S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 991–997 (2015) УДК 514.142.2+514.174.6
DOI 10.17377/semi.2015.12.085 MSC 52B55+68U05

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТРИАНГУЛЯЦИИ, ОСНОВАННОЙ НА УСЛОВИИ ПУСТОГО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

В.А. КЛЯЧИН

Abstract. We suggest to consider the empty condition for the special family of convex sets. For the given finite set $P \subset \mathbb{R}^n$ we shall say that empty condition for convex set $B \subset \mathbb{R}^n$ is fulfilled if $P \cap B = P \cap \partial B$. This condition is a generalization of the classic Delaunay empty sphere condition. We prove some extremal properties for the corresponding triangulations.

Keywords: triangulation, Delaunay triangulation, convex set, convex hull, empty sphere condition.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство в котором введен ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Через $\langle\ ,\ \rangle$ мы обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — соответствующие выбранному базису декартовы координаты.

Пусть $\{P_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, — некоторый набор P точек $P_i \in \mathbb{R}^n$ таких, что любой симплекс в вершинах из $\{P_i\}$ является невырожденным. Триангуляцией T заданного набора точек называется такой набор n-мерных симплексов $S_1, \ldots, S_m$, что

1) каждая точка P_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$,

---

Klyachin, V.A., Extremal properties for triangulation based on empty convex set condition.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-41-02517).

Поступила 30 октября 2015 г., опубликована 17 декабря 2015 г.

2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек P_i, $i = 1, \dots, N$,

3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста,

4) объединение всех симплексов из T совпадает с выпуклой оболочкой точек P_i.

Один из первых алгоритмов триангуляции с использованием условия пустого шара был предложен Б. Н. Делоне в [1], [2] (см. также в [3]). Это условие означает, что описанная сфера каждого симплекса триангуляции не содержит внутри себя точек заданного конечного множества. Триангуляции, для которых выполняется это условие получили название триангуляции Делоне. В работах [5]–[6] показана важная роль условия Делоне в задаче приближения первых производных при кусочно-линейной аппроксимации гладких функций. Однако использование триангуляции Делоне в многомерном случае сопряжено с рядом принципиальных трудностей, описанных в работе [7].

Несложно показать, что если никакие $n+1$ точек из P не лежат на одной гиперплоскости и никакие $n+2$ точек не лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере, то триангуляция Делоне существует и единственна. С другой стороны, для конечного такого множества точек число различных триангуляций этого множества, по крайней мере при $n = 2$, имеет асимптотику $O(c^N)$ при $N \to \infty$ (см., например, [8], и цитируемую там литературу). Эти факты позволяют поставить задачу о выделении в классе всех триангуляций заданного конечного множества некоторого естественного подкласса, который бы включал в себя классическую триангуляцию Делоне в качестве частного случая. В работах автора [11]–[13] предложен алгоритм построения триангуляции, основанный на применении условия пустого выпуклого множества. В настоящей статье мы покажем, что этот класс триангуляций, как и классическая триангуляция Делоне, обладает некоторыми экстремальными свойствами. Например, хорошо известно (см. [14], [15]), что триангуляция Делоне имеет минимальным значением суммы радиусов описанных окружностей своих треугольников среди всех триангуляций фиксированного конечного множества. Мы доказываем похожее свойство для случая более широкого класса триангуляций. Отметим также, что в работе [16] были получены некоторые другие экстремальные свойства классической триангуляции Делоне. В работах [18], [19] для бесконечных триангуляций Делоне доказаны экстремальные свойства плотности непрерывных функционалов.

2. Основной результат

Для конечного множества $P \subset \mathbb{R}^n$ введем обозначение $T(P)$ для множества всех триангуляций P. Предположим, что на множестве всех симплексов определена некоторая неотрицательная непрерывная функция $f(S)$. Тогда всякой триангуляции $T \in T(P)$ можно сопоставить число

$$F(T) = \sum_{S \in T} f(S). \tag{1}$$

В настоящей работе мы покажем, что для некоторой функции $f(S)$ введенный класс триангуляций минимизирует указанный функционал. Перейдем к формулировкам.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство Φ выпуклых компактных множеств с не пустой внутренностью. Пусть S — произвольный невырожденный симплекс. Определим *охватывающее* множество $B \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а, значит содержит весь симплекс в силу выпуклости). В общем случае таких охватывающих множеств из данного семейства Φ может быть несколько.

Определение 1.*Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что эта триангуляция является Φ-триангуляцией, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B не содержит вершин других симплексов.*

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне. В работе [13] было доказано существование Φ-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе Φ существует и при том только одно охватывающее множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств является выполненным. В таком случае охватывающее множество будем обозначать через $B(S)$.

Пример 1. Рассмотрим гладкую, строго выпуклую вниз функцию $x_{n+1} = \Psi(x)$, определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$\frac{\Psi(x)}{|x|} \to +\infty \text{ при } x \to \infty. \tag{2}$$

При выполнении этого условия пересечение графика функции $\Psi(x)$ с произвольной не вертикальной плоскостью Π представляет собой выпуклую компактную $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим для любых $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$\Phi(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) \leq \Psi(x) + \langle \nabla\Psi(x), y - x\rangle + r\}.$$

В силу свойства (2) и выпуклости $\Psi(x)$ множества $\Phi(x, r)$ образуют семейство выпуклых компактных множеств. Покажем, что для всякого невырожденного симплекса S можно построить единственное охватывающее множество из этого семейства. Пусть также точки $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ образуют произвольный невырожденный симплекс S. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ построим набор точек $Q_i = (p_i, \Psi(p_i)), i = 0, \ldots, n$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ гиперплоскость Π, проходящую через эти точки. Очевидно, что проекция пересечения этой плоскости с графиком функции $\Psi(x)$ представляет собой границу некоторого множества $\Phi(x, r)$. При этом точка x это единственная точка в которой касательная к графику функции $\Psi(x)$ параллельна плоскости Π. Единственность и существования такой точки следует из выпуклости и гладкости функции $\Psi(x)$. Триангуляции, соответствующие такого рода семействам выпуклых множеств называются регулярными триангуляциями [9], [10]. Совпадает ли класс всех Φ-триангуляций с классом регулярных триангуляций автору не известно.

В [13] доказана следующая

Теорема 1. *Если семейство выпуклых множеств Φ обладает вышеприведенным свойством, то охватывающие множества симплексов обладают следующими свойствами:*

1. *множество $B(S)$ однозначно определяется любым симплексом с вершинами на его границе,*
2. *если для двух невырожденных симплексов S_1, S_2 выполнено $B(S_1) \neq B(S_2)$ и пересечение $B(S_1) \cap B(S_2)$ не пусто, то пересечение границ множеств $B(S_1), B(S_2)$ представляет собой $(n-2)$-мерную выпуклую поверхность, лежащую в некоторой гиперплоскости,*
3. *если два симплекса S_1 и S_2 не пересекаются по внутренним точкам, имеют общую $(n-1)$-мерную грань G и A, B вершины симплексов, не принадлежащие грани G, причем $B(S_1)$ не содержит внутри себя вершину B симплекса S_2 , то $B(S_2)$ не содержит внутри себя вершины A симплекса S_1.*

В настоящей статье доказывается

Теорема 2. *Φ-триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ имеет минимум значения функционала*

$$F(T) = \sum_{S \in T} |B(S)|,$$

где символом $|\cdot|$ обозначается мера Лебега.

Непосредственно из теоремы получаем

Следствие 1. *Триангуляция Делоне конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ имеет минимальное значение величины*

$$F(T) = \sum_{S \in T} R^2(S),$$

где $R(S)$ — радиус описанной окружности треугольника $S \in T$.

Отметим, что в работах [16], [20] аналогичные утверждения были доказаны для классического случая триангуляции Делоне.

3. Доказательство теоремы

В [17] было показано, что в двумерном случае для доказательства свойства экстремальности для функционалов типа (1) достаточно показать следующее локальное свойство функции f. Пусть заданы точки $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$. Введем обозначения симплексов $S_1 = S(p_0, p_1, p_2)$, $S_2 = S(p_1, p_2, p_3)$ и $S_1^* = S(p_0, p_1, p_3), S_2^* = S(p_0, p_2, p_3)$. Если предположить, что симплексы S_1, S_2 принадлежат Φ-триангуляции, то для экстремального свойства достаточно показать, что

$$f(S_1) + f(S_2) \leq f(S_1^*) + f(S_2^*).$$

В нашем случае необходимое неравенство выглядит так

$$|B(S_1)| + |B(S_2)| \leq |B(S_1^*)| + |B(S_2^*)|.$$

В силу выполнения равенства

$$|B(S_1) \cup B(S_2)| = |B(S_1)| + |B(S_2)| - |B(S_1) \cap B(S_2)|,$$

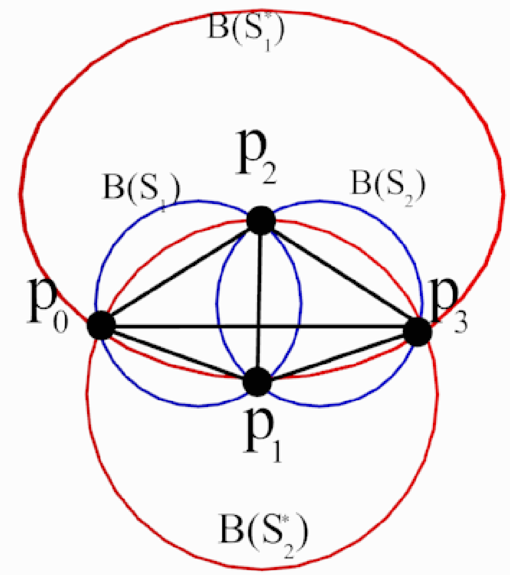
требуемое неравенство будет следовать из истинности вложений

$$B(S_1) \cup B(S_2) \subset B(S_1^*) \cup B(S_2^*),$$

и

$$B(S_1) \cap B(S_2) \subset B(S_1^*) \cap B(S_2^*).$$

Рис. 1. К доказательству теоремы 2.



Охватывающее множество $B(S_i)$ симплекса S_i можно представить в виде объединения

$$B(S_i) = S_i \cup \Sigma_1^i \cup \Sigma_2^i \cup \Sigma_3^i, \quad i = 1, 2,$$

не пересекающихся по внутренним точкам частей, одна из которых сам симплекс, а три другие имеют в качестве общей границы сторону треугольника S. Под номером 3 будем обозначать ту часть, которая граничит с общей стороной симплексов S_1 и S_2 (S_1^* и S_2^* соответственно). Поскольку симплексы S_1, S_2 принадлежат Ф-триангуляции, то точка p_3 лежит вне $B(S_1)$, точка p_0 — вне $B(S_2)$, $p_1 \in B(S_1^*)$, $p_2 \in B(S_2^*)$. Также отметим, что в силу п. 1 теоремы 1 границы охватывающих множеств симплексов S_1 и S_2 пересекаются только в двух точках p_1, p_2. В силу сделанных предположений, имеем

$$S_1 \cup \Sigma_1^1 \cup \Sigma_3^1 \subset B(S_2^*), \tag{3}$$

$$\Sigma_3^1 \subset S_1 \cup \Sigma_3^1 \cup \Sigma_2^1 \subset B(S_1^*), \tag{4}$$

следовательно

$$B(S_1) \subset B(S_1^*) \cup B(S_2^*).$$

Аналогично доказывается второе вложение

$$B(S_2) \subset B(S_1^*) \cup B(S_2^*).$$

Заметим, что в силу присутствия в левых частях вложений (3), (4) множества Σ_3^1, можно сделать заключение, что $\Sigma_3^1 \subset B(S_1^*) \cap B(S_2^*)$. Аналогично получается вложение $\Sigma_3^2 \subset B(S_1^*) \cap B(S_2^*)$. Поэтому

$$B(S_1) \cap B(S_2) = \Sigma_3^1 \cup \Sigma_3^2 \subset B(S_1^*) \cap B(S_2^*).$$

Таким образом, требуемые вложения верны, что и доказывает теорему 2.

References

[1] B.N. Delaunay, *Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi*, Известия АН СССР, **6** (1934), 793–800. Zbl 0010.41101

[2] Б.Н. Делоне, *О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного*, В сб. Записки семинара “Сверхмедленные процессы”, **1** (2006), 147–153.

[3] Делоне Б.Н., *Геометрия положительных квадратичных форм*, Успехи математических наук, **3** (1937), 16—62.

[4] Ф. Препарата, М. Шеймос, *Вычислительная геометрия: Введение.*, М.: Наука, 1989, 478 с. MR1004870

[5] В.А. Клячин, А.А. Широкий, *Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства*, Изв. вузов. Матем., **1** (2012), 31—39. MR2975915

[6] В.А. Клячин В.А., Е.А. Пабат, *C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках*, Сиб. журн. индустр. матем., **13**:2 (2010), 69—78. MR2839600

[7] В.А. Клячин, *О многомерном аналоге примера Шварца*, Изв. РАН. Сер. матем., **76**:4 (2012), 41—48. MR3013270

[8] В.А. Клячин, В.В. Попов, *Метод цепей для организации хранения многомерных триангуляций*, Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика., **19**:2 (2013), 71–79.

[9] И.М. Гельфанд, А.В. Зелевинский, М.М. Капранов, *Уравнения гипергеометрического типа и торические многообразия*, Функцион. анализ и его прил., **23**:2 (1989), 12–26. MR1011353

[10] И.М. Гельфанд, А.В. Зелевинский, М.М. Капранов, *Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона*, Алгебра и анализ, **2**:3 (1990), 1—62. MR1073208

[11] В.А. Клячин, *Об одном обобщении условия Делоне*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., **1** (2008), 48–50.

[12] В.А. Клячин, *Триангуляции на основе условия пустого выпуклого множества*, Тезисы Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске — 2015». Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. 26 — 29 августа 2015. Новосибирск. (2015) 30–31.

[13] В.А. Клячин, *Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества*, Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика., **28**:3 (2015), 27 – 33. DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.3.3.

[14] В.М. Ильман, *Экстремальные свойства триангуляции Делоне*, Алгоритмы и программы, **88**:10 (1985), 57–66.

[15] R. Sibson, *Locally equiangular triangulations* , Computer Journal, **21**:3 (1978), 243—245. MR0507358

[16] А.В. Акопян, *Экстремальные свойства триангуляции Делоне*, Труды ИСА РАН, **46** (2009), 174–187.

[17] H. Edelsbrunner, *Geometry and topology for mesh generation*, Cambridge University Press, 2001, 177 pp. MR1833977

[18] Н.П. Долбилин, О.Р. Мусин, Г. Эдельсбруннер, *Об оптимальности функционалов на триангуляциях множеств Делоне*, Успехи математических наук, **67**:4(406) (2012), 189-–190. MR3013849

[19] N.P. Dolbilin, H. Edelsbrunner, A. Glazyrin,O.R. Musin, *Functionals on triangulations of Delaunay sets*, Mosc. Math. J., **14**:3 (2014), 491—504. MR3241757

[20] O.R. Musin, *Properties of the Delaunay triangulation,* Proceedings of the 1997 13th Annual Symposium on Computational Geometry. sponsors: ACM; editors: Anon. Nice, Fr, (1997), 424–426.

Klyachin Vladimir Aleksandrovich
Volgograd State University,
Universitetskiy pr., 100,
Volgograd, 400062, Russia
E-mail address: klchnv@mail.ru