S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 973–990 (2015) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2015.12.084 MSC 65D25

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ДРУГИХ ОПЕРАТОРОВ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ЗАДАННЫХ В РИМАНОВОЙ ОБЛАСТИ

Е.Ю. ДЕРЕВЦОВ

Abstract. Difference approximations for covariant derivatives of tensor fields of arbitrary rank given in Riemannian domain, retaining main geometrical properties, are suggested. An approach to its construction is based on certain difference analogs for Christoffel symbols. The main criterium here is exact vanishing for a difference covariant derivative of fundamental tensor and, in addition, an exact approximation of commutation relations which is possible only at a certain developed in the paper difference approximations for the curvature tensor.

Keywords: difference approximation, Riemannian domain, covariant derivative, tensor of curvature, Christoffel symbols, Ricci formulae.

1. Введение

Ряд прикладных задач математической физики приводит к постановкам, в которых в качестве искомых выступают векторные или тензорные поля. Обычно их компоненты удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных, заданных в ограниченной области с, возможно, сложной конфигурацией границ.

Один из подходов (см., например [1]) к решению такого рода задач состоит в преобразовании (путем введения криволинейной системы координат) исходной области в одну из областей с "каноническими" границами, для которых разработаны эффективные сеточные методы решения краевых задач. Наиболее подходящими для этих целей являются прямоугольник (в плоском случае)

Derevtsov, E.Yu., A difference approximation of the covariant derivative and other operators and geometric objects given in a Riemannian domain.

Поступила 3 августа 2015 г., опубликована 15 декабря 2015 г.

и прямоугольный параллелепипед (в пространственном случае). Замена координат приводит к тому, что исходная система уравнений также преобразуется. Наиболее удобная форма записи такого рода систем получается, если использовать дифференциальные операторы, содержащие ковариантную производную.

Вопросами построения разностной аппроксимации ковариантной производной занимался ряд исследователей [1–4], в основном, в рамках теории упругости. Особенность этих исследований состояла в том, что ставилась задача построения аппроксимации в криволинейной системе координат, в которой не менялась такая важная характеристики пространства, как его кривизна, остававшаяся равной нулю. Отметим, что в работах [1], [4] обращено внимание на необходимость построения таких аппроксимаций, которые в наибольшей степени сохраняли бы важнейшие геометрические свойства, присущие ковариантной производной в непрерывном случае.

Проблема построения разностной аппроксимации ковариантной производной в ограниченных областях с заданных в них римановой метрикой (или на римановом многообразии), актуальна и в интегральной геометрии и рефракционной томографии тензорных полей [5]. Более подробные сведения о томографических постановках, разложениях тензорных полей, лучевых преобразованиях и вопросах единственности можно найти в [6-10].

Один из подходов к приближенному решению задачи рефракционной тензорной томографии, см. [11], [12], основанный на методе наименьших квадратов (МНК), приводит к аппроксимации искомого симметричного тензорного поля, которую необходимо разделить на потенциальные и соленоидальную части, каждая из которых определена своим потенциалом. Каждый же из потенциалов может быть найден как решение однородной краевой задачи для неоднородной эллиптической системы с переменными коэффициентами. Количество уравнений в каждой из систем равно валентности искомого тензорного поля, а коэффициенты зависят от типа определяемых в соответствии с теоремой разложения полей, выбранного в МНК базиса, параметров римановой метрики. Практически единственным способом решения систем такого рода являются приближенные разностные методы, требующие построения разностных аппроксимаций дифференциальных операторов, содержащих ковариантные производные.

В рассматриваемом нами случае могут в широких пределах изменяться не только коэффициенты уравнений системы, но и их количество. Разработка же своих разностных схем для каждой метрики и каждой валентности тензорного поля — весьма неблагодарная задача. Намного более перспективным выглядит путь построения универсальных разностных аппроксимаций дифференциальных операторов, коэффициенты которых зависят от компонент фундаментального тензора.

Как уже отмечалось выше, в рамках постановок теории упругости были предложены различные конструкции для разностных аппроксимаций ковариантной производной. Наш подход основан на построении разностных аналогов символов Кристоффеля и тензора кривизны. Основным критерием при этом является точное обращение в нуль разностной ковариантной производной метрического тензора, а также точная аппроксимация коммутационных соотношений (формулы Риччи) и тождества Бианки первого рода.

Приведем необходимые в дальнейшем обозначения и сформулируем некоторые соглашения. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задана декартова прямоугольная система координат, точки P, $Q \in \mathbb{R}^n$ в заданной системе имеют координаты $P(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $Q(y^1, y^2, \dots, y^n)$. Далее под *римановой областью* понимается ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂D и заданной на ней римановой метрикой g,

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}(x, y) dx^\alpha dx^\beta.$$

Ограничимся случаем *простой метрики* и областью D, *выпуклой относительно метрики* g, то есть случаем, когда любые две точки, принадлежащие $D \cup \partial D$, можно соединить единственной геодезической (конечной длины), целиком лежащей в D. Без ограничения общности далее в качестве области D рассматриваем куб со стороной 2, $D = \{-1 < x^\alpha < 1\,,\ \alpha = 1, \dots, n\}$.

Ниже считается заданной в D равномерная сетка по всем переменным x^α, $\alpha = 1, \dots, n$. Узлы сетки — точки с координатами $(x^{1i}, x^{2j}, \dots, x^{nk})$, при этом $i, j, \dots, k$ представляют собой номера узлов по соответствующей переменной, а h_1, h_2, …, h_n являются шагами сетки по соответствующим переменным. Примем соглашение, по которому буквами греческого алфавита обозначаются индексы тензорных полей, а латинские буквы относятся, как правило, к значениям переменных в узле сетки. Будем считать известными значения ковариантных и контравариантных компонент $g_{\alpha\beta}$, $g^{\gamma\delta}$ метрического тензора в узлах заданной сетки.

2. Разностная аппроксимация ковариантных производных

С целью сохранения геометрических свойств, характерных для ковариантной производной в непрерывном случае, оказалось необходимым введение двух групп разностных аппроксимаций для нее. Напомним, что символы Кристоффеля (второго рода) определяются следующим образом,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}\Big(\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho}\Big).$$

Введем первую группу разностных аппроксимаций для символов Кристоффеля,

$$[\Gamma^-]^{\alpha_+}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(i_\gamma)\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\beta+1)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta)}_{\rho\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\rho}}\Big),$$

$$[\Gamma^-]^{\alpha_-}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(i_\gamma)\Big(\frac{g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma-1)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\beta)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta-1)}_{\rho\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho-1)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\rho}}\Big), \tag{1}$$

$$[\Gamma^-]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(i_\gamma)\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma-1)}_{\rho\beta}}{2h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\beta+1)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta-1)}_{\rho\gamma}}{2h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho-1)}_{\beta\gamma}}{2h_{i_\rho}}\Big).$$

Вторая группа разностных аппроксимаций символов Кристоффеля выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned}[\Gamma^+]^{\alpha_+}_{\beta\gamma}(i_\gamma) \quad &= \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(i_\gamma+1)\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}} \\ &+ \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(i_\gamma)\Big(\frac{g^{(i_\beta+1)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta)}_{\rho\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\rho}}\Big),\end{aligned}$$

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\beta\gamma}(i_\gamma) &= \frac{1}{2} g^{\alpha\tau}(i_\gamma - 1)\frac{g^{(i_\gamma)}_{\tau\beta} - g^{(i_\gamma-1)}_{\tau\beta}}{h_{i_\gamma}}\\
&+\frac{1}{2} g^{\alpha\tau}(i_\gamma)\Big(\frac{g^{(i_\beta)}_{\tau\gamma} - g^{(i_\beta-1)}_{\tau\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\tau)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\tau-1)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\tau}}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) &= \frac{1}{4}\Big(g^{\alpha\rho}(i_\gamma+1)\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}} + g^{\alpha\rho}(i_\gamma-1)\frac{g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma-1)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}}\Big)\\
&+\frac{1}{2} g^{\alpha\rho}(i_\gamma)\Big(\frac{g^{(i_\beta+1)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta-1)}_{\rho\gamma}}{2h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho-1)}_{\beta\gamma}}{2h_{i_\rho}}\Big).
\end{aligned}
$$

Для индексов в формулах (1), (2) приняты следующие соглашения:

— второй нижний индекс в символах Кристоффеля (как правило, он обозначен через γ), при использовании их в формулах для ковариантных производных, является одновременно и индексом переменной, по которой производиться дифференцирование,

— через i_γ, $i_\gamma+1$, $i_\gamma-1$ обозначены номера узлов сетки по переменной x^γ,

— обозначением $[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\beta\gamma}(i_\gamma)$ со значением номера точки по переменной x^γ подчеркивается, что эта переменная существенна, и значение компонент метрического тензора могут браться в различных узлах сетки по переменной x^γ,

— обозначения типа $g^{\alpha\beta}(i_\gamma+1)$ подразумевают, что значение метрического тензора берется в узле с координатами $(x^{1i_1}, x^{2i_2}, \dots, x^{\gamma i_\gamma+1}, \dots, x^{ni_n})$. То же соглашение принято и относительно обозначений $g^{(i_\beta+1)}_{\tau\gamma}$, $g^{\alpha\rho(i_\gamma-1)}$ и тому подобных.

Нетрудно видеть, что последние соотношения в (1), (2) могут быть получены из двух предыдущих, соответственно. Действительно, пусть

$$
(3)\qquad
\left.
\begin{aligned}
&[\Gamma^-]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma, a) := a[\Gamma^-]^{\alpha+}_{\beta\gamma}(i_\gamma) + (1-a)[\Gamma^-]^{\alpha-}_{\beta\gamma}(i_\gamma)\\
&[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma, a) := a[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\beta\gamma}(i_\gamma) + (1-a)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\beta\gamma}(i_\gamma)
\end{aligned}
\right\},
$$

тогда, используя (3), получим формулы $[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = [\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma, 1/2)$, $[\Gamma^-]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = [\Gamma^-]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma, 1/2)$.

Лемма 1. *Первые два соотношения из* (1), (2) *аппроксимируют символы Кристоффеля с точностью* $O(h_0)$. *Последние соотношения из* (1), (2) *аппроксимируют символы Кристоффеля с точностью* $O(h_0^2)$, *где* $h_0 = \max\limits_i\{h_i\}$.

Доказательство. Выясним порядок аппроксимации по h_i, например, последнего из соотношений (2). Соответствующие разложения компонент метрического тензора в ряд Тейлора имеют вид (в частности, для $g^{\alpha\rho(i_\gamma\pm1)}$, $g^{(i_\rho\pm1)}_{\beta\gamma}$)

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\rho}(i_\gamma\pm1) &= g^{\alpha\rho(i_\gamma)} \pm h_{i_\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{\partial x^\gamma} + \frac{h^2_{i_\gamma}}{2}\frac{\partial^2 g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{(\partial x^\gamma)^2} + O(h^3_{i_\gamma}),\\
g_{\beta\gamma}(i_\rho\pm1) &= g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma} \pm h_{i_\rho}\frac{\partial g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho} + \frac{h^2_{i_\rho}}{2}\frac{\partial^2 g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma}}{(\partial x^\rho)^2} + O(h^3_{i_\rho}).
\end{aligned}
$$

Подставим разложение для $[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}$,

$$\begin{aligned}
[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) \;&= \frac{1}{4}\Big(g^{\alpha\rho(i_\gamma)} + h_{i_\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{\partial x^\gamma} + \frac{h^2_{i_\gamma}}{2}\frac{\partial^2 g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{(\partial x^\gamma)^2} + \frac{h^3_{i_\gamma}}{6}\frac{\partial^3 g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{(\partial x^\gamma)^3}\\
&+O(h^4_{i_\gamma})\Big) \times \Big(\frac{\partial g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{h_{i_\gamma}}{2}\frac{\partial^2 g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{(\partial x^\gamma)^2} + \frac{h^2_{i_\gamma}}{6}\frac{\partial^3 g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{(\partial x^\gamma)^3} + O(h^3_{i_\gamma})\Big)\\
&+ \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{h_{i_\gamma}}{2}\frac{\partial^2 g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{(\partial x^\gamma)^2} + \frac{h^2_{i_\gamma}}{6}\frac{\partial^3 g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{(\partial x^\gamma)^3} + O(h^3_{i_\gamma})\Big)\\
&\times \Big(g^{\alpha\rho(i_\gamma)} - h_{i_\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{\partial x^\gamma} + \frac{h^2_{i_\gamma}}{2}\frac{\partial^2 g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{(\partial x^\gamma)^2} - \frac{h^3_{i_\gamma}}{6}\frac{\partial^3 g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{(\partial x^\gamma)^3}\\
&+O(h^4_{i_\gamma})\Big) + O(h^2_{i_\beta}) + O(h^2_{i_\rho}),
\end{aligned}$$

в формулу (2). Простые преобразования тогда приводят к выражению

$$\begin{aligned}
[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) \;&= \frac{1}{2}g^{\alpha\rho(i_\gamma)}\frac{\partial g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} + h^2_{i_\gamma}\Big(\frac{1}{4}\frac{\partial g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{(\partial x^\gamma)^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{(\partial x^\gamma)^2}\frac{\partial g^{\alpha\rho(i_\gamma)}}{\partial x^\gamma}\\
&+ \frac{1}{12}g^{\alpha\rho(i_\gamma)}\frac{\partial^3 g^{(i_\gamma)}_{\beta\rho}}{(\partial x^\gamma)^3} + O(h^2_{i_\gamma})\Big) + O(h^3_{i_\gamma}) + O(h^2_{i_\beta}) + O(h^2_{i_\rho})\\
&= \frac{1}{2}g^{\alpha\rho(i_\gamma)}\frac{\partial g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} + O(h^2_{i_\gamma}) + O(h^2_{i_\beta}) + O(h^2_{i_\rho}).
\end{aligned}$$

Таким образом, точность аппроксимации символов Кристоффеля последним из соотношений (2) есть величина $O(h_0^2)$. Остальные утверждения леммы проверяются аналогично. $\square$

Пусть $u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}$ — компоненты r-контравариантного, s-ковариантного тензора, ∇ — риманова связность. Компоненты поля ∇u, называемые ковариантными производными, в непрерывном случае выражаются через компоненты поля u по формулам

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s} \;&\equiv u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s;\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}\\
&+ \sum_{m=1}^{r}\Gamma^{\alpha_m}_{\rho\gamma}u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\rho\alpha_{m+1}\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s} - \sum_{m=1}^{s}\Gamma^{\rho}_{\beta_m\gamma}u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}\rho\beta_{m+1}\ldots\beta_s}.
\end{aligned}$$

Определим три варианта разностной аппроксимации оператора ковариантного дифференцирования,

$$\begin{aligned}
u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s;x^\gamma} \;&= \frac{u^{\alpha_1\ldots\alpha_r(i_\gamma+1)}_{\beta_1\ldots\beta_s} - u^{\alpha_1\ldots\alpha_r(i_\gamma)}_{\beta_1\ldots\beta_s}}{h_{i_\gamma}}\\
&+ \sum_{m=1}^{r}\left[\Gamma^+\right]^{\alpha_m+}_{\rho\gamma}(i_\gamma)u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\rho\alpha_{m+1}\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}(i_\gamma)\\
&- \sum_{m=1}^{s}\left[\Gamma^-\right]^{\rho+}_{\beta_m\gamma}(i_\gamma)u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}\rho\beta_{m+1}\ldots\beta_s}(i_\gamma),
\end{aligned}$$

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s;\bar{x}^\gamma} &= \frac{u^{\alpha_1\ldots\alpha_r(i_\gamma)}_{\beta_1\ldots\beta_s} - u^{\alpha_1\ldots\alpha_r(i_\gamma-1)}_{\beta_1\ldots\beta_s}}{h_{i_\gamma}} \\
&+ \sum_{m=1}^{r} \left[\Gamma^+\right]^{\alpha_m -}_{\rho\gamma}(i_\gamma) u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\rho\alpha_{m+1}\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}(i_\gamma) \\
&- \sum_{m=1}^{s} \left[\Gamma^-\right]^{\rho -}_{\beta_m\gamma}(i_\gamma) u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}\rho\beta_{m+1}\ldots\beta_s}(i_\gamma),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s;\mathring{x}^\gamma} &= \frac{u^{\alpha_1\ldots\alpha_r(i_\gamma+1)}_{\beta_1\ldots\beta_s} - u^{\alpha_1\ldots\alpha_r(i_\gamma-1)}_{\beta_1\ldots\beta_s}}{2h_{i_\gamma}} \\
&+ \sum_{m=1}^{r} \left[\Gamma^+\right]^{\alpha_m 0}_{\rho\gamma}(i_\gamma) u^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\rho\alpha_{m+1}\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}(i_\gamma) \\
&- \sum_{m=1}^{s} \left[\Gamma^-\right]^{\rho 0}_{\beta_m\gamma}(i_\gamma) u^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}\rho\beta_{m+1}\ldots\beta_s}(i_\gamma),
\end{aligned}
$$

где разностные аппроксимации символов Кристоффеля определены соотношениями (1) и (2).

Из определений (4) ясно, для чего потребовалось введение двух групп разностных аппроксимаций. Именно, одна группа участвует в дифференцировании контравариантного тензора, тогда как другая используется при дифференцировании ковариантного. Определенные выше разностные аппроксимации ковариантной производной назовем, как обычно, правой разностью (или производной вперед), левой разностью (производной назад) и центральной разностью.

2.1. **Аппроксимация ковариантной производной метрического тензора.** Выясним порядок аппроксимации разностных соотношений, аналогичных известным свойствам

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta;\gamma} &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - g_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} = 0, \\
g^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + g^{\rho\beta}\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} + g^{\alpha\rho}\Gamma^\beta_{\rho\gamma} = 0
\end{aligned}
$$

метрического тензора, выражающим тот факт, что при ковариантном дифференцировании метрический тензор ведет себя как постоянная. Сформулируем свойства разностных аппроксимаций (4), примененных к метрическому тензору, в виде двух лемм.

Лемма 2. *Разностные аппроксимации, полученные с помощью формул* (4) *для первого из соотношений* (5)*, аппроксимируют его точно.*

Доказательство. Докажем лемму для разностной аппроксимации “вперед”. В соответствии с определением (4), аппроксимируя первое из соотношений (5) с помощью правой разности, имеем

$$
g_{\alpha\beta;x^\gamma} = \frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\beta}}{h_{i_\gamma}} - g_{\rho\beta}(i_\gamma)\left[\Gamma^-\right]^{\rho +}_{\alpha\gamma}(i_\gamma) - g_{\alpha\tau}(i_\gamma)\left[\Gamma^-\right]^{\tau +}_{\beta\gamma}(i_\gamma).
$$

Подставляя в последнее выражение определенные посредством соотношений (1) значения $[\Gamma^-]^{\rho+}_{\alpha\gamma}$ и $[\Gamma^-]^{\tau+}_{\beta\gamma}$, получим

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;x^\gamma} &= \frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\beta}}{h_{i_\gamma}} \\ &- g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}\frac{1}{2}g^{\rho\tau(i_\gamma)}\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\tau\alpha} - g^{(i_\gamma)}_{\tau\alpha}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\alpha+1)}_{\tau\gamma} - g^{(i_\alpha)}_{\tau\gamma}}{h_{i_\alpha}} - \frac{g^{(i_\tau+1)}_{\alpha\gamma} - g^{(i_\tau)}_{\alpha\gamma}}{h_{i_\tau}}\Big) \\ &- g^{(i_\gamma)}_{\tau\alpha}\frac{1}{2}g^{\tau\rho(i_\gamma)}\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\beta+1)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta)}_{\rho\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\rho}}\Big). \end{aligned}$$

Из свойств метрического тензора следует $g^{(i_\gamma)}_{\beta\rho}g^{\rho\tau(i_\gamma)} = (g_{\beta\rho}g^{\rho\tau})^{(i_\gamma)} = (\delta^\tau_\beta)^{(i_\gamma)}$ и $g^{(i_\gamma)}_{\alpha\tau}g^{\tau\rho(i_\gamma)} = (\delta^\rho_\alpha)^{(i_\gamma)}$, поэтому

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;x^\gamma} &= \frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\beta}}{h_{i_\gamma}} \\ &- \frac{1}{2}(\delta^\tau_\beta)^{(i_\gamma)}\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\tau} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\tau}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\alpha+1)}_{\gamma\tau} - g^{(i_\alpha)}_{\gamma\tau}}{h_{i_\alpha}} - \frac{g^{(i_\tau+1)}_{\alpha\gamma} - g^{(i_\tau)}_{\alpha\gamma}}{h_{i_\tau}}\Big) \\ &- \frac{1}{2}(\delta^\rho_\alpha)^{(i_\gamma)}\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\rho\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\rho\beta}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\beta+1)}_{\rho\gamma} - g^{(i_\beta)}_{\rho\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\rho+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\rho)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\rho}}\Big). \end{aligned}$$

Отрицательные члены последнего соотношения не обращаются в нуль лишь при $\tau = \beta$ и $\rho = \alpha$, следовательно

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;x^\gamma} &= \frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\beta}}{h_{i_\gamma}} \\ &- \frac{1}{2}\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\beta}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\alpha+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\alpha)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\alpha}} - \frac{g^{(i_\beta+1)}_{\alpha\gamma} - g^{(i_\beta)}_{\alpha\gamma}}{h_{i_\beta}}\Big) \\ &- \frac{1}{2}\Big(\frac{g^{(i_\gamma+1)}_{\alpha\beta} - g^{(i_\gamma)}_{\alpha\beta}}{h_{i_\gamma}} + \frac{g^{(i_\beta+1)}_{\alpha\gamma} - g^{(i_\beta)}_{\alpha\gamma}}{h_{i_\beta}} - \frac{g^{(i_\alpha+1)}_{\beta\gamma} - g^{(i_\alpha)}_{\beta\gamma}}{h_{i_\alpha}}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, разностная производная “вперед”, с использованием аппроксимации символов Кристоффеля (1), аппроксимирует первое свойство (5) ковариантной производной метрического тензора точно. Легко проверить, что аналогичными свойствами обладают левая и центральная разности. □

Лемма 3. *Разностные аппроксимации, полученные с помощью формул* (4) *для второго из соотношений* (5), *аппроксимируют его точно.*

Доказательство. Для проверки второго из свойств (5) запишем разностный аналог известного тождества

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(g_{\alpha\rho}g^{\rho\beta}) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\delta^\beta_\alpha) = 0,$$

откуда следует

$$g_{\alpha\rho}\frac{\partial g^{\rho\beta}}{\partial x^\gamma} + g^{\rho\beta}\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\gamma} = 0,$$

и выясним точность аппроксимации. Например, для правой разности имеем соотношение

$$
\begin{aligned}
&g_{\alpha\rho}^{(i_\gamma)}\,\frac{g^{\beta\rho(i_\gamma+1)}-g^{\beta\rho(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}+g^{\beta\rho(i_\gamma+1)}\,\frac{g_{\alpha\rho}^{(i_\gamma+1)}-g_{\alpha\rho}^{(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}\\
&=\frac{1}{h_{i_\gamma}}\big(g^{\beta\rho(i_\gamma+1)}g_{\rho\alpha}^{(i_\gamma+1)}-g^{\beta\rho(i_\gamma)}g_{\rho\alpha}^{(i_\gamma)}\big)=\frac{1}{h_{i_\gamma}}\big(\delta_\alpha^{\beta(i_\gamma+1)}-\delta_\alpha^{\beta(i_\gamma)}\big)=0,
\end{aligned}
$$

которое означает ее точное выполнение. Последнее соотношение может быть записано в альтернативной форме,

$$
g_{\alpha\rho}^{(i_\gamma+1)}\,\frac{g^{\beta\rho(i_\gamma+1)}-g^{\beta\rho(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}+g^{\beta\rho(i_\gamma)}\,\frac{g_{\alpha\rho}^{(i_\gamma+1)}-g_{\alpha\rho}^{(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}=0.
$$

Для левой и центральной разности выполнены аналогичные соотношения.

Докажем наше утверждение для центральной разности. Рассмотрим аппроксимацию ковариантной производной метрического тензора центральной разностью,

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}_{;\breve{x}^\gamma}\ &=\frac{g^{\alpha\beta(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\beta(i_\gamma-1)}}{2h_{i_\gamma}}+g^{\rho\beta}(i_\gamma)\,[\Gamma^+]^{\alpha_0}_{\rho\gamma}\,(i_\gamma)+g^{\tau\alpha}(i_\gamma)\,[\Gamma^+]^{\beta_0}_{\tau\gamma}\,(i_\gamma)\\
&=\frac{g^{\alpha\beta(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\beta(i_\gamma-1)}}{2h_{i_\gamma}}\\
&+\frac14 g^{\rho\beta(i_\gamma)}\Big(g^{\alpha\tau(i_\gamma+1)}\,\frac{g_{\rho\tau}^{(i_\gamma+1)}-g_{\rho\tau}^{(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}+g^{\alpha\tau(i_\gamma-1)}\,\frac{g_{\rho\tau}^{(i_\gamma)}-g_{\rho\tau}^{(i_\gamma-1)}}{h_{i_\gamma}}\Big)\\
&+\frac12 g^{\rho\beta(i_\gamma)}g^{\alpha\tau(i_\gamma)}\Big(\frac{g_{\tau\gamma}^{(i_\rho+1)}-g_{\tau\gamma}^{(i_\rho-1)}}{2h_{i_\rho}}-\frac{g_{\rho\gamma}^{(i_\tau+1)}-g_{\rho\gamma}^{(i_\tau-1)}}{2h_{i_\tau}}\Big)\\
&+\frac14 g^{\tau\alpha(i_\gamma)}\Big(g^{\beta\rho(i_\gamma+1)}\,\frac{g_{\rho\tau}^{(i_\gamma+1)}-g_{\rho\tau}^{(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}+g^{\beta\rho(i_\gamma-1)}\,\frac{g_{\rho\tau}^{(i_\gamma)}-g_{\rho\tau}^{(i_\gamma-1)}}{h_{i_\gamma}}\Big)\\
&+\frac12 g^{\alpha\tau(i_\gamma)}g^{\beta\rho(i_\gamma)}\Big(\frac{g_{\rho\gamma}^{(i_\tau+1)}-g_{\rho\gamma}^{(i_\tau-1)}}{2h_{i_\tau}}-\frac{g_{\tau\gamma}^{(i_\rho+1)}-g_{\tau\gamma}^{(i_\rho-1)}}{2h_{i_\rho}}\Big).
\end{aligned}
$$

Далее, используя свойства метрического тензора (в разностной форме), получаем

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}_{;\breve{x}^\gamma}&=\frac{g^{\alpha\beta(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\beta(i_\gamma-1)}}{2h_{i_\gamma}}\\
&-\frac14\Big(\delta_\tau^{\beta(i_\gamma)}\,\frac{g^{\alpha\tau(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\tau(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}+\delta_\tau^{\beta(i_\gamma)}\,\frac{g^{\alpha\tau(i_\gamma)}-g^{\alpha\tau(i_\gamma-1)}}{h_{i_\gamma}}\Big)\\
&-\frac14\Big(\delta_\rho^{\alpha(i_\gamma)}\,\frac{g^{\beta\rho(i_\gamma+1)}-g^{\beta\rho(i_\gamma)}}{h_{i_\gamma}}+\delta_\rho^{\alpha(i_\gamma)}\,\frac{g^{\beta\rho(i_\gamma)}-g^{\beta\rho(i_\gamma-1)}}{h_{i_\gamma}}\Big)\\
&=\frac{g^{\alpha\beta(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\beta(i_\gamma-1)}}{2h_{i_\gamma}}\\
&-\frac12\Big(\frac{g^{\alpha\beta(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\beta(i_\gamma-1)}}{2h_{i_\gamma}}\Big)-\frac12\Big(\frac{g^{\alpha\beta(i_\gamma+1)}-g^{\alpha\beta(i_\gamma-1)}}{2h_{i_\gamma}}\Big)=0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, аппроксимация точна. Аналогичным образом убеждаемся в точности аппроксимации второго соотношения (5) левой и правой разностью, с использованием соответствующих разностных аппроксимаций символов Кристоффеля. □

Доказанные леммы подтверждают обоснованность введенного определения разностной аппроксимации ковариантной производной, так как оно сохраняет неизменным свойство метрического тензора служить аналогом константы при ковариантном дифференцировании.

2.2. **Аппроксимация второй ковариантной производной.** Построим аппроксимации вторых ковариантных производных и выясним порядки аппроксимации соотношений, в которых они участвуют. Заметим, что это, в свою очередь, ставит вопрос об построении аппроксимации тензора кривизны и установлении разностных аналогов его свойств.

Выберем подходящую разностную аппроксимацию обычной смешанной производной, в отличие от ковариантной смешанной производной, построением аппроксимации для которой мы займемся ниже. Воспользуемся аппроксимацией, описанной в [13], с семиточечным шаблоном и с погрешностью аппроксимации второго порядка,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \longrightarrow \frac{1}{2}\Big(u_{\bar{x}^\beta x^\alpha} + u_{x^\beta \bar{x}^\alpha}\Big). \tag{6}$$

В более подробной записи,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\Big|_{x^{\alpha}{}_i, x^{\beta}{}_j} &= \frac{1}{2h_{i_\alpha} h_{j_\beta}}\Big(\big(u^{(j_\beta, i_\alpha+1)} - u^{(j_\beta-1, i_\alpha+1)} \\ &\qquad -u^{(j_\beta, i_\alpha)} + u^{(j_\beta-1, i_\alpha)}\big) \\ &\quad + \big(u^{(j_\beta+1, i_\alpha)} - u^{(j_\beta, i_\alpha)} - u^{(j_\beta+1, i_\alpha-1)} + u^{(j_\beta, i_\alpha-1)}\big)\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим еще одну разностную аппроксимацию смешанной производной, построенную на шаблоне из четырех точек и обладающей той же погрешностью,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \to u_{\bar{x}^\alpha x^\alpha}, && \text{при} \quad \alpha = \beta, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \to \frac{1}{4}\big(u_{\bar{x}^\beta \bar{x}^\alpha} + u_{x^\beta \bar{x}^\alpha} + u_{\bar{x}^\beta x^\alpha} + u_{x^\beta x^\alpha}\big), && \text{при} \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Преобразуя записанное подробнее второе из соотношений (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} &\to \frac{1}{4}\Big(\big(\frac{u^{(j_\beta)} - u^{(j_\beta-1)}}{h_{j_\beta}}\big)_{\bar{x}^\alpha} + \big(\frac{u^{(j_\beta+1)} - u^{(j_\beta)}}{h_{j_\beta}}\big)_{\bar{x}^\alpha} \\ &\quad + \big(\frac{u^{(j_\beta)} - u^{(j_\beta-1)}}{h_{j_\beta}}\big)_{x^\alpha} + \big(\frac{u^{(j_\beta+1)} - u^{(j_\beta)}}{h_{j_\beta}}\big)_{x^\alpha}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{h_{i_\alpha} h_{j_\beta}}\big(u^{(j_\beta, i_\alpha)} - u^{(j_\beta, i_\alpha-1)} - u^{(j_\beta-1, i_\alpha)} \\ &\quad + u^{(j_\beta-1, i_\alpha-1)} + u^{(j_\beta+1, i_\alpha)} - u^{(j_\beta+1, i_\alpha-1)} \\ &\quad - u^{(j_\beta, i_\alpha)} + u^{(j_\beta, i_\alpha-1)} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&+u^{(j_\beta,i_\alpha+1)}-u^{(j_\beta,i_\alpha)}-u^{(j_\beta-1,i_\alpha+1)}+u^{(j_\beta-1,i_\alpha)}\\&+u^{(j_\beta+1,i_\alpha+1)}-u^{(j_\beta+1,i_\alpha)}-u^{(j_\beta,i_\alpha+1)}+u^{(j_\beta,i_\alpha)}\big)\\&=\frac{1}{4}\frac{1}{h_{i_\alpha}h_{j_\beta}}\big(u^{(j_\beta+1,i_\alpha+1)}-u^{(j_\beta+1,i_\alpha-1)}\\&\qquad -u^{(j_\beta-1,i_\alpha+1)}+u^{(j_\beta-1,i_\alpha-1)}\big),\end{aligned}$$

убеждаемся в том, что последнее выражение в приведенной цепочке есть не что иное, как $u_{\check{x}^\beta\check{x}^\alpha}$, и следовательно разностная аппроксимация (8) представляет собой результат последовательного применение двух центральных разностей по переменным x^α и x^β.

Заметим, что (7) можно преобразовать следующим образом,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\Big|_{x^{\alpha_i},x^{\beta_j}} &= \frac{1}{2h_{i_\alpha}h_{i_\beta}}\Big(\big(u^{(j_\beta+1,i_\alpha)}-2u^{(j_\beta,i_\alpha)}+u^{(j_\beta-1,i_\alpha)}\big)\\&+\big(u^{(j_\beta,i_\alpha+1)}-2u^{(j_\beta,i_\alpha)}+u^{(j_\beta,i_\alpha-1)}\big)\\&-\big(u^{(j_\beta+1,i_\alpha-1)}-2u^{(j_\beta,i_\alpha)}+u^{(j_\beta-1,i_\alpha+1)}\big)\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{h_{i_\beta}}{h_{i_\alpha}}u_{x^\beta\bar{x}^\beta}\,(x^\alpha)+\frac{h_{i_\alpha}}{h_{i_\beta}}u_{x^\alpha\bar{x}^\alpha}\,(x^\beta)\\&-\frac{h_{i_\alpha}^2+h_{i_\beta}^2}{h_{i_\alpha}h_{i_\beta}}u_{+x^\beta-x^\alpha}\Big),\end{aligned}\tag{10}$$

где через $u_{+x^\beta-x^\alpha}$ обозначено выражение

$$u_{+x^\beta-x^\alpha}=\frac{u^{(j_\beta-1,i_\alpha+1)}-2u^{(j_\beta,i_\alpha)}+u^{(j_\beta+1,i_\alpha-1)}}{h_{i_\alpha}^2+h_{i_\beta}^2}.$$

Приведенные вычисления и установленные свойства позволяют сформулировать следующий результат.

Лемма 4. *Разностные аппроксимации* (6)–(10) *смешанной производной симметричны, т. е.*

$$\frac{1}{2}\big(u_{\bar{x}^\beta x^\alpha}+u_{x^\beta\bar{x}^\alpha}\big)=\frac{1}{2}\big(u_{\bar{x}^\alpha x^\beta}+u_{x^\alpha\bar{x}^\beta}\big),\qquad u_{\check{x}^\beta\check{x}^\alpha}=u_{\check{x}^\alpha\check{x}^\beta}.\tag{11}$$

Доказательство. Установим порядок разностной аппроксимации соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}-\frac{\partial u}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}-\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^\gamma\partial x^\beta}-\frac{\partial u}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\beta}\Big)=0,$$

означающего симметрию вторых смешанных ковариантных производных от произвольной функции $u(x^1,\dots,x^n)$ с областью определения $D\subset\mathbb{R}^n$. Свойство (11) означает, что необходимо проверить лишь равенство

$$-\frac{\partial u}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}+\frac{\partial u}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\beta}=0.$$

Обозначим ковариантное векторное поле $\dfrac{\partial u}{\partial x^\rho}=u_{;\rho}$ через v_ρ. В соответствии с (4) получим, что для любого варианта конечной разности свойство

$$-v_\rho\left(\big[\Gamma^-\big]^{\rho+}_{\beta\gamma}-\big[\Gamma^-\big]^{\rho+}_{\gamma\beta}\right)=0$$

выполняется точно, так как разностные аппроксимации символов Кристоффеля (1) симметричны относительно нижних индексов,

$$\left[\Gamma^-\right]^{\alpha_+}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = \left[\Gamma^-\right]^{\alpha_+}_{\gamma\beta}(i_\beta),\ \left[\Gamma^-\right]^{\alpha_-}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = \left[\Gamma^-\right]^{\alpha_-}_{\gamma\beta}(i_\beta),\ \left[\Gamma^-\right]^{\alpha_0}_{\beta\gamma}(i_\gamma) = \left[\Gamma^-\right]^{\alpha_0}_{\gamma\beta}(i_\beta).$$

□

3. Разностная аппроксимация тензора кривизны

Построим разностные аппроксимации формул Риччи [14], представляющих собой один из вариантов коммутационных соотношений,

$$v^\alpha_{;\beta;\gamma} - v^\alpha_{;\gamma;\beta} = v^\rho R^\alpha_{\rho\beta\gamma}, \tag{12}$$

$$v_{\alpha;\beta;\gamma} - v_{\alpha;\gamma;\beta} = -v_\rho R^\rho_{\alpha\beta\gamma}, \tag{13}$$

для вторых ковариантных производных от векторных полей. Тензор кривизны (Римана-Кристоффеля) $R^\rho_{\alpha\beta\gamma}$ выражается через символы Кристоффеля и их производные следующим образом [15],

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &= \frac{\partial}{\partial x^\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta} - \Gamma^\tau_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\tau\gamma} \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial x^\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta}\Big) - \Big(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\tau_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\tau\gamma}\Big). \end{aligned}$$

Для ковариантных компонент тензора кривизны, которые легко получить с помощью операции опускания индексов, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}R^\rho_{\beta\gamma\delta}$, получаем соотношение

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\Big) - g_{\rho\tau}\left(\Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\tau_{\alpha\delta} - \Gamma^\rho_{\beta\delta}\Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\right),$$

которое, вероятно, более пригодно для построения разностной аппроксимации тензора кривизны. В построении аппроксимации будем руководствоваться логикой вывода формул (4).

Проанализируем вывод формулы (12). Для ковариантных производных контравариантных компонент векторного поля, которые являются компонентами смешанного тензора второй валентности,

$$v^\alpha_{;\gamma} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\gamma} + v^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\gamma}\,, \qquad v^\alpha_{;\delta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\delta} + v^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\delta}, \tag{14}$$

введем обозначения u^α_γ и u^α_δ и еще раз произведем ковариантное дифференцирование по δ и γ, соответственно,

$$u^\alpha_{\gamma;\delta} = \frac{\partial u^\alpha_\gamma}{\partial x^\delta} + u^\rho_\gamma\Gamma^\alpha_{\rho\delta} - u^\alpha_\rho\Gamma^\rho_{\gamma\delta}\,, \qquad u^\alpha_{\delta;\gamma} = \frac{\partial u^\alpha_\delta}{\partial x^\gamma} + u^\rho_\delta\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} - u^\alpha_\rho\Gamma^\rho_{\delta\gamma}. \tag{15}$$

Далее, используя (14), получим следующие выражения для вторых производных,

$$\begin{aligned} u^\alpha_{\gamma;\delta} = v^\alpha_{;\gamma;\delta} &\frac{\partial}{\partial x^\delta}\big(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\gamma} + v^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\gamma}\big) + \big(\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\gamma} + v^\tau\Gamma^\rho_{\tau\gamma}\big)\Gamma^\alpha_{\rho\delta} - \big(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\rho} + v^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\rho}\big)\Gamma^\rho_{\gamma\delta} \\ &= \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\delta}\big(v^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\gamma}\big) + \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\delta} - v^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\delta} + v^\tau\Gamma^\rho_{\tau\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha}_{\delta;\gamma} = v^{\alpha}_{;\delta;\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\big(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + v^{\tau}\Gamma^{\alpha}_{\tau\delta}\big) + \big(\frac{\partial v^{\rho}}{\partial x^{\delta}} + v^{\tau}\Gamma^{\rho}_{\tau\delta}\big)\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} - \big(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} + v^{\tau}\Gamma^{\alpha}_{\tau\rho}\big)\Gamma^{\rho}_{\delta\gamma} \\
= \frac{\partial^2 v^{\alpha}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\big(v^{\tau}\Gamma^{\alpha}_{\tau\delta}\big) + \frac{\partial v^{\rho}}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} - \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}_{\delta\gamma} + v^{\tau}\Gamma^{\rho}_{\tau\delta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} - v^{\tau}\Gamma^{\alpha}_{\tau\rho}\Gamma^{\rho}_{\delta\gamma}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим разность

$$
\begin{aligned}
v^{\alpha}_{;\gamma;\delta} - v^{\alpha}_{;\delta;\gamma} &= \big(\frac{\partial^2 v^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 v^{\alpha}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\gamma}}\big) + v^{\tau}\big(\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\tau\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}_{\tau\delta}\big) \\
&+ \frac{\partial v^{\tau}}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\tau\gamma} - \frac{\partial v^{\tau}}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}_{\tau\delta} + \frac{\partial v^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}_{\rho\delta} - \frac{\partial v^{\rho}}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} + \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}_{\delta\gamma} - \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}_{\gamma\delta} \\
&+ v^{\tau}\big(\Gamma^{\rho}_{\tau\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\rho\delta} - \Gamma^{\rho}_{\tau\delta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\big) - v^{\tau}\big(\Gamma^{\alpha}_{\tau\rho}\Gamma^{\rho}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\rho}\Gamma^{\rho}_{\delta\gamma}\big).
\end{aligned}
$$

После сокращений приходим к коммутационному соотношению (12),

$$
v^{\alpha}_{;\gamma;\delta} - v^{\alpha}_{;\delta;\gamma} = v^{\tau}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\tau\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}_{\tau\delta} + \Gamma^{\rho}_{\tau\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\rho\delta} - \Gamma^{\rho}_{\tau\delta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\Big). \tag{16}
$$

Перейдем к построению разностной аппроксимации соотношения (16). Простейший способ образования смешанной производной — это последовательное применение двух центральных разностей. К сожалению, этот вариант не вполне удачный, так как если координаты различны, то аппроксимация приемлема, но при одной и той же координате мы получаем неудовлетворительную аппроксимацию

$$
\begin{aligned}
(u_{\breve{x}^{\alpha}})_{\breve{x}^{\alpha}} &= \Big[\frac{1}{2h_{i_\alpha}}\big(u^{(i_\alpha+1)} - u^{(i_\alpha-1)}\big)\Big]_{\breve{x}^{\alpha}} = \frac{1}{2h_{i_\alpha}}\Big(\frac{1}{2h_{i_\alpha}}\big(u^{(i_\alpha+2)} - u^{(i_\alpha)}\big) \\
&- \frac{1}{2h_{i_\alpha}}\big(u^{(i_\alpha)} - u^{(i_\alpha-2)}\big)\Big) = \frac{1}{4h^2_{i_\alpha}}\big(u^{(i_\alpha+2)} - 2u^{(i_\alpha)} + u^{(i_\alpha-2)}\big).
\end{aligned}
$$

Предпочтительней найти универсальную аппроксимацию и обойтись без оговорок на специальный случай равенства координат. Можно воспользоваться, например, аппроксимацией (6) либо (9). Действительно,

$$
\frac{1}{2}\big(u_{\bar{x}^{\alpha}x^{\alpha}} + u_{x^{\alpha}\bar{x}^{\alpha}}\big) = u_{\bar{x}^{\alpha}x^{\alpha}},
$$

а использование (9) приводит к тому, что выражение (10) обращается в нуль при $\beta = \alpha$,

$$
u^{(i_\alpha-1,i_\alpha+1)} \equiv u^{(i_\alpha)} \equiv u^{(i_\alpha+1,i_\alpha-1)}.
$$

Запишем разностные аналоги соотношений (15). В соответствии с (4) получим

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha}_{\gamma;x^{\delta}} &= \frac{u^{\alpha(i_\delta+1)}_{\gamma} - u^{\alpha(i_\delta)}_{\gamma}}{h_{i_\delta}} + u^{\rho}_{\gamma}(i_\delta)[\Gamma^{+}]^{\alpha+}_{\rho\delta}(i_\delta) - u^{\alpha}_{\rho}(i_\delta)[\Gamma^{-}]^{\rho+}_{\gamma\delta}(i_\delta), \\
u^{\alpha}_{\gamma;\bar{x}^{\delta}} &= \frac{u^{\alpha(i_\delta)}_{\gamma} - u^{\alpha(i_\delta-1)}_{\gamma}}{h_{i_\delta}} + u^{\rho}_{\gamma}(i_\delta)[\Gamma^{+}]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta) - u^{\alpha}_{\rho}(i_\delta)[\Gamma^{-}]^{\rho-}_{\gamma\delta}(i_\delta),
\end{aligned}
$$

и далее,

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha}_{\delta;x^{\gamma}} &= \frac{u^{\alpha(j_\gamma+1)}_{\delta} - u^{\alpha(j_\gamma)}_{\delta}}{h_{j_\gamma}} + u^{\rho}_{\delta}(j_\gamma)[\Gamma^{+}]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma) - u^{\alpha}_{\rho}(j_\gamma)[\Gamma^{-}]^{\rho+}_{\delta\gamma}(j_\gamma), \\
u^{\alpha}_{\delta;\bar{x}^{\gamma}} &= \frac{u^{\alpha(j_\gamma)}_{\delta} - u^{\alpha(j_\gamma-1)}_{\delta}}{h_{j_\gamma}} + u^{\rho}_{\delta}(j_\gamma)[\Gamma^{+}]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma) - u^{\alpha}_{\rho}(j_\gamma)[\Gamma^{-}]^{\rho-}_{\delta\gamma}(j_\gamma).
\end{aligned}
$$

Симметричность относительно нижних индексов разностных аппроксимаций (1) символов Кристоффеля приводит к сокращению последних членов при вычитаниях

$$u^{\alpha}_{\gamma;x^\delta} - u^{\alpha}_{\delta;x^\gamma}, \quad u^{\alpha}_{\gamma;\bar{x}^\delta} - u^{\alpha}_{\delta;\bar{x}^\gamma}.$$

Разностные аппроксимации ковариантных производных $v^{\alpha}_{;\gamma}$ и $v^{\alpha}_{;\delta}$ выглядят следующим образом,

$$v^{\alpha}_{;x^\gamma} = \frac{v^{\alpha(j_\gamma+1)} - v^{\alpha(j_\gamma)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma),$$
$$v^{\alpha}_{;\bar{x}^\gamma} = \frac{v^{\alpha(j_\gamma)} - v^{\alpha(j_\gamma-1)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma),$$

и

$$v^{\alpha}_{;x^\delta} = \frac{v^{\alpha(i_\delta+1)} - v^{\alpha(i_\delta)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta),$$
$$v^{\alpha}_{;\bar{x}^\delta} = \frac{v^{\alpha(i_\delta)} - v^{\alpha(i_\delta-1)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta).$$

Аналогом определения (6) разностной аппроксимации смешанной производной будет следующее определение для разностной аппроксимации смешанной ковариантной производной,

$$\text{(17)} \qquad v^{\alpha}_{;\gamma;\delta} \to \frac{1}{2}\big(v^{\alpha}_{;\bar{x}^\gamma;x^\delta} + v^{\alpha}_{;x^\gamma\bar{x}^\delta}\big), \quad v^{\alpha}_{;\delta;\gamma} \to \frac{1}{2}\big(v^{\alpha}_{;\bar{x}^\delta;x^\gamma} + v^{\alpha}_{;x^\delta\bar{x}^\gamma}\big),$$

где

$$\begin{aligned} v^{\alpha}_{;\bar{x}^\gamma;x^\delta} &= \Big[\frac{v^{\alpha(j_\gamma)} - v^{\alpha(j_\gamma-1)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big]_{x^\delta} \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(j_\gamma)} - v^{\rho(j_\gamma-1)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big)\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\delta}(i_\delta) \\ &- \Big(\frac{v^{\alpha(k_\rho)} - v^{\alpha(k_\rho-1)}}{h_{k_\rho}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\rho}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^-]^{\rho+}_{\gamma\delta}(i_\delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{\alpha}_{;x^\gamma;\bar{x}^\delta} &= \Big[\frac{v^{\alpha(j_\gamma+1)} - v^{\alpha(j_\gamma)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big]_{\bar{x}^\delta} \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(j_\gamma+1)} - v^{\rho(j_\gamma)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta) \\ &- \Big(\frac{v^{\alpha(k_\rho+1)} - v^{\alpha(k_\rho)}}{h_{k_\rho}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\rho}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^-]^{\rho-}_{\gamma\delta}(i_\delta), \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} v^{\alpha}_{;\bar{x}^\delta;x^\gamma} &= \Big[\frac{v^{\alpha(i_\delta)} - v^{\alpha(i_\delta-1)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big]_{x^\gamma} \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(i_\delta)} - v^{\rho(i_\delta-1)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma) \\ &- \Big(\frac{v^{\alpha(k_\rho)} - v^{\alpha(k_\rho-1)}}{h_{k_\rho}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\rho}(i_\delta)\Big)[\Gamma^-]^{\rho+}_{\delta\gamma}(j_\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{\alpha}_{;x^{\delta};\bar{x}^{\gamma}} &= \Big[\frac{v^{\alpha(i_\delta+1)}-v^{\alpha(i_\delta)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big]_{\bar{x}^{\gamma}} \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(i_\delta+1)}-v^{\rho(i_\delta)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma) \\ &- \Big(\frac{v^{\alpha(k_\rho+1)}-v^{\alpha(k_\rho)}}{h_{k_\rho}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\rho}(i_\delta)\Big)[\Gamma^-]^{\rho-}_{\delta\gamma}(j_\gamma). \end{aligned}$$

Обратимся к разностной аппроксимации разности

$$v^{\alpha}_{;\gamma;\delta} - v^{\alpha}_{;\delta;\gamma} \to \frac{1}{2}\Big(\big(v^{\alpha}_{;\bar{x}^{\gamma};x^{\delta}} - v^{\alpha}_{;\bar{x}^{\delta};x^{\gamma}}\big) + \big(v^{\alpha}_{;x^{\gamma};\bar{x}^{\delta}} - v^{\alpha}_{;x^{\delta};\bar{x}^{\gamma}}\big)\Big).$$

При взятии разности величины, отмеченные снизу фигурными скобками, сокращаются в силу свойств разностной аппроксимации (6) и симметричности смешанной производной,

$$\begin{aligned} 2\big(v^{\alpha}_{;\gamma;\delta} - v^{\alpha}_{;\delta;\gamma}\big) &= \underbrace{\Big[\frac{v^{\alpha(j_\gamma)}-v^{\alpha(j_\gamma-1)}}{h_{j_\gamma}}\Big]_{x^{\delta}}}_{1} - \underbrace{\Big[\frac{v^{\alpha(i_\delta)}-v^{\alpha(i_\delta-1)}}{h_{i_\delta}}\Big]_{x^{\gamma}}}_{2} \\ &+ \big[v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{x^{\delta}} - \big[v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{x^{\gamma}} \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(j_\gamma)}-v^{\rho(j_\gamma-1)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\delta}(i_\delta) \\ &- \Big(\frac{v^{\rho(i_\delta)}-v^{\rho(i_\delta-1)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma) \\ &+ \underbrace{\Big[\frac{v^{\alpha(j_\gamma+1)}-v^{\alpha(j_\gamma)}}{h_{j_\gamma}}\Big]_{\bar{x}^{\delta}}}_{2} - \underbrace{\Big[\frac{v^{\alpha(i_\delta+1)}-v^{\alpha(i_\delta)}}{h_{i_\delta}}\Big]_{\bar{x}^{\gamma}}}_{1} \\ &+ \big[v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^{\delta}} - \big[v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^{\gamma}} \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(j_\gamma+1)}-v^{\rho(j_\gamma)}}{h_{j_\gamma}} + v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta) \\ &+ \Big(\frac{v^{\rho(i_\delta+1)}-v^{\rho(i_\delta)}}{h_{i_\delta}} + v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma). \end{aligned}$$

Продолжая равенство, отметим одинаковые слагаемые фигурными скобками снизу,

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\big[v^{\tau}(j_\gamma)\big]_{x^{\delta}}[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)}_{4} + v^{\tau}(j_\gamma)\big[[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{x^{\delta}} + \underbrace{\big[v^{\tau}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^{\delta}}[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)}_{2} \\ &+ v^{\tau}(j_\gamma)\big[[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^{\delta}} - \underbrace{\big[v^{\tau}(i_\delta)\big]_{x^{\gamma}}[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta)}_{3} - v^{\tau}(i_\delta)\big[[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{x^{\gamma}} \\ &- \underbrace{\big[v^{\tau}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^{\gamma}}[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta)}_{1} - v^{\tau}(i_\delta)\big[[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^{\gamma}} + \underbrace{\big[v^{\rho}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^{\gamma}}[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\delta}(i_\delta)}_{1} \\ &- \underbrace{\big[v^{\rho}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^{\delta}}[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma)}_{2} + \underbrace{\big[v^{\rho}(j_\gamma)\big]_{x^{\gamma}}[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta)}_{3} - \underbrace{\big[v^{\rho}(i_\delta)\big]_{x^{\delta}}[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma)}_{4} \\ &+ v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(i_\delta) - v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma) \\ &+ v^{\tau}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta) - v^{\tau}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= v^\tau(j_\gamma)\Big(\big[[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{x^\delta} + \big[[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}\Big)\\
&- v^\tau(i_\delta)\Big(\big[[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{x^\gamma} + \big[[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\gamma}\Big)\\
&+ v^\tau(j_\gamma)\Big([\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\delta}(i_\delta) + [\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta)\Big)\\
&- v^\tau(i_\delta)\Big([\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma) + [\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma)\Big).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Равенство точно, только если мы используем вполне определенную разностную аппроксимацию для тензора кривизны. Именно, такую:

$$
\begin{aligned}
2[R^+]^{\alpha\pm}_{\tau\gamma\delta}(j_\gamma, i_\delta) &= \big[[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{x^\delta} + \big[[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}\\
&- \big[[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{x^\gamma} - \big[[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\tau\delta}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\gamma}\\
&+ [\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\delta}(i_\delta) + [\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\delta}(i_\delta)\\
&- [\Gamma^+]^{\rho-}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha+}_{\rho\gamma}(j_\gamma) - [\Gamma^+]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^+]^{\alpha-}_{\rho\gamma}(j_\gamma).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Обратимся к проверке равенства (13). Как и в предыдущем случае, введем следующие обозначения для ковариантных производных первого порядка,

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha\gamma} \equiv\quad & v_{\alpha;x^\gamma} = \big[v_\alpha(j_\gamma)\big]_{x^\gamma} - v_\tau(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma),\\
& v_{\alpha;\bar{x}^\gamma} = \big[v_\alpha(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\gamma} - v_\tau(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma),\\
u_{\alpha\delta} \equiv\quad & v_{\alpha;x^\delta} = \big[v_\alpha(i_\delta)\big]_{x^\delta} - v_\tau(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta),\\
& v_{\alpha;\bar{x}^\delta} = \big[v_\alpha(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\delta} - v_\tau(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta),
\end{aligned}
$$

и, далее, запишем выражения для аппроксимаций их вторых ковариантных производных,

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha\gamma;x^\delta} &= \big[u_{\alpha\gamma}(i_\delta)\big]_{x^\delta} - u_{\tau\gamma}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta) - u_{\alpha\tau}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\gamma\delta}(i_\delta),\\
u_{\alpha\gamma;\bar{x}^\delta} &= \big[u_{\alpha\gamma}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\delta} - u_{\tau\gamma}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta) - u_{\alpha\tau}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\gamma\delta}(i_\delta),\\
u_{\alpha\delta;x^\gamma} &= \big[u_{\alpha\delta}(j_\gamma)\big]_{x^\gamma} - u_{\tau\delta}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) - u_{\alpha\tau}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\delta\gamma}(j_\gamma),\\
u_{\alpha\delta;\bar{x}^\gamma} &= \big[u_{\alpha\delta}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\gamma} - u_{\tau\delta}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) - u_{\alpha\tau}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\delta\gamma}(j_\gamma).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Вычислим удвоенную разность,

$$
\begin{aligned}
2\big(v_{\alpha;\gamma;\delta} - v_{\alpha;\delta;\gamma}\big) &= \big(v_{\alpha;\bar{x}^\gamma;x^\delta} + v_{\alpha;x^\gamma;\bar{x}^\delta}\big) - \big(v_{\alpha;\bar{x}^\delta;x^\gamma} + v_{\alpha;x^\delta;\bar{x}^\gamma}\big)\\
&= \big[u_{\alpha\gamma}(i_\delta)\big]_{x^\delta} + \big[u_{\alpha\gamma}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\delta} - \big[u_{\alpha\delta}(j_\gamma)\big]_{x^\gamma} - \big[u_{\alpha\delta}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\gamma}\\
&- \Big(\big[v_\tau(j_\gamma)\big]_{\bar{x}_\gamma} - v_\rho(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta)\\
&- \Big(\big[v_\tau(i_\delta, j_\gamma)\big]_{x_\gamma} - v_\rho(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta)\\
&+ \Big(\big[v_\tau(i_\delta, j_\gamma)\big]_{\bar{x}_\delta} - v_\rho(i_\delta, j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho-}_{\tau\delta}(j_\gamma)\Big)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\\
&+ \Big(\big[v_\tau(i_\delta, j_\gamma)\big]_{\bar{x}_\delta} - v_\rho(i_\delta, j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)\Big)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma).
\end{aligned}
$$

Далее, продолжая преобразования, получим

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\big[v_\alpha(j_\gamma,i_\delta)\big]_{\bar{x}_\gamma} - v_\tau(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\Big]_{x^\delta} \\
&+ \Big[\big[v_\alpha(j_\gamma,i_\delta)\big]_{x_\gamma} - v_\tau(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\Big]_{\bar{x}^\delta} \\
&- \Big[\big[v_\alpha(i_\delta,j_\gamma)\big]_{\bar{x}_\delta} - v_\tau(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta)\Big]_{x^\gamma} \\
&- \Big[\big[v_\alpha(i_\delta,j_\gamma)\big]_{x_\delta} - v_\tau(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta)\Big]_{\bar{x}^\gamma} \\
&- \big[v_\tau(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\gamma}[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta) - \big[v_\tau(i_\delta,j_\gamma)\big]_{x^\gamma}[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta) \\
&+ \big[v_\tau(i_\delta,j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) + \big[v_\tau(i_\delta,j_\gamma)\big]_{x^\delta}[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) \\
&+ v_\rho(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta) + v_\rho(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta) \\
&- v_\rho(i_\delta,j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho-}_{\tau\delta}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) - v_\rho(i_\delta,j_\gamma)[\Gamma^-]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma),
\end{aligned}
$$

и окончательно,

$$
\begin{aligned}
2\big(v_{\alpha;\gamma;\delta} - v_{\alpha;\delta;\gamma}\big) &= -v_\tau(j_\gamma)\Big(\big[[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\big]_{x^\delta} + \big[[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}\Big) \\
&+ v_\tau(j_\gamma)\Big(\big[[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta)\big]_{x^\gamma} + \big[[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\gamma}\Big) \\
&- \big[v_\tau(j_\gamma)\big]_{x^\delta}[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) + \big[v_\tau(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) \\
&- \big[v_\tau(i_\delta)\big]_{x^\gamma}[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta) - \big[v_\tau(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\gamma}[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta) \\
&+ \big[v_\tau(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\gamma}[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta) + \big[v_\tau(i_\delta,j_\gamma)\big]_{x^\gamma}[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta) \\
&- \big[v_\tau(i_\delta,j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) - \big[v_\tau(i_\delta,j_\gamma)\big]_{x^\delta}[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) \\
&+ v_\rho\Big([\Gamma^-]^{\rho-}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta) + [\Gamma^-]^{\rho+}_{\tau\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta) \\
&- [\Gamma^-]^{\rho-}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma) - [\Gamma^-]^{\rho+}_{\tau\delta}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\Big).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Вывод аналогичен предыдущему. Равенство выполняется точно, если мы будем использовать следующую разностную аппроксимацию тензора кривизны,

$$
\begin{aligned}
[R^-]^{\tau\pm}_{\alpha\gamma\delta}(j_\gamma,i_\delta) &= \frac{1}{2}\Big(\big[[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\big]_{x^\delta} + \big[[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)\big]_{\bar{x}^\delta}\Big) \\
&- \frac{1}{2}\Big(\big[[\Gamma^-]^{\tau-}_{\alpha\delta}(i_\delta)\big]_{x^\gamma} + \big[[\Gamma^-]^{\tau+}_{\alpha\delta}(i_\delta)\big]_{\bar{x}^\gamma}\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\Big([\Gamma^-]^{\rho-}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\rho\delta}(i_\delta) + [\Gamma^-]^{\rho+}_{\alpha\gamma}(j_\gamma)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\rho\delta}(i_\delta)\Big) \\
&- \frac{1}{2}\Big([\Gamma^-]^{\rho+}_{\alpha\delta}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau-}_{\rho\gamma}(j_\gamma) + [\Gamma^-]^{\rho-}_{\alpha\delta}(i_\delta)[\Gamma^-]^{\tau+}_{\rho\gamma}(j_\gamma)\Big).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Таким образом, нами получена следующая

Теорема 1. *Использование разностных аппроксимаций* (17), (20) *вторых ковариантных производных приводят к точному выполнению коммутационных соотношений* (18), (21), *если использовать в них, соответственно, разностные аппроксимации* (19), (22) *тензора кривизны.*

Следствие 1. *Тождество Бианки первого рода*

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = 0$$

выполняется точно для разностных аппроксимаций (22) *тензора кривизны.*

Сформулированное следствие справедливо в силу свойств (22) разностной аппроксимации тензора кривизны.

В заключение сделаем несколько замечаний. Цель работы состояла в построении разностных аппроксимаций дифференциальных операторов, действующих на заданные в римановой области тензорные поля и таких, что в максимальной степени сохраняли бы геометрические свойства, установленные в непрерывном случае. Большинство рассматриваемых в работе геометрических объектов представляют собой комбинации первых или вторых производных метрического тензора и символов Кристоффеля. Предложенные аппроксимации последних точно сохраняют свойство компонент метрического тензора обращаться в нуль и при разностном ковариантном дифференцировании. Построение разностных аппроксимаций вторых ковариантных производных оказалось технически более сложной задачей, даже при дифференцировании векторного поля. Тем не менее определенным образом выбранные разностные аппроксимации вторых ковариантных производных и тензора кривизны дают точное выполнение формул Риччи и тождества Бианки первого рода. Было бы интересно проверить характер выполнения разностных аппроксимаций ряда других соотношений, таких как симметрия и косая симметрия компонент тензора кривизны, формулы Риччи более высокого порядка, тождества Бианки второго рода, и т.п. К настоящему времени развитие теории приближений на римановом многообразии представляется актуальным направлением в связи с усложнением математических моделей сплошных сред и широким распространением дистанционных методов. Вывод, в том числе, относится и к рефракционной тензорной томографии, и к геофизическим исследованиям.

References

[1] A.N. Konovalov, *Numerical methods for static problems of elasticity*, Sib. Math. Journal, **36**:3 (1995), 491–505. MR1404882

[2] M.M. Karchevsky, S.N. Voloshanskaia, *On approximation of the strain tensor in curvilinear coordinates. The difference scheme gor the problem on the equilibrum of elastic cylinder*, Izv. vuzov: Mathematics, **10** (1977), 70–80 (in Russian).

[3] V.N. Timashev, *An approximation of differential operators in curvilinear coordinates*, Prikladnuie problemui prochnosti i plastichnosti. Gorkyi, **6** (1977), 47–54 (in Russian).

[4] N.V. Tsurikov, *On approximtion of covariant derivatives of vectors and tensors in arbitrary curvilinear coordinate system*, Variatsionnuie metodui v zadachakh chislennogo analiza. Novosibirsk, VC SO AN SSSR, (1986), 150–156 (in Russian). Zbl 0701.41027

[5] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, Utrecht: VSP, 1994. MR1374572

[6] N.E. Kochin, *Vector Calculus and Fundamentals of Tensor Calculus*, Leningrad–Moskow, Gos. Tech.-Teor. Izd., 1934 (in Russian).

[7] H. Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory*, Duke Math. J., **7** (1940), 411–444. MR0003331

[8] E.Yu. Derevtsov, V.V. Pikalov, *Reconstruction of vector fields and their singularities from ray transforms*, Numerical Analysis and Applications, **4**:1 (2011), 21–35. Zbl 1299.65294

[9] E.Yu. Derevtsov, *Some problems of non-scalar tomography*, Siberian Electronic Mathematical Reports, Proceedings of the First International Cientific Conference

and Young Scientists School "Theory and Computational Methods for Inverse and Ill-posed Problems", Part I, **7** (2010), 81–111 (in Russian).

[10] E.Yu. Derevtsov, *Tomography of complecated media: models, methods, algorithms. Part II. Models of vector and tensor tomography*, Gorno-Altaisk, GASU, 2010 (in Russian).

[11] M.A. Bezuglova, E.Yu. Derevtsov, S.B. Sorokin, *The reconstruction of a vector field by finite difference methods* J. Inverse Ill-posed Problems, **10**:2 (2002), 125–154. MR1899103

[12] E.Yu. Derevtsov, *An approach to direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems* J. Inverse Ill-Posed Problems, **13**:3–6 (2005), 213–246. MR2188609

[13] A.A. Samarsky, V.B. Andreev, *Difference methods for elliptic equations*, M.: Nauka, 1976 (in Russian).

[14] K. Jano, S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1953.

[15] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry. Methods and Applications*, Springer-Verlag, GTM 93, Part 1, 1984; GTM 104, Part 2, 1985. MR0736837, MR0807945

Evgeny Yurievich Derevtsov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk state university,
Pirogova st., 2
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dert@math.nsc.ru