, 42, 61, 80, 99, 118, 137. Далее, $\chi_2(g) = (76(x + 2) - \alpha_1(g))/30$, поэтому $\alpha_1(g) \neq 0$ и $x \leq 8$. В случае $x = 8$ имеем

$\chi_2(g) = (5 \cdot 152 - \alpha_1(g))/30$, поэтому $\alpha_1(g) = 190w$ и $\chi_2(g) = 19(4 - w)/3$, противоречие. В случае $x = 7$ имеем $\chi_2(g) = (38 \cdot 3 - \alpha_1(g)/6)/5$, поэтому $\alpha_1(g) = 114w$ и $\chi_2(g) = 19(6 - w)/5$, противоречие.

Пусть $x \leq 6$. Если степень вершины a в Ω равна 23, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 11, противоречие. Если $|\Omega - a^\perp| = 14$, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $|\Omega(a)| \cdot 11$, но не больше $52 \cdot 14$, поэтому $|\Omega(a)| \leq 61$. В случае $|\Omega(a)| = 42$ имеем $42 \cdot 11 = 33 \cdot 14$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (57,42,30,33), противоречие. В случае $|\Omega(a)| = 61$ имеем $61 \cdot 11 = 52z + 33(14 - z)$ и $z = 11$, противоречие с тем, что $\Omega_2(a)$ содержит две смежные вершины, каждая из которых смежна с 52 вершинами из $\Omega(a)$. Значит, число $|\Omega - a^\perp|$ не равно 14, в частности, Ω не содержит вершин степени 99.

Если $x \leq 4$, то Ω — регулярный граф степени 42, противоречие с леммой 2. Если $x = 5$, то $|\Omega| = 95$, $\alpha_1(g) = 19w$, $\chi_2(g) = 19(28 - w)/30$, противоречие. Значит, $x = 6$, степени вершин в Ω равны 42, 61, 80, $\alpha_1(g) = 38w$, $\chi_2(g) = 19(16 - w)/15$, поэтому $\alpha_1(g) = 38$.

Допустим, что $p = 17$. Тогда $\lambda_\Omega = 13, 30$, $\mu_\Omega = 1, 18, 35, 52$, $|\Omega| = 17x + 5$, $x \leq 10$ и степени вершин в Ω равны 20, 37, 54, 71, 88, 105, 122, 139. Допустим, что Ω содержит вершину a степени $|\Omega| - 2$. Тогда для вершины $b \in \Omega_2(a)$ имеем $|[b] \cap \Omega(a)| = \mu_\Omega$, противоречие. Значит, $|\Omega| > 22$ и в случае $|\Omega| = 39$ граф Ω регулярен степени 20. В этом случае Ω — сильно регулярный граф с параметрами (39,20,13,18), противоречие.

Значит, $x \geq 3$. Далее, $\chi_2(g) = (4(17x + 43) - \alpha_1(g))/30$, поэтому $\alpha_1(g) = 34s$ и $s - 2x + 2$ делится на 15.

Если $x \geq 9$, то для вершины u, смежной с u^g, по лемме 1 подграф $\Sigma = u^{\langle g \rangle}$ не содержит треугольников. В случае $x = 10$ число $s - 18$ делится на 15, поэтому $\alpha_1(g) = 102$. Если степень графа Σ равна 6, то $\Sigma_2(u)$ содержит вершину w, смежную по крайней мере с 4 вершинами из $\Sigma(u)$ и для $z \in [w] \cap \Sigma(u)$ подграф $X_0(\{u, w, z\}) \cup X_3(\{u, w, z\})$ содержит 175 вершин из Ω и не менее 3 вершин из Σ, противоречие с леммой 1. Аналогичное противоречие получается и если степень графа Σ меньше 6. Итак, в случае $x = 10$ каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 17 имеет степень 8. Ввиду леммы 2 степень d регулярного графа на 34 вершинах не более 13. Поэтому вершина $w \in \Gamma - (\Omega \cup \Sigma)$ смежна не более чем с 5 вершинами из Σ. Отсюда $w^{\langle g \rangle}$ содержит не менее 2 вершин из $X_0(Y)$ для геодезического 2-пути Y из Σ, противоречие.

В случае $x = 9$ имеем $s = 1$ и $\alpha_1(g) = 34$. В случае $x = 8$ имеем $s = 14$, противоречие. В случае $x = 7$ имеем $s = 12$, снова противоречие.

Пусть $|\Omega| = 56$. Если степень a в Ω равна 37, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6 \cdot 37 = 35y + 18z + (35 - y - z)$, поэтому $2y + z = 11$. Так как $|\Omega_2(a)| = 18$, то $y + z = 35$, противоречие. Значит, Ω — реберно регулярный граф с параметрами $(56, 20, 13)$, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1 следует из лемм 4–6.

4. **Вершинно симметричный случай**

В этом параграфе будет доказано следствие 1. До конца работы предполагается, что неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 532$ и ввиду теоремы 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

Лемма 7. $|G|$ *не делится на* 19^2 *и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* f *— элемент порядка* 19 *из* G, g *— элемент порядка* $p \neq 19$ *из* $C_G(f)$, *то* $p = 2$, $|\Omega| = 19x$, $x = 0, 2, ..., 8$;

(2) G *не содержит элементов порядка* 119;

(3) $S(G) = O_{\{2,7\}}(G)$;

(4) *цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G} = G/S(G)$ *изоморфен* J_1 *или* A_{19}.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 либо $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и $\alpha_1(f) = 152$, либо $|\mathrm{Fix}(f)| = 114$ и $\alpha_1(f) = 38$. В любом случае $|G|$ не делится на 19^2.

Отсюда $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф. Если Ω — пустой граф, то ввиду теоремы 1 $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 30l + 2$ делится на 19. Поэтому $l = 5$. Так как $\alpha_1(f) = 152$ не делится на 16, то $|C_G(f)|$ не делится на 16.

Пусть Ω — непустой граф. Тогда $|\Omega| = 19x$ и $28 - x$ делится на p. Так как $|\Omega| \leq 182$, то $x \leq 9$. Если $x = 8$, то $p = 2, 5$, если $x = 7$, то $p = 3, 7$, если $x = 6$, то $p = 2, 11$, если $x = 5$, то $p = 23$, если $x = 4$, то $p = 2, 3$, если $x = 3$, то $p = 5$, если $x = 2$, то $p = 2, 13$, а если $x = 1$, то $p = 3$.

Имеем $\chi_2(g) = 38(x + 2 - \alpha_1(g)/38)/15$ и в случае $x = 8$ число $\alpha_1(g)/38 = 5s$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $s = 2$, $\chi_2(g) = 0$, $p = 2$ и каждая $\langle g\rangle$-орбита является кликой. В случае $x = 7$ число $\alpha_1(g)/114$ сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ не делится на p. В случае $x = 6$ число $\alpha_1(g)/38$ сравнимо с 8 по модулю 15, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ и $p = 2$. В случае $x = 5$ число $\alpha_1(g)/38$ сравнимо с 7 по модулю 15, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ не делится на 23, противоречие. В случае $x = 4$ число $\alpha_1(g)/114$ сравнимо с 2 по модулю 5, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ и $p = 2$. В случае $x = 3$ число $\alpha_1(g)/190$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ не делится на p. В случае $x = 2$ число $\alpha_1(g)/38$ сравнимо с 4 по модулю 15, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ и $p = 2$. В случае $x = 1$ число $\alpha_1(g)/114$ сравнимо с 1 по модулю 5, поэтому $\chi_2(g) - 76 = -76$ не делится на p. Утверждение (1) доказано.

Пусть f — элемент порядка 17 из G, g — элемент порядка 7 из $C_G(f)$. По теореме $|\mathrm{Fix}(f)| = 73, 90, 107, 158$. Так как $|\mathrm{Fix}(f)|$ не делится на 7, то Ω — непустой граф. Далее, $|\Omega| = 7x$, $x \leq 26$.

Положим $\gamma = |\mathrm{Fix}(fg)|$. Тогда 17 делит $|\Omega| - \gamma$, 7 делит $|\mathrm{Fix}(f)| - \gamma$ и 119 делит $|\Gamma| - |\Omega| - |\mathrm{Fix}(f)| + \gamma$. Если $|\mathrm{Fix}(f)| = 73$, то $\gamma = 7y + 3$, 17 делит $7(x - y) - 3$, 119 делит $462 - 7(x - y)$, поэтому $x - y = 15$. Если $|\mathrm{Fix}(f)| = 90$, то $\gamma = 7y - 1$, 17 делит $7(x - y) + 1$, 119 делит $441 - 7(x - y)$, поэтому $x - y = 12$. Если $|\mathrm{Fix}(f)| = 107$, то $\gamma = 7y + 2$, 17 делит $7(x - y) - 2$, 119 делит $427 - 7(x - y)$, поэтому $x - y = 10$. Если $|\mathrm{Fix}(f)| = 158$, то $\gamma = 7y + 4$, 17 делит $7(x - y) - 4$, 119 делит $378 - 7(x - y)$, поэтому $x - y = 3$.

В любом случае $|\Omega \cup \mathrm{Fix}(f)| = 175$. Поэтому $\mathrm{Fix}(fg)$ содержит не более одной вершины, несмежной с вершинами из $\Gamma - (\Omega \cup \mathrm{Fix}(f))$.

Пусть $a \in \mathrm{Fix}(fg)$, $[a]$ содержит β вершин из $\mathrm{Fix}(fg)$, $7p$ вершин из $\mathrm{Fix}(f) - \mathrm{Fix}(fg)$ и $17q$ вершин из $\Omega - \mathrm{Fix}(fg)$. Если a смежна с вершиной из $\Gamma - (\Omega \cup \mathrm{Fix}(f))$, то $\beta + 7p + 17q = 37$, $\beta + 7p$ сравнимо с 3 по модулю 17 и $\beta + 17q$ сравнимо с 2 по модулю 7. Поэтому либо $\beta = 3, p = 0, q = 2$, либо $\beta = 6, p = 2, q = 1$, либо $q = 0$ и $\beta = 2, 9, \ldots, 37$. Для вершины $b \in [a] \cap \mathrm{Fix}(fg)$ подграф $[a] \cap \mathrm{Fix}(fg)$ содержит 6 вершин вне $b^{\perp}$, поэтому $q = 0$ и $\beta \geq 9$. Противоречие с тем, что найдутся две вершины из $\mathrm{Fix}(fg)$, смежной с общей $\langle fg\rangle$-орбитой длины 119. Утверждение (2) доказано.

Напомним, что $v = 28 \cdot 19$, поэтому $S(G)$ является $\{2, 7, 19\}$-группой. Так как как G — неразрешимая группа, то ввиду утверждения (1) леммы 19 не делит $|S(G)|$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Ввиду [4, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(19)$, $L_3(7)$, $U_3(8)$, $L_4(7)$, J_1, J_3, $L_3(11)$, HaN, $U_4(8)$, A_n ($n = 19, ..., 28$) или ${}^2E_6(2)$. Так как $\bar{T}$ содержит собственную подгруппу индекса, делящего $28 \cdot 19$, то группа $\bar{T}$ изоморфна J_1 (и $\bar{T}_a \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 266 из $\bar{T}$) или A_{19} (и $\bar{T}_a \cong A_{18}$ — подгруппа индекса 19 из $\bar{T}$). Лемма 7 доказана. $\square$

Завершим доказательство следствия 1. Если $\bar{T} \cong A_{19}$, то в $S(G)$ найдется такая элементарная абелева 7-группа W, что A_{19} неприводимо действует на W и A_{18} нормализует гиперплоскость из W, противоречие с тем, что тогда G содержит элемент порядка 119.

Если $\bar{T} \cong J_1$, то $|S(G) : S(G)_a| = 2$, $S(G)$ — элементарная абелева 2-группа и $\bar{T}$ неприводимо действует на $S(G)$.

В случае $|S(G)| = 2$ у нас было бы разбиение графа Γ двумя орбитами группы J_1 порядка 266, которые инволюция из $S(G)$ переставляет. Каждая вершина из Γ смежна с i вершинами в другой орбите и с $k - i$ – в своей. В общем случае для регулярного подграфа Δ в сильно регулярном графе Γ выполняется следующее равенство.

Зафиксируем некоторую вершину $u \in X_i(\Delta)$ и положим $y_j = |[u] \cap X_j(\Delta)|$. Тогда верно равенство

$$\sum_j j y_j = \mu|\Delta| - i(\deg(\Delta) + \mu - \lambda).$$

В случае нашего гипотетического графа $|\Delta| = v/2 = 266$, все вершины вне Δ принадлежат $X_i(\Delta)$, и $\deg(\Delta) = k - i$. Таким образом, получаем квадратное уравнение для i, решая которое, находим, что $i = 76, 91$. Соответственно, степень подграфа равна 80 или 65. Но в представлении J_1 порядка 266 стабилизатор точки имеет орбиты порядка 1, 11, 12, 110, 132. Поэтому стабилизатор точки не может действовать на множестве порядка 80 или 65. Противоречие. Следствие 1 доказано.

References

[1] А.А. Махнев, *О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486,165,36,66)*, Украинский матем. журнал, **54**:7 (2002), 941–949. MR2015515

[2] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra*, Europ. J. Comb. **14** (1993), 397–407. MR1241907

[3] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambridge University Press, Cambridge. MR1721031

[4] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math. **311** (2011), 132–144. MR2739917

[5] А.Л. Гаврилюк, А.А. Махнев, *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Доклады академии наук, **432**:5 (2010), 583–587. MR2766516

[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean Electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 4,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Madina Mukhamedovna Khamgokova
Kabardino-Balkarian State University,
Mira str., 16,
360000, Nalchik, Russia
E-mail address: hamgokova.madina@yandex.ru