S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 947–954 (2015) УДК 517.957
DOI 10.17377/semi.2015.12.080 MSC 14H70

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

О.А. БОГОЯВЛЕНСКАЯ

Abstract. We propose a generalization of the procedure for constructing curvilinear orthogonal coordinates and, in particular, show how the isothermal elliptic coordinates on the plane are derived in the framework of the generalized construction.

Keywords: curvilinear orthogonal coordinates, elliptic coordinates.

1. Введение

Одной из интересных задач дифференциальной геометрии является изучение ортогональных криволинейных ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$. Эта задача изучалась в XIX в. — начале XX в. такими известными математиками, как Дюпен, Гаусс, Ламе, Бианки, Дарбу [1]. На сегодняшний день существует несколько подходов к ее решению.

В последние годы в работах Захарова [2] и Кривечера [3] было предложены подходы к построению таких координат, основанные методах теории интегрируемых систем. В частности, в [3] для этого было предложено использовать метод конечнозонного интегрирования. При этом исходными данными для построения таких систем координат являются риманова поверхность, т.е. спектральная кривая, которая в [3] подразумевалась несингулярной, и некоторые дополнительные величины, с ней связанные.

В работе [4] было предложено распространить конечнозонный подход на случай сингулярных спектральных кривых и при этом показано, как в рамках этой процедуры строятся полярные и сферические координаты. В случае,

Bogoyavlenskaya, O.A., On one family of finite gap curvilinear orthogonal coordinates.

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00441).

Поступила 23 октября 2015 г., опубликована 7 декабря 2015 г.

когда спектральная кривая приводима и все ее неприводимые компоненты являются рациональными кривыми, процедура построения координат сводится к решению систем линейных уравнений и вычислениям с элементарными функциями.

Мы предлагаем обобщение схемы Кричевера, которое состоит в следующем: условия нормировки функции Бейкера —Ахиезера можно ослабить, потребовав, чтобы в выбранных точках нормировки функция Бейкера —Ахиезера совпадала с некоторыми (заранее неизвестными) непостоянными функциями. Тогда условие ортогональности координат будет эквивалентно некоторой системе уравнений в частных производных на эти неизвестные функции. Ясно, что если мы сможем найти достаточно много решений этой системы, то получим богатый класс примеров ортогональных криволинейных систем координат. В частности, в рамках этого метода получается эллиптическая система координат на плоскости.

Автор благодарит И.А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения.

2. Метод построения криволинейных координат

Пусть Γ — связная комплексная алгебраическая кривая. Для простоты предположим, что она является гладкой.

Возьмем три дивизора на Γ:

$$P = P_1 + \cdots + P_n, \quad D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{g+l-1}, \quad R = R_1 + \cdots + R_l,$$

где g — род кривой Γ, $P_i, \gamma_j, R_k \in \Gamma$. Обозначим через k_i^{-1} некоторый локальный параметр на Γ около P_i, $i = 1, \ldots, n$.

Функцией Бейкера–Ахиезера, отвечающей спектральным данным

$$S = \{P, D, R\}$$

называется функция $\psi(u^1, \ldots, u^n, z),\ z \in \Gamma$ такая, что:

1) $\psi \exp(-u^i k_i)$ аналитична в окрестности P_i, $i = 1, \ldots, n$;

2) ψ мероморфна на $\Gamma \backslash \{\cup P_i\}$ с полюсами в γ_j, $j = 1, \ldots, g + l - 1$;

3) $\psi(u, R_k) = h_k(u)$, $k = 1, \ldots, l$.

В случае дивизора D общего положения такая функция существует и единственна и выражается через тэта-функцию кривой Γ [3].

Замечание. Данное определение отличается от определения, приведенного в [3], где в точках нормировки функция Бейкера — Ахиезера равна 1. В [4] использовалась нормировка

$$\psi(u, R_k) = d_k, \qquad k = 1, \ldots, l,$$

где d_k — это константы, не обращающиеся в 0 одновременно. Мы же хотим еще немного ослабить условие нормировки и считаем, что

$$\psi(u, R_k) = h_k(u), \qquad k = 1, \ldots, l,$$

где $h_k(u)$ — некоторые непостоянные функции (заранее неизвестные).

Возьмем дополнительный дивизор $Q = Q_1 + \cdots + Q_n$ на Γ такой, что $Q_i \in \Gamma \setminus \{P \cup D \cup R\}, i = 1, \ldots, n$ и обозначим через x^j следующую функцию

$$x^j(u^1, \ldots, u^n) = \psi(u^1, \ldots, u^n, Q_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Предположим, что на* Γ *существует голоморфная инволюция* $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ *такая, что*

1. $\sigma(k_i^{-1}) = -k_i^{-1}$ *в окрестности* P_i, $i = 1, \ldots, n$;

2. существует мероморфный дифференциал Ω *на* Γ *такой, что его дивизоры нулей и полюсов имеют вид*

$$(\Omega)_0 = D + \sigma D + P, \quad (\Omega)_\infty = R + \sigma R + Q,$$

и

$$\mathrm{res}_{Q_1}\Omega = ... = \mathrm{res}_{Q_n}\Omega;$$

и предположим также, что выполнено условие на функции $h_k(u)$, $k = 1, \ldots, l$:

$$\sum \mathrm{res}\,(\partial_{u^i}\psi(u, X)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma(X))\Omega) = 0, \tag{1}$$

где сумма берется по всем точкам дивизоров R *и* σR.

Тогда функции $x^j(u^1, \ldots, u^n) = \psi(u^1, \ldots, u^n, Q_j)$, $j = 1, \ldots, n$, *определяют ортогональную систему координат в* $\mathbb{R}^n$, *т.е.*

$$\partial_{u_i}x^1\partial_{u_j}x^1 + \cdots + \partial_{u_i}x^n\partial_{u_j}x^n = 0, i \neq j.$$

Замечание. В общем случае условие 1 представляет собой систему уравнений в частных производных на неизвестные функции $h_k(u)$.

Доказательство. Рассмотрим форму $\omega_{ij} = \partial_{u^i}\psi(u, P)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma(P))\Omega$, $i \neq j$. В силу условия 1 Теоремы 1 и определения функции Бейкера – Ахиезера форма ω_{ij} не имеет существенных особенностей. Форма ω_{ij} имеет простые полюсы в точках дивизоров $R, \sigma(R), Q$. Следовательно, сумма вычетов в полюсах равна 0.

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{l}\mathrm{res}_{R_s}\,(\partial_{u^i}\psi(u, P)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma(P))\Omega)\\&+\sum_{s=1}^{l}\mathrm{res}_{\sigma(R_s)}\,(\partial_{u^i}\psi(u, P)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma(P))\Omega)\\&+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}_{Q_k}\,(\partial_{u^i}\psi(u, P)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma(P))\Omega) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, если выполнено условие (1), то

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}_{Q_k}\Omega\big(\partial_{u^i}\psi(u, P)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma(P))\big)\\&= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}_{Q_k}\Omega\big(\partial_{u_i}x^1\partial_{u_j}x^1 + \cdots + \partial_{u_i}x^n\partial_{u_j}x^n\big) = 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание. По схеме работы [4] (см. также [5]) теорему 1 можно распространить на случай сингулярных спектральных кривых. При этом построение можно довести до явных формул в элементарных функциях. Особый интерес представляет случай, когда Γ — приводимая кривая, состоящая из компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{C}P^1$. Эти компоненты могут попарно пересекаться по некоторым точкам. В случае приводимой спектральной кривой

Γ в формулировке теоремы 1 дифференциал Ω необходимо заменить на регулярный дифференциал, который задается набором дифференциалов $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ на $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$, которые могут иметь полюсы в точках пересечения компонент, причем, если P — точка пересечения компонент $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_r}$, то

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{res}_P \ \Omega_{i_k} = 0.$$

Именно с этим расширением на случай сингулярных кривых и связаны указанные ниже примеры.

3. Примеры

3.1. **Пример 1.**

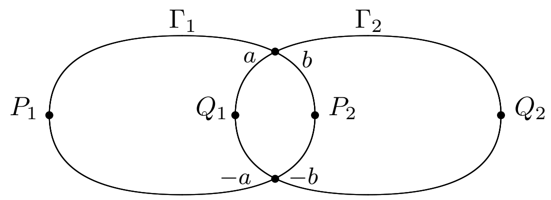

Рис. 1.

Рассмотрим кривую Γ, состоящую из двух экземпляров $\mathbb{C}P^1$, т.е. Γ_1 и Γ_2, которые пересекаются по двум точкам:

$$a \sim b, \quad (-a) \sim (-b), \quad \{a, -a\} \in \Gamma_1, \quad \{b, -b\} \in \Gamma_2.$$

Выберем дивизоры P, D и R:

$$P_1 = \infty, \quad P_2 = 0 \in \Gamma_1, \quad c_1, c_2 \in \Gamma_2, \quad R = r \in \Gamma_1.$$

Положим

$$Q_1 = \infty, \quad Q_2 = 0 \in \Gamma_2.$$

Построим функцию Бейкера — Ахиезера $\psi(u, z)$. Ее ограничение на i-тую компоненту кривой Γ будем обозначать через ψ_i, тогда функция Бейкера — Ахиезера записывается следующим образом:

$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} f_0(u), \quad \psi_2(u, z_2) = g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - c_1}.$$

Она удовлетворяет условиям склейки

$$\psi_1(u, a) = \psi_2(u, b), \quad \psi_1(u, -a) = \psi_2(u, -b)$$

и условию нормировки $\psi_1(u, r) = f(u^1, u^2)$. Из них можно найти функции $f_0(u), g_0(u), g_1(u)$ как

$$f_0(u^1, u^2) = e^{-ru^1 - \frac{u^2}{r}} f(u^1, u^2),$$

$$g_0(u^1,u^2)=\frac{e^{-\frac{(a+r)(aru^1+u^2)}{ar}}\big(b+c_1+be^{2au^1+\frac{2u^2}{a}}-c_1e^{2au^1+\frac{2u^2}{a}}\big)f(u^1,u^2)}{2b},$$

$$g_1(u^1,u^2)=\frac{(b-c_1)(b+c_1)e^{-\frac{(a+r)(aru^1+u^2)}{ar}}\big(-1+e^{2au^1+\frac{2u^2}{a}}\big)f(u^1,u^2)}{2b}.$$

Определим дифференциал Ω:

$$\Omega_1=\frac{z_1dz_1}{(z_1^2-a^2)(z_1^2-r^2)},\quad \Omega_2=\frac{(z_2^2-c_1^2)dz_2}{z_2(z_2^2-b^2)}.$$

Он должен удовлетворять условиям регулярности:

$$\mathrm{res}_a\Omega_1+\mathrm{res}_b\Omega_2=0,\quad \mathrm{res}_{-a}\Omega_1+\mathrm{res}_{-b}\Omega_2=0,$$

и условию $\mathrm{res}_{Q_1}\Omega_2=\mathrm{res}_{Q_2}\Omega_2$.

Отсюда найдем: $a^2-r^2=-\frac{1}{2}, c_1=\pm ib$. Выпишем уравнение, эквивалентное ортогональности координат

$$x=\psi_2(Q_1),\quad y=\psi_2(Q_2).$$

Для этого рассмотрим

$$\mathrm{res}_r(\partial_{u^1}\psi_1(u,z)\partial_{u^2}\psi_1(u,-z)\Omega_1)+\mathrm{res}_{-r}(\partial_{u^1}\psi_1(u,z)\partial_{u^2}\psi_1(u,-z)\Omega_1)=0$$

Подставив явный вид функции $\psi(u,z)$ и дифференциала Ω, получим следующее уравнение в частных производных на функцию $f(u^1,u^2)$:

$$r^2f(u^1,u^2)\partial_{u^2}f(u^1,u^2)+f(u^1,u^2)\partial_{u^1}f(u^1,u^2)-r\partial_{u^1}f(u^1,u^2)\partial_{u^2}f(u^1,u^2)=0.$$

Найдем какое-нибудь частное решение. Будем искать решение в виде

$$f(x,y)=g(\alpha x+\beta y),$$

тогда $f(x,y)=C_1e^{\frac{(\alpha+r^2\beta)(\alpha x+\beta y)}{r\alpha\beta}}$.

Положим $b=i, c_1=1, a=\frac{i}{\sqrt6}, r=\frac{1}{\sqrt3}, \beta=\sqrt3\alpha$, тогда формулы для координат $x=\psi_2(Q_1), y=\psi_2(Q_2)$ примут вид:

$$x=\big(\cos(\frac{u^1-6u^2}{\sqrt6})+\sin(\frac{u^1-6u^2}{\sqrt6})\big)(\mathrm{ch}(u^1+u^2)+\mathrm{sh}(u^1+u^2)),$$

$$y=\big(\cos(\frac{u^1-6u^2}{\sqrt6})-\sin(\frac{u^1-6u^2}{\sqrt6})\big)(\mathrm{ch}(u^1+u^2)+\mathrm{sh}(u^1+u^2)).$$

Или, после замены $v_1=\frac{u^1-6u^2}{\sqrt6}, v_2=u^1+u^2$,

$$x=e^{v^2}\big(\cos(v^1)+\sin(v^1)\big),\quad y=e^{v^2}\big(\cos(v^1)-\sin(v^1)\big).$$

3.2. **Пример 2 (эллиптические координаты на плоскости).** Название эллиптических координат на плоскости используется для двух систем координат (u^1, u^2) , которые связаны с евклидовыми координатами x, y соотношениями:

1)
$$x^2 = \frac{(u^1+a^2)(u^2+a^2)}{a^2-b^2}, \quad y^2 = \frac{(u^1+b^2)(u^2+b^2)}{b^2-a^2};$$

2)
$$x = \operatorname{sh}(u^1)\sin(u^2), \qquad y = \operatorname{ch}(u^1)\cos(u^2),$$

в этом случае, в отличие от первого, евклидова метрика записывается в виде
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = G(u^1, u^2)((du^1)^2 + (du^2)^2),$$
т. е. эти координаты являются изотермическими.

Мы покажем ниже как (изотермические) эллиптические координаты на плоскости, т. е. заданные соотношением 2, получаются в рамках нашей конструкции.

Пусть кривая Γ такая же, как в предыдущем примере.

Выберем дивизоры P, D и R:
$$P_1 = \infty, \quad P_2 = 0 \in \Gamma_1, \quad c_1, c_2 \in \Gamma_2, \quad r_1 \in \Gamma_1, r_2 \in \Gamma_2.$$

Положим:
$$Q_1 = \infty, \quad Q_2 = 0 \in \Gamma_2.$$

Функция Бейкера – Ахиезера $\psi(u, z)$ имеет вид:
$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} f(u), \quad \psi_2(u, z_2) = g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - c_1} + \frac{g_2(u)}{z_2 - c_2}.$$

Она удовлетворяет следующим условиям склейки:
$$\psi_1(u, a) = \psi_2(u, b), \quad \psi_1(u, -a) = \psi_2(u, -b).$$

Выберем следующие условия нормировки:
$$\psi_1(u, r_1) = h_1(u^1, u^2), \quad \psi_2(u, r_2) = h_2(u^1, u^2).$$

Условия склейки и нормировки приводят к системе линейных уравнений на функции $f(u), g_0(u), g_1(u), g_2(u)$. Разрешая ее, найдем:

$$f(u^1, u^2) = e^{-r_1 u^1 - \frac{u^2}{r_1}} h_1(u^1, u^2),$$
$$g_0(u^1, u^2) = \frac{1}{2b(b-r_2)(b+r_2)} e^{-\frac{(a+r_1)(ar_1 u^1 + u^2)}{ar_1}} \Big(\Big(b^3\big(1 + e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big)$$
$$-b^2\big(-1 + e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big)(c_1 + c_2 - r_2) + c_1 c_2\big(-1 + e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big) r_2$$
$$+b\big(1 + e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big)(c_1(c_2 - r_2) - c_2 r_2)\Big) h_1(u^1, u^2)$$
$$+2b e^{\frac{(a+r_1)(ar_1 u^1 + u^2)}{ar_1}} (c_1 - r_2)(-c_2 + r_2) h_2(u^1, u^2)\Big),$$
$$g_1(u^1, u^2) = \frac{1}{2b(c_1-c_2)(b-r_2)(b+r_2)} (b-c_1)(b+c_1) e^{-\frac{(a+r_1)(ar_1 u^1 + u^2)}{ar_1}} (c_1 - r_2)$$
$$\Big(\Big(b^2\big(-1+e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big) - b\big(1+e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big)(c_2 - r_2) - c_2\big(-1+e^{2au^1 + \frac{2u^2}{a}}\big) r_2\Big) h_1(u^1, u^2)$$
$$+2b e^{\frac{(a+r_1)(ar_1 u^1 + u^2)}{ar_1}} (c_2 - r_2) h_2(u^1, u^2)\Big),$$

$$g_2(u^1,u^2)=\frac{1}{2b(-c_1+c_2)(b-r_2)(b+r_2)}(b-c_2)(b+c_2)e^{-\frac{(a+r_1)(ar_1u^1+u^2)}{ar_1}}(c_2-r_2)$$
$$\Big(\Big(b^2\big(-1+e^{2au^1+\frac{2u^2}{a}}\big)-b\big(1+e^{2au^1+\frac{2u^2}{a}}\big)(c_1-r_2)-c_1\big(-1+e^{2au^1+\frac{2u^2}{a}}\big)r_2\Big)h_1(u^1,u^2)$$
$$+2be^{\frac{(a+r_1)(ar_1u^1+u^2)}{ar_1}}(c_1-r_2)h_2(u^1,u^2)\Big).$$

Определим дифференциал Ω:

$$\Omega_1=\frac{s_1z_1dz_1}{(z_1^2-a^2)(z_1^2-r_1^2)},\quad \Omega_2=\frac{(z_2^2-c_1^2)(z_2^2-c_2^2)dz_2}{z_2(z_2^2-b^2)(z_2^2-r_2^2)}.$$

Он должен удовлетворять условиям регулярности:

$$\mathrm{res}_a\Omega_1+\mathrm{res}_b\Omega_2=0,\quad \mathrm{res}_{-a}\Omega_1+\mathrm{res}_{-b}\Omega_2=0,$$

и условию $\mathrm{res}_{Q_1}\Omega_2=\mathrm{res}_{Q_2}\Omega_2$. Из первых двух условий найдем коэффициент

$$s_1=-\frac{(b^2-c_1^2)(b^2-c_2^2)(a^2-r_1^2)}{b^2(b^2-r_2^2)},$$

из последнего: $c_2^2=-\frac{b^2r_2^2}{c_1^2}$. Зафиксируем значение полюса $c_2=\frac{ibr_2}{c_1}$.

Наконец, выпишем уравнение, эквивалентное ортогональности координат $x=\psi_2(Q_1),y=\psi_2(Q_2)$. Для этого мы должны рассмотреть

$$\sum\mathrm{res}\,(\partial_{u^i}\psi(u,X)\partial_{u^j}\psi(u,\sigma(X))\Omega)=0,$$

где сумма берется по всем полюсам дифференциала Ω, кроме выделенных точек Q_1 и Q_2. В нашем примере это 2 точки нормировки r_1,r_2, а также их образы под действием инволюции $\sigma:z\to -z$. Имеем,

$$\mathrm{res}_{r_1}(\partial_{u^1}\psi_1(u,z)\partial_{u^2}\psi_1(u,-z)\Omega_1)+\mathrm{res}_{-r_1}(\partial_{u^1}\psi_1(u,z)\partial_{u^2}\psi_1(u,-z)\Omega_1)$$
$$+\mathrm{res}_{r_2}(\partial_{u^1}\psi_2(u,z)\partial_{u^2}\psi_2(u,-z)\Omega_2)+\mathrm{res}_{-r_2}(\partial_{u^1}\psi_2(u,z)\partial_{u^2}\psi_2(u,-z)\Omega_2)=0.$$

После подстановки сюда явных выражений для функции $\psi(u,z)$ и дифференциала Ω получим следующее уравнение в частных производных на неизвестные функции $h_1(u^1,u^2)$ и $h_2(u^1,u^2)$. Возьмем для простоты $c_1=1,b=2,a=3,r_1=4,r_2=5$, получим:

$$-h1(u^1,u^2)\big(-1872e^{\frac{u^2}{12}}\partial_{u^2}h_1(u^1,u^2)+(36-12i)e^{u^1}\big((63+42i)+(2+3i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}}\big)$$
$$\times\partial_{u^2}h_2(u^1,u^2)-117e^{\frac{u^2}{12}}\partial_{u^1}h_1(u^1,u^2)+(231+63i)e^{u^1}\partial_{u^1}h_2(u^1,u^2)$$
$$-(9+7i)e^{7u^1+\frac{2u^2}{3}}\partial_{u^1}h_2(u^1,u^2)\big)+12\big((-3+i)e^{u^1}\partial_{u^2}h_2(u^1,u^2)\times$$
$$\times\big(-((9+6i)+(2+3i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}})\partial_{u^1}h_1(u^1,u^2)+(4+12i)e^{7u^1+\frac{7u^2}{12}}\partial_{u^1}h_2(u^1,u^2)\big)$$
$$+\partial_{u^2}h_1(u^1,u^2)\big(-39e^{\frac{u^2}{12}}\partial_{u^1}h_1(u^1,u^2)$$
$$+(3-i)e^{u^1}((9+6i)+(2+3i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}})\partial_{u^1}h_2(u^1,u^2)\big)\big)=0.$$

Это уравнение имеет частное решение

$$h_1(u^1,u^2)=-\frac{(1+i)e^{7u^1+\frac{7u^2}{12}}(5\cos(u^2)\,\mathrm{ch}(u^1)-2i\sin(u^2)\,\mathrm{sh}(u^1))}{(-9-6i)+(2+3i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}}},$$

$$
\begin{aligned}
&h_2(u^1,u^2)\\
&=\frac{1}{20((-9-6i)+(2+3i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}})}\Big((-2+i)\big((27+18i)+(14+21i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}}\big)\\
&\times\cos(u^2)\operatorname{ch}(u^1)+(1+2i)\big((-27-18i)+(14+21i)e^{6u^1+\frac{2u^2}{3}}\big)\sin(u^2)\operatorname{sh}(u^1)\Big).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
x=\psi_2(u,Q_1)=\psi_2(u,\infty)=\operatorname{sh}(u^1)\sin(u^2),\\
y=\psi_2(u,Q_2)=\psi_2(u,0)=\operatorname{ch}(u^1)\cos(u^2).
\end{aligned}
$$

References

[1] G. Darboux, *Lecons sur le Systemés Ortogonaux et Coordonnées Curvilignes*, Gauthier–Villars, Paris, 1910. JFM 41.0674.04

[2] V.E. Zakharov, *Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equation*, Duke Math. J., **94**:1 (1998), 103–139. MR1635908

[3] I.M. Krichever, *Algebraic-geometric n-orthogonal curvilinear coordinate systems and solutions of the associativity equations* Functional Analysis and Its Applications, **31**:1 (1997), 32–50. MR1459831

[4] A.E. Mironov, I.A. Taimanov, *Orthogonal curvilinear coordinate systems corresponding to singular spectral curves*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **255** (2006), 180–196. MR2301618

[5] I.A. Taimanov, *Singular spectral curves in finite-gap integration*, Russian Mathematical Surveys, **66**:1 (2011), 111–150. MR2841687

Olga Anatolevna Bogoyavlenskaya
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: bogoyavlenskaya@math.nsc.ru