S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 940–946 (2015) УДК 514.763.3
DOI 10.17377/semi.2015.12.079 MSC 53C29

О ДЕФОРМАЦИЯХ МЕТРИК С ГРУППОЙ ГОЛОНОМИИ $Spin(3,4)$ НА КОНУСАХ НАД ПСЕВДО-РИМАНОВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

О.А. БОГОЯВЛЕНСКАЯ

Abstract. We consider deformations of cones over pseudo-Riemannian manifolds. We prove the existence of metrics with holonomy $Spin(3,4)$.

Keywords: pseudo-Riemannian manifolds, holonomy group.

1. Введение

В [1] была предложена конструкция, позволяющая строить метрики с группами голономии $Spin(7)$ на деформированных конусах над 7-мерным 3-сасакиевым многообразием. При этом топология полученного многообразия (или орбифолда) зависела от краевых условий на функции, определяющие деформацию.

В данной статье исследуется вопрос об аналоге данной конструкции для псевдо-римановых 3-Сасакиевых многообразиях M сигнатуры $(3,4)$. Под последними мы понимаем такие многообразия сигнатуры $(3,4)$, конус над которыми имеет группу голономии $Sp(1,1)$ или меньше. Деформацию конуса мы задаем при помощи функций A_1, A_2, A_3, B, зависящих от переменной, меняющейся вдоль образующей конуса:

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2\eta_i^2 - B(t)^2 \sum_{j=4}^{7} \eta_i^2$$

(построение ортонормированного базиса 1-форм η_i объяснено в следующем разделе). Мы показываем, что метрика $d\tilde{s}^2$ имеет группу голономии, лежащую

Bogoyavlenskaya, O.A., On deformations of metrics with holonomy $Spin(3,4)$ on cones over pseudo-Riemannian manifolds.

Поступила 9 октября 2015 г., опубликована 4 декабря 2015 г.

в $Spin(3,4)$, если выполнены условия:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dt} &= \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3},\\
\frac{dA_2}{dt} &= \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2-A_2^2}{A_1A_3},\\
\frac{dA_3}{dt} &= \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2-A_3^2}{A_1A_2},\\
\frac{dB}{dt} &= -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}.
\end{aligned}$$

Оказалось, что полученная система уравнений совпадает с соответствующей системой из [1], хотя в псевдоримановом случае отличается и форма, задающая $Spin(3,4)$-структуру, и соотношения в алгебре инвариантных форм на M. Это дает богатый класс метрик (локально определенных), описанных ранее в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Однако вопрос топологии пространств, на которых эти метрики могут быть определены в псевдоримановом случае существенно отличается. В последнем разделе статьи мы рассматриваем естественный пример псевдо риманова 3-Сасакиева многообразия: псевдосферу Σ в $\mathbb{R}^{4,4}$ (естественный аналог сферы S^7 в $\mathbb{R}^8$). Соответствующие деформированные конусы с группами голономии $Spin(3,4)$ диффеоморфны либо $\mathbb{R}^8$, либо $\mathbb{R}^4 \times H$, где H —линейное комплексное расслоение над S^2 с числом Чженя 4. Отметим, что в обоих случаях метрика не является метрикой прямого произведения и группа голономии $Spin(3,4)$, вообще говоря, не редуцируется к собственной подгруппе.

Автор благодарит Я. В. Базайкина за полезные обсуждения.

2. Деформация конуса над 3-Сасакиевым многообразием сигнатуры $(3,4)$

Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности 7 с метрикой ds^2 сигнатуры $(3,4)$ (т.е. в касательном пространстве к каждой точке заменой координат метрика приводится к виду $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2$). Конусом CM над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой сигнатуры $(4,4)$

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + t^2 ds^2,$$

где $t \in \mathbb{R}_+$. Многообразие M называется *3-сасакиевым*, если группа голономии конуса CM содержится в $Sp(1,1)$.

Напомним [7], что группу $Sp(1,1)$ можно определить как группу всех $\mathbb{C}$-линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^4$, которые сохраняют внешнюю форму

$$z_1 \wedge z_2 + z_3 \wedge z_4$$

и эрмитову форму

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_3\bar{z}_3 - z_4\bar{z}_4.$$

Следовательно, условие $Hol(CM) \subset Sp(1,1)$ означает [8], что существуют три параллельные почти комплексные структуры J_1, J_2, J_3 на CM, удовлетворяющие соотношениям $J_i^2 = -1$, $J_iJ_{i+1} = J_{i+2} = -J_{i+1}J_i$, где индексы приведены по модулю 3.

Пусть $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ — векторное поле, порождающее образующие конуса CM. Положим $\xi^i = J_i(\partial_t)$, $i = 1,2,3$. Следующее утверждение доказывается аналогично [1] (с небольшими техническими изменениями, связанными с индефенитностью метрики ds^2), поэтому мы его опускаем.

Предложение 1. *Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются попарно ортогональными полями Киллинга на CM длины 1, удовлетворяющими соотношениям:*

$$\nabla_{\xi^i}\xi^{i+1} = \xi^{i+2},\ [\xi^i, \xi^{i+1}] = 2\xi^{i+2},$$

где индексы берутся по модулю 3.

Следовательно, поля $\xi^i, i = 1, 2, 3$ образуют интегрируемое распределение, слои которого являются орбитами действия компактной группы Ли $SU(2)$ на CM. Заметим, что это действие может иметь ядро, равное либо $\{1\}$, либо $\{\pm 1\}$, и в последнем случае оно редуцируется к действию группы $SO(3)$.

Независимость полей $\xi^i, i = 1, 2, 3$ в каждой точке CM означает, что каждая орбита действия является факторпространством $SU(2)$ по некоторой дискретной группе Γ, т.е. имеет постоянную положительную кривизну. Следуя [1] для $p \in CM$ обозначим через $\mathcal{H}_p$ подпространство, ортогональное орбите $\mathcal{F}_p$ рассмотренного действия. Поскольку метрика ds^2 положительна определена на $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}_p \cap \mathcal{H}_p = \{0\}$ для всех $p \in CM$. Далее, поскольку $\|\partial_t\| = 1$, то метрика ds^2 отрицательно определена на $\mathcal{H}$.

Рассмотрим 1-формы η_i, двойственные к полям $\xi^i, i = 1, 2, 3$. Тогда

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + ds^2|_{\mathcal{H}}.$$

Отметим, что последнее слагаемое в формуле отрицательно определено на $\mathcal{H}$. Определим 2-формы на M следующим образом:

$$\omega_i = d\eta_i + 2\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2}. \tag{1}$$

Предложение 2. *Формы ω_i получаются операцией опускания индекса из операторов J_i и образуют параллельное $SU(2)$-инвариантное подпространство в пространстве 2-форм на T_*M.*

Доказательство аналогично риманову случаю [1] и мы его опускаем.

Предложение 3. *Локально можно выбрать такие формы $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$, аннулирующие $\mathcal{F}$, что*

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7),\\
\omega_2 &= -2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5),\\
\omega_3 &= -2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6),\\
ds^2|_{\mathcal{H}} &= -\eta_4^2 - \eta_5^2 - \eta_6^2 - \eta_7^2.
\end{aligned}$$

Отметим, что выражение для ω_i $(i = 1, 2, 3)$ отличается знаком от соответствующего выражения в римановом случае.

Доказательство. Достаточно доказать, что формы ω_i ортогональны формам вида $\eta_i \wedge \phi$, $i = 1, 2, 3$, тогда требуемое утверждение будет следовать из предыдущего предложения (отличие знаков от риманова случая объясняется опусканием индексов относительно индефинитной метрики).

По формуле Картана

$$d\eta_1(X, Y) = X\eta_1(Y) - Y\eta_1(X) - \eta_1([X, Y])$$

для любых векторных полей X, Y на M. Рассмотрим бивекторы вида $\xi^i \wedge X$, $i = 1, 2, 3$, где векторное поле X определено локально и можно считать его инвариантным относительно $SU(2)$. Форма $d\eta_1$ может принимать ненулевое значение только на базисном бивекторе $\xi^2 \wedge \xi^3$ из рассмотренного множества бивекторов:

$$d\eta_1(\xi^2, \xi^3) = -2.$$

Аналогично, форма $\eta_2 \wedge \eta_3$ принимает ненулевое значение только на базисном бивекторе $\xi^2 \wedge \xi^3$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\omega_1(\xi^2, \xi^3) = 0.$$

Таким образом, форма ω_1 принимает нулевое значение на бивекторах вида $\xi^i \wedge X$. Следовательно, форма ω_1 ортогональна пространству форм вида $\eta_i \wedge \phi$. Утверждение для ω_2, ω_3 доказывается аналогично. Предложение 3 доказано. □

Рассмотрим деформацию конусной метрики:

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 - B(t)^2 \sum_{j=4}^{7} \eta_i^2,$$

где A_1, A_2, A_3, B — гладкие положительные функции, определенные на $\mathbb{R}$.

Напомним определение $Spin(3,4)$-структуры. Пусть $\{e^i\}, i = 0, 1 \ldots, 7$ — ортонормированный базис из 1-форм на пространтсве $\mathbb{R}^{4,4}$ со стандартной метрикой сигнатуры $(4,4)$. Обозначим $e^{ijkl} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$, и определим 4-форму Φ_0 на $\mathbb{R}^{4,4}$ следующим образом:

$$\begin{array}{l}\Phi_0 = e^{0123} + e^{4567} - e^{0145} + e^{2345} + e^{0167} - e^{2367} - e^{0246} \\ -e^{1346} + e^{0275} - e^{1357} - e^{0347} + e^{1247} + e^{0356} - e^{1256}.\end{array}$$

Отметим, что форма Φ_0 отличается от формы, задающей $Spin(7)$-структуру знаками в слагаемых e^{0123} и e^{4567}. Пусть теперь N — псевдо-риманово 8-мерное многообразие с сигнатурой $(4,4)$. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi \in \Lambda^4 N$ задает $Spin(3,4)$-структуру на N, если в окрестности каждой точки $p \in N$ существует изометрия $\phi_p : T_pN \to \mathbb{R}^{4,4}$, такая, что $\phi_p^* \Phi_0 = \Phi|_p$. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия N редуцируется к подгруппе $Spin(3,4) \subset SO(4,4)$.

Положим

$$\begin{array}{l}e^0 = dt, \\ e^i = A_i \eta_i, i = 1, 2, 3, \\ e^j = B\eta_j, j = 4, \ldots, 7.\end{array}$$

Теперь рассмотрим 4-форму Φ, полученную из Φ_0 подстановкой e^i, определенных выше. Тогда форма Φ задает $Spin(3,4)$-структуру на CM.

Предложение 4. *Параллельность формы Φ равносильна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{array}{l}\frac{dA_1}{dt} = \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2 - A_3)^2 - A_1^2}{A_2 A_3}, \\ \frac{dA_2}{dt} = \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3 - A_1)^2 - A_2^2}{A_1 A_3}, \\ \frac{dA_3}{dt} = \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1 - A_2)^2 - A_3^2}{A_1 A_2}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{A_1 + A_2 + A_3}{B}.\end{array} \qquad (2)$$

Отметим, что система уравнений совпадает с найденной в [1] для риманова случая, хотя форма Φ имеет другой вид.

Доказательство. Известно [9], что параллельность Φ равносильна условию $d\Phi = 0$. Непосредственным вычислением получаем

$$\Phi = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + \frac{B^4}{8}\omega_1 \wedge \omega_1 - \frac{B^2}{2}\omega_1 \wedge (e^1 \wedge e^0 - e^3 \wedge e^2)$$

$$-\frac{B^2}{2}\omega_2 \wedge (e^2 \wedge e^0 - e^1 \wedge e^3) - \frac{B^2}{2}\omega_3 \wedge (e^3 \wedge e^0 - e^2 \wedge e^1).$$

Формула (1) замыкает пространство, порожденное внешними формами η_i, ω_i относительно операций d и $\wedge$, что позволяет явно вычислить $d\Phi$. Детали мы опускаем, из-за их громоздкости. Предложение 4 доказано. $\square$

Как и в римановом случае возможны два типа разрешения конусной особенности, которые приводят к двум возможным типам топологического строения деформированного конуса (более подробно эта конструкция описана в [1, 2, 3]).

1. Существует $t = t_0$ при котором $A_i(t_0) = 0, i = 1,2,3, B(t_0) \neq 0$. Тогда происходит затягивание слоев $\mathcal{F}$ в точку при $t = t_0$ и мы получаем многообразие (или в случае нерегулярных слоев — орбифолд) $\mathcal{M}_1$, гомеоморфное векторному расслоению над $M/SU(2)$ со слоем $\mathbb{R}^4$.

2. Существует $t = t_0$ при котором $A_1(t_0) = 0, A_2(t_0), A_2(t_0), B(t_0) \neq 0$. Тогда происходит затягивание интегральной окружности поля ξ^1 в точку при $t = t_0$ и мы получаем многообразие (либо в нерегулярном случае орбифолд) $\mathcal{M}_2$, гомеоморфное векторному расслоению над $M/U(1)$ со слоем $\mathbb{R}^2$.

В обоих ситуациях условия регулярности полученной метрики исследуются аналогично риманову случаю и приводят к тем же условиям. Мы получаем следующую теорему 1.

Теорема 1. *Предположим, что A_1, A_2, A_3 и B — C^∞-гладкие на промежутке $[0,\infty)$ решения системы (2). Если рассмотренные решения удовлетворяют усовию:*

(1) $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, |A_1'(0)| = |A_2'(0)| = |A_3'(0)| = 1$; $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$; функции A_1, A_2, A_3, B знакоопределены на промежутке $(0,\infty)$,

то метрика $d\tilde{s}^2$ продолжается до гладкой метрики на $\mathcal{M}_1$. Если рассмотренные решения удовлетворяют условию:

(2) $A_1(0) = 0, |A_1'(0)| = 4$; $A_2(0) = -A_3(0) \neq 0, A_2'(0) = A_3'(0)$, $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$; функции A_1, A_2, A_3, B знакоопределены на промежутке $(0,\infty)$,

то метрика $d\tilde{s}^2$ продолжается до гладкой метрики на $\mathcal{M}_2$.

Приведем известные точные решения системы (2). Если положить $A_1 = A_2 = A_3$, то система (2) интегрируется элементарными методами, и мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$ с группой голономии $Spin(3,4)$ [4]:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}} + \frac{9}{25}r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}\right)\sum_{i=1}^{3}\eta_i^2 - \frac{9}{5}r^2 ds^2|_{\mathcal{H}}.$$

Если положить $A_2 = A_3$, то система (2) также поддается явному интегрированию, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_1$:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{(r-r_0)^2}{(r+r_0)(r-3r_0)}dr^2 + 4r_0^2\frac{(r+r_0)(r-3r_0)}{(r-r_0)^2}\eta_1^2$$

$$+(r+r_0)(r-3r_0)(\eta_2^2+\eta_3^2) - 2(r^2-r_0^2)ds^2|_{\mathcal{H}}.$$

Если положить $A_2 = -A_3$, то мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_2$, имеющей группу голономии $SU(2,2) \subset Spin(3,4)$:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8} + r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8\right)\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) - r^2 ds^2|_{\mathcal{H}}.$$

Насколько нам известно, данные псевдо-римановы метрики в качестве метрик с группой голономии $Spin(3,4)$ ранее указаны не были.

3. Пример

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{(4,4)}$ с метрикой

$$dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2.$$

Псевдосфера Σ в $\mathbb{R}^{(4,4)}$ задается уравнением:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1.$$

Удобно ввести кватернионные переменные:

$$q_1 = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3,$$

$$q_2 = y_0 + iy_1 + jy_2 + ky_3.$$

Тогда псевдосфера задается уравнением

$$|q_1|^2 - |q_2|^2 = 1,$$

и на Σ можно ввести параметризацию:

$$q_1 = \operatorname{ch}\rho \cdot x, \;\; q_2 = \operatorname{sh}\rho \cdot y,$$

где $\rho \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{H}$, $|x| = |y| = 1$. Индуцированная на Σ метрика имеет вид

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2\rho|dx|^2 - d\rho^2 - \operatorname{sh}^2\rho|dy|^2$$

Таким образом, метрика ds^2 имеет сигнатуру $(3,4)$. Более того, несложно проверить, что конус $C\Sigma$ изометричен $\mathbb{R}^{(4,4)}$, и, следовательно, Σ является 3-Сасакиевым многообразием сигнатуры $(3,4)$.

Следовательно, все метрики, упомянутые в предыдущем разделе будут гладкими метриками с группой голономии $Spin(3,4)$ на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Выясним топологию этих пространств.

1. Введенная выше параметризация определяет диффеоморфизм $\Sigma \to S^3 \times \mathbb{R}^4 : (\rho, x, y) \mapsto (x, \rho \cdot y)$. Несложно понять, что группа $SU(2)$ в этом случает свободно действует одновременными вращениями на единичные кватернионы x, y. В этом случае расслоение $\Sigma \to \Sigma/SU(2)$ будет тривиальным и, следовательно, $\mathcal{M}_1$ диффеоморфно $\mathbb{R}^8$. Однако построенные метрики не будут метриками прямого произведения.

2. Вышеизложенные рассуждения показывают, что $\mathcal{M}_2$ диффеоморфно $H \times \mathbb{R}^4$, где H — комплексное линейное расслоение над S^2 с числом Чженя 4. Как и выше, метрики не будут метриками прямого произведения.

References

[1] Ya. V. Bazaikin, *On the new examples of complete noncompact Spin(7)-holonomy metrics*, Siberian Mathematical Journal, **48**:1 (2007), 11—32. MR2304875

[2] Ya. V. Bazaikin, *Noncompact Riemannian spaces with the holonomy group spin(7) and 3-Sasakian manifolds*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **263** (2008), 6-–17. MR2599368

[3] Ya. V. Bazaikin, E. G. Malkovich, *Spin*(7)*-structures on complex linear bundles and explicit Riemannian metrics with holonomy group* $SU(4)$, Sbornik: Mathematics, **202**:4 (2011), 3—30. MR2830234

[4] R. L. Bryant, S. L. Salamon, *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy*, Duke Math. J. **58** (1989), 829–850. MR1016448

[5] M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope, *New Complete Non-compact Spin*(7) *Manifolds*, Nucl. Phys. B **620** (2002), 29–54. MR1873145

[6] H. Kanno, Y. Yasui, *On Spin*(7) *holonomy metric based on* $SU(3)/U(1)$. I, J. Geom. Phys. **43** (2002), 293–309. MR1929908

[7] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, M.: Mir, 1964.

[8] A. Besse, *Einstein manifolds*, M.: Mir, 1990. MR1085481

[9] A. Gray, *Weak holonomy groups*, Math. Z., **123** (1971), 290–300. MR0293537

Olga Anatolevna Bogoyavlenskaya
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `bogoyavlenskaya@math.nsc.ru`