S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 998–1005 (2015) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2015.12.086 MSC 05C25

ОБ АФФИННЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ НАКРЫТИЯХ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

Л.Ю. ЦИОВКИНА

Abstract. Previously, a description of feasible intersection arrays and some group-theoretic constraints for the automorphism groups of arc-transitive antipodal distance-regular covers of K_n have been obtained in affine case. In this paper, we complete the classification of arc-transitive antipodal distance-regular covers of K_n in affine case for odd n.

Keywords: arc-transitive graph, distance-regular graph, antipodal cover.

1. Введение

В [3] классифицированы антиподальные дистанционно-транзитивные графы диаметра 3. Описание более широкого класса графов, а именно, реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, приводится в [4] для случая, когда полная группа автоморфизмов графа индуцирует аффинную 2-транзитивную группу на множестве его антиподальных классов (реберно симметричные антиподальные накрытия полных графов с таким свойством для краткости будем называть *аффинными*). В частности, в [4] определены допустимые массивы пересечений для гипотетических графов из класса аффинных дистанционно регулярных накрытий, а также получены некоторые ограничения для их групп автоморфизмов. В заключении основной теоремы из [4] был оставлен открытым вопрос существования ряда выделенных гипотетических графов. В настоящей работе мы решим этот вопрос для случая, когда число антиподальных классов графа нечетно.

Tsiovkina, L.Yu., On affine distance-regular covers of complete graphs.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 14-01-31298).

Поступила 27 ноября 2015 г., опубликована 20 декабря 2015 г.

2. Обозначения и терминология

В данной работе мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Приведем некоторые обозначения и определения, используемые в статье (остальные, в основном, стандартны и следуют [1, 2]). Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим *i-окрестность вершины* a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Если граф Γ фиксирован, то также будем использовать обозначение $[a] = \Gamma_1(a)$. Через $V(\Gamma)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ мы будем обозначать множество вершин графа Γ и его полную группу автоморфизмов, соответственно. Если вершины x, y находятся на расстоянии i в графе Γ, то через $b_i(x, y)$ (через $c_i(x, y)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(x)$ ($\Gamma_{i-1}(x)$) с $[y]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если для любого $i \in \{0, .., d\}$ значения $b_i = b_i(x, y)$ и $c_i = c_i(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y на расстоянии i в Γ (полагается, что $b_d = c_0 = 0$). Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, .., d\}$ его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар вершин, находящихся на расстоянии i в Γ. Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар смежных вершин. Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на $V(\Gamma)$ «совпадать или находиться на расстоянии d» является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются *антиподальными классами*. Хорошо известно, что антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 имеет массив пересечений $\{n-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, n-1\}$ и является антиподальным r-накрытием полного графа на n вершинах. Дополнительную информацию о таких графах см. в [1, 5].

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть Γ — реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3, K — ядро действия, индуцированного группой $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на множестве антиподальных классов графа Γ, и цоколь группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)/K$ — элементарная абелева группа нечетного порядка. Тогда граф Γ изоморфен дистанционно регулярному накрытию, получаемому с помощью конструкции Таса —Соммы или конструкции Хензеля.*

Доказательство. Всюду далее будем полагать, что Γ — это реберно симметричное дистанционно регулярное r-накрытие полного графа на p^e вершинах, где p^e — степень простого числа p и $2 < r < p^e - 1$, G — транзитивная на дугах группа автоморфизмов графа Γ, Σ — множество антиподальных классов графа Γ, K — ядро действия G на Σ и цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/K$ — элементарная абелева группа порядка p^e. Также будем считать, что $F \in \Sigma$, C — ядро действия $G_{\{F\}}$ на F, $a \in F$, $H = G_a$ и T — это полный прообраз группы $\bar{T}$ в G. Через $\Gamma(G, H, HgH)$ будем обозначать граф на множестве правых смежных классов группы G по подгруппе H, в котором вершины Hx, Hy смежны тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in HgH$, где g — это 2-элемент из $G - H$ такой, что $g^2 \in H$.

Из [4, теорема] следует, что либо $K = 1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, либо $|K| = r$. Пусть далее $p > 2$.

Лемма 1. *Пусть группа K действует регулярно на F и g — это 2-элемент из G, переставляющий две смежные вершины a, a^g. Если стабилизатор дуги в G имеет нечетный порядок, то g — это инволюция и, в частности, если G индуцирует точно 2-транзитивную группу на Σ, то каждый элемент из $G - G_{\{F\}}$ единственным образом представим в виде kh_1gh_2, где $k \in K$ и $h_1, h_2 \in H$.*

Доказательство. Пусть K действует регулярно на F. Тогда $G_{\{F\}} = KH$, T действует регулярно на $V(\Gamma)$ и $G = TH$.

Ввиду 2-транзитивности G на Σ получим, что $G = G_{\{F\}} \cup G_{\{F\}}gG_{\{F\}} = KH \cup KHgH$ для некоторого элемента $g \in G - G_{\{F\}}$. Можно считать, что g — это 2-элемент, переставляющий две смежные вершины a и a^g. Тогда $g^2 \in H$.

Так как p — нечетно, то элемент g фиксирует некоторую вершину $b \in E$, где $E \in \Sigma - \{F\}$. Имеем $G_b = t^{-1}Ht$ для некоторого элемента $t \in T - K$ и $g = t^{-1}ht$ для некоторого элемента $h \in H - C_G(t)$. Поэтому $g^2 = t^{-1}h^2t \in H \cap H^t$. Но по условию стабилизатор дуги в G имеет нечетный порядок, поэтому $g^2 = h^2 = 1$.

Далее, пусть $g_1 \in G - G_{\{F\}}$ и G индуцирует точно 2-транзитивную группу на Σ. Предположим, что $g_1 = kh_1gh_2 = k'h'_1gh'_2$ для некоторых элементов $k, k' \in K$ и $h_i, h'_i \in H$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда $(k'h'_1)^{-1}kh_1 = gh'_2h_2^{-1}g^{-1} \in H^g = H^{(t^{-1})^h t}$. Так как $(t^{-1})^h t \notin K$, то элемент $(k'h'_1)^{-1}kh_1$ фиксирует вершину $a^g \notin F$. Но тогда $h_1'^{-1}k'^{-1}kh_1 = (k'^{-1}k)^{h'_1}h_1'^{-1}h_1 \in K$, $k = k'$ и $h_i = h'_i$, $i \in \{1, 2\}$. Лемма 1 доказана. □

Ввиду [4, теорема], достаточно рассмотреть совокупность случаев, приведенных в леммах 2–5.

Лемма 2. *Пусть T — экстраспециальная группа порядка p^3, Γ имеет массив пересечений $\{p^2 - 1, p(p - 1), 1; 1, p, p^2 - 1\}$ и H — циклическая группа порядка $p^2 - 1$, или $p \in \{5, 7\}$ и $SL_2(3) \trianglelefteq H$, или $p = 11$ и $SL_2(5) \trianglelefteq H$. Тогда Γ — дистанционно-транзитивный граф.*

Доказательство. Заметим, что T — группа экспоненты p. Пусть $T = \langle x_1, x_2 \rangle$, $k = [x_1, x_2]$ и $R = \{x_1^{i_1}x_2^{i_2} | i_1, i_2 \in \{1, \ldots, p\}\}$. Пусть $K = Z(G)$. Отождествим K с полем порядка p и рассмотрим $\bar{T} = T/K$ как векторное пространство над K. Отображение f из $\bar{T} \times \bar{T}$ в K, определенное по правилу $f(\bar{x}, \bar{y}) = [x, y]$, где $\bar{x} = xK$ и $\bar{y} = yK$, задает невырожденную знакопеременную форму на $\bar{T}$. Таким образом, группа $H \simeq G_{\{F\}}/K$ изоморфно вкладывается в $Sp_2(p)$.

Покажем, что граф Γ изоморфен дистанционно регулярному накрытию с массивом пересечений $\{p^2 - 1, p(p - 1), 1; 1, p, p^2 - 1\}$, получаемому с помощью конструкции Таса-Соммы (см., например, [1, с. 385]). Для удобства мы будем использовать эквивалентную конструкцию, приведенную в предложении 12.5.1 из [1]. Пусть Γ_T — граф, множеством вершин которого являются элементы множества $K \times \bar{T}$, в котором две вершины $(k^m, \bar{r}_i)$ и $(k^n, \bar{r}_j)$, где $r_i, r_j \in R$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, смежны тогда и только тогда, когда $[r_i, r_j] = k^{m-n}$ и $r_i \neq r_j$.

Отображение ϕ из T в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу

$$\phi(k^l r_s)((k^m, \bar{r}_i)) = (k^{-2l}k^{m+s_2i_1-s_1i_2-s_1s_2}, \bar{r}_i\bar{r}_s),$$

где через r_z обозначается элемент $x_1^{z_1}x_2^{z_2}$ для $z_1, z_2 \in \{1, \ldots, p\}$ и символ z заменяет i или s, для всех $l \in \{1, \ldots, p\}$ и $r_s \in R$, задает регулярную группу $\phi(T)$ автоморфизмов графа Γ_T. Действительно, пусть $r_i, r_j \in R$, $r_i \neq r_j$ и

$m, n \in \mathbb{Z}$. Вершины $(k^m, \bar{r}_i)$ и $(k^n, \bar{r}_j)$ смежны тогда и только тогда, когда

$$[r_i, r_j] = [x_1^{i_1} x_2^{i_2}, x_1^{j_1} x_2^{j_2}] = [x_1, x_2]^{i_1 j_2 - i_2 j_1} = [x_1, x_2]^{m-n}$$

тогда и только тогда, когда

$$[r_i r_s, r_j r_s] = [x_1, x_2]^{(i_1+s_1)(j_2+s_2)-(i_2+s_2)(j_1+s_1)} = [x_1, x_2]^{(m+s_2 i_1 - s_1 i_2)-(n+s_2 j_1 - s_1 j_2)}$$

тогда и только тогда, когда смежны вершины $\phi(r_s)((k^m, \bar{r}_i))$ и $\phi(r_s)((k^n, \bar{r}_j))$. Непосредственно проверяется, что ϕ — мономорфизм и $\phi(T)$ действует регулярно на $V(\Gamma_T)$. Таким образом, граф Γ_T допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов TH, которая вкладывается в полупрямое произведение групп T и $Sp_2(p)$. Нетрудно видеть, что для каждой вершины c графа Γ_T центральная инволюция подгруппы из $(\mathrm{Aut}(\Gamma_T))_c$, изоморфной $Sp_2(p)$, инвертирует $(p^2-1)/2$ ребер из окрестности вершины c. Теперь по лемме 1 получим, что $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH) \simeq \Gamma_T$. Заметим, что ввиду [3, теорема] Γ_T — дистанционно-транзитивный граф.

Далее, предположим, что группа $G_{\{F\}}/C$ неразрешима. Тогда $G_{\{F\}}/C$ действует 2-транзитивно на F, поэтому $H/C = GL_1(p)$. Если $p = 11$, то можно считать, что $H = SL_2(5)$, противоречие с тем, что $SL_2(5)$ не содержит нормальных подгрупп индекса 10. Значит, группа $G_{\{F\}}/C$ разрешима и либо $SL_2(3) \trianglelefteq H$, либо H — циклическая группа порядка p^2-1. Пусть $SL_2(3) \trianglelefteq H$. Если $p = 5$, то можно считать, что $H = SL_2(3)$. Но элемент порядка 3 из H централизует K, поэтому C — неединичная нормальная подгруппа в $SL_2(3)$ индекса, делящего 8, противоречие. Если $p = 7$, то можно считать, что $|H : SL_2(3)| = 2$. Имеем $K \cdot SL_2(3)/(C \cap SL_2(3)) \in \{Z_7, Z_7 : Z_2, Z_7 : Z_3, Z_7 : Z_6, L_3(2)\}$. Так как $SL_2(3) \not\leq L_3(2)$ и $|C \cap SL_2(3)| \in \{2, 8, 24\}$, то либо $SL_2(3) \leq C$, либо $|C \cap SL_2(3)| = 8$. Далее, C централизует K и TC действует точно и транзитивно на вершинах графа Γ_T. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что в случае $SL_2(3) \leq C$ дистанционно регулярных графов с требуемым массивом пересечений, неизоморфных графу Γ_T, не имеется. Но тогда $|C| = 8$ и H/C — диэдральная группа порядка 6, транзитивная на $K - \{1\}$, противоречие. Значит, H — циклическая группа порядка p^2-1, поэтому длина каждой H-орбиты на $K - \{1\}$ равна $|H : C|$ и делит $p-1$. Отсюда C содержит элемент порядка $p+1$ и, в частности, единственную инволюцию из H.

Пусть g — это инволюция, переставляющая две смежные вершины a и a^g графа Γ. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ (см., например, [3, лемма 2.7]). Так как g фиксирует ровно один антиподальный класс графа Γ, то $Hgyg = Hk^i gy$ для некоторых элементов $y \in H$ и k^i, $i \in \mathbb{Z}$. Тогда $gyg = h_0 k^i gy$ для некоторого элемента $h_0 \in H$ и $gy = h_0 k^i gyg = (h_0 k^i)^2 gy$. Ввиду леммы 1 получим, что $h_0^2 (k^i)^{h_0} k^i = 1$, h_0 — инволюция и либо $K\langle h_0 \rangle$ (а значит, и $K\langle g \rangle$) — диэдральная группа порядка $2p$, либо $Hgyg = Hgy$. Но по доказанному выше, инволюция из H централизует K, поэтому первый случай невозможен. Далее, инволюция h_0 инвертирует ребро $\{Hgh_0, Hg\}$, а значит, каждая $\langle h_0 \rangle$-орбита на окрестности вершины Hk^i, где $i \in \mathbb{Z}$, индуцирует ребро. Кроме того, g инвертирует ребро $\{H, Hg\}$ из окрестности вершины Hgy, и поэтому также каждая $\langle g \rangle$-орбита на окрестности вершины $Hgyk^i$ индуцирует ребро. Ясно, что TC содержит класс инволюций группы G. Таким образом, две вершины Hx, Hz смежны в Γ тогда и только тогда $Hx = Hzg_1$ для некоторой инволюции g_1 из TC и $z \notin Hx$. Теперь, так как группа TC действует точно и транзитивно на $V(\Gamma)$, и на $V(\Gamma_T)$, получим, что граф Γ изоморфен объединению графов $\Gamma(TC, C, Cg_1C)$, где $g_1 \in g^{TC} - \{h_0\}$, и $\Gamma \simeq \Gamma_T$. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $SL_2(13) \trianglelefteq H$, T *— экстраспециальная группа порядка* 3^7 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{728, 486, 1; 1, 243, 728\}$. *Тогда* Γ *— дистанционно-транзитивный граф.*

Доказательство. Так как $SL_2(13)$ действует транзитивно на $[a]$, то можно считать, что $H = SL_2(13)$. Пусть $K = Z(G)$. Тогда $H \simeq G_{\{F\}}/K$ изоморфно вкладывается в $Sp_6(3)$. Заметим, что группа $Sp_6(3)$ содержит три класса инволюций: одноэлементный класс и два класса, каждый из которых имеет порядок 7371. При этом, в группе $Sp_6(3)$ имеется ровно два класса сопряженных подгрупп, изоморфных $SL_2(13)$, при этом центр каждой такой подгруппы совпадает с $Z(Sp_6(3))$.

Заметим, что экспонента группы T равна p, поэтому T — центральное произведение трех своих экстраспециальных подгрупп порядка 27 с центром K. Пусть Γ_T — это дистанционно регулярное накрытие с массивом пересечений $\{p^e-1, p^{e-1}(p-1), 1; 1, p^{e-1}, p^e-1\}$, определенное как и в доказательстве предыдущей леммы. Пусть H централизует K. Тогда аналогичным образом получим, что Γ_T допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов TH, которая вкладывается в полупрямое произведение групп T и $Sp_6(3)$. Теперь ввиду того, что порядок стабилизатора дуги в G равен 3, по лемме 1 получим, что g — инволюция и $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH) \simeq \Gamma_T$.

Если же $Z(G) = 1$, то $G_{\{F\}}/C = S_3$ и H содержит подгруппу индекса 2, противоречие. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* T *— экстраспециальная группа порядка* 3^5, Γ *имеет массив пересечений* $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$ *и либо* $R = D_8 \circ Q_8 \triangleleft H$ *и* $H/R \leq S_5$, *либо* $SL_2(5) \trianglelefteq H$. *Тогда* Γ *— дистанционно-транзитивный граф.*

Доказательство. Пусть $SL_2(5) \trianglelefteq H$. Тогда $SL_2(5)$ имеет две орбиты на $[a]$ длины 40 и можно считать, что либо $|H : SL_2(5)| = 2$, либо H — расширение циклической группы порядка 8 с помощью A_5. Пусть H централизует K. Тогда во втором случае получим противоречие с тем, что H вкладывается в $Sp_4(3)$. Значит, $|H : SL_2(5)| = 2$ и стабилизатор дуги в G имеет порядок 3. Группа H содержит ровно одну (центральную) инволюцию. Кроме того, в группе $Sp_4(3)$ имеется ровно один класс сопряженных подгрупп, изоморфных H, при этом центр каждой такой подгруппы совпадает с $Z(Sp_4(3))$. В этом случае остается применить рассуждения из доказательства леммы 3.

Пусть некоторый 2-элемент из H инвертирует K. Тогда $G_{\{F\}}/C = S_3$ и $SL_2(5) \leq C$ централизует K. Поэтому TC действует точно и транзитивно на вершинах графа Γ_T. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что дистанционно регулярных графов с требуемым массивом пересечений, неизоморфных графу Γ_T и допускающих вершинно-транзитивную группу TC, не имеется.

Пусть теперь $R = D_8 \circ Q_8 \triangleleft H$ и $H/R \leq S_5$. Тогда R имеет орбиты длины 16 на $[a]$. Пусть $K = Z(G)$. Тогда $H \leq Sp_4(3)$, $H/R \in \{Z_5, Z_5 : Z_2, A_5\}$, TH действует транзитивно на дугах графа Γ_T и снова получим, что $\Gamma \simeq \Gamma_T$. Далее, предположим, что некоторый элемент из H инвертирует K. Тогда $G_{\{F\}}/C = S_3$ и H содержит подгруппу индекса 2, централизующую K. Если $H/R \in \{Z_5, A_5\}$, то H не содержит подгрупп индекса 2, противоречие. Если $H/R \in \{Z_5 : Z_2, Z_5 :$

$Z_4, S_5\}$, то H содержит ровно одну подгруппу индекса 2 (транзитивную на $[a]$), поэтому TC действует транзитивно на дугах графа Γ_T. Компьютерными вычислениями в GAP устанавливается, что с точностью до изоморфизма граф Γ_T — единственный дистанционно регулярный граф с требуемым массивом пересечений, допускающий группу автоморфизмов TC, транзитивную на дугах. Интересно, что если $K = Z(G)$ и $H/R = Z_5 : Z_2$, то группа TH действует транзитивно на вершинах дистанционно-транзитивного графа с массивом пересечений $\{81, 80, 54, 1; 1, 27, 80, 81\}$ и стабилизатор некоторой точки в этом представлении совпадает с единственной подгруппой индекса 2 из H. Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть T — специальная группа порядка rp^e, $e = 2dc$, $d \geq 1$, r делит p^c, $Sp_{2d}(p^c) \lhd H$ и Γ имеет массив пересечений*

$$\{p^e - 1, (r-1)p^e/r, 1; 1, p^e/r, p^e - 1\}.$$

Тогда Γ изоморфен дистанционно регулярному накрытию, получаемому с помощью конструкции Таса-Соммы или конструкции Хензеля.

Доказательство. Пусть T — специальная группа порядка rp^e и $Sp_{2d}(p^c) \leq N_{\mathrm{Aut}(T)}(T)$. Тогда $K = Z(T)$, $C = Sp_{2d}(p^c)$ централизует K и T — группа экспоненты p.

Пусть $r = p^a$. Тогда

$$T = \big\langle x_1, x_2, \ldots, x_e, z_1, z_2, \ldots, z_a | x_i^p = z_l^p = 1, \\ [x_i, z_l] = [z_m, z_l] = 1, \quad [x_i, x_j] = z_1^{\alpha_{ij_1}} z_2^{\alpha_{ij_2}} \cdot \ldots \cdot z_a^{\alpha_{ij_a}}, \\ i, j \in \{1, ..., e\}, \quad m, l \in \{1, ..., a\}\big\rangle$$

для некоторых чисел $\alpha_{ij_l} \in \{1, \ldots, p\}$.

Так как $\bar{T}$ и K — элементарные абелевы группы, то $\bar{T}$ и K можно отождествить с векторными пространствами размерностей e и a, соответственно, над полем из p элементов. Отображение f из $\bar{T} \times \bar{T}$ в K, определенное по правилу $f(\bar{x}, \bar{y}) = [x, y]$, где $\bar{x} = xK$ и $\bar{y} = yK$, является знакопеременным билинейным отображением пространства $\bar{T}$ в пространство K.

Положим $n = p^e$ и $\bar{T} = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Обозначим через $\mathbb{Z}[K]$ групповое кольцо группы K над $\mathbb{Z}$. Для $M \subseteq K$ через $\underline{M}$ будем обозначать элемент из $\mathbb{Z}[K]$, равный $\sum_{m \in M} 1 \cdot m$. Рассмотрим матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ над кольцом $\mathbb{Z}[K]$, которая определена по правилу $a_{i,j} = \underline{f(g_i, g_j)}$. Из равенства $f(\bar{y}, \bar{x}) = -f(\bar{x}, \bar{y})$ следует, что матрица A — самосопряженная (см. [5, подсекция 4.1]). Заметим к тому же, что для матрицы $A^2 = (\tilde{a}_{i,j})_{i,j=1}^n$ имеем $\tilde{a}_{i,j} = \sum_{l=1}^n 1 \cdot f(g_i g_j^{-1}, g_l)$. Применим конструкцию из [5, подсекция 4.2] и рассмотрим граф Γ_T со множеством вершин $V(\Gamma_T) = K \times \bar{T}$, вершины (k_α, g_i) и (k_β, g_j) которого смежны тогда и только тогда, когда $f(g_i, g_j) = k_\alpha k_\beta^{-1}$ и $g_i \neq g_j$. Поскольку $K = \langle f(g_i, g_j) | i, j \in \{1, \ldots, n\} \rangle$, получим, что $A - I$ — накрывающая матрица (см. [5, подсекция 4.2]), и следовательно, граф Γ_T — связное накрытие полного графа на n вершинах.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ зафиксируем элемент $w_i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_e^{i_e}$ из T такой, что $w_i K = g_i$, $i_s \in \{1, \ldots, p\}$. Будем также полагать $k_\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_a^{\alpha_a}$, $\alpha_s \in \{1, \ldots, p\}$. Отображение ϕ из T в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу

$$\phi(k_\sigma w_s)((k_\alpha, g_i)) = (k_\sigma^{-2} z_1^{\delta_1} \cdots z_a^{\delta_a}, g_i g_s),$$

где $\delta_m = \alpha_m + \sum_{t<l} \alpha_{tl_m}(i_t s_l - s_t i_l - s_t s_l)$, $m \in \{1,\dots,a\}$, задает регулярную группу $\phi(T)$ автоморфизмов графа Γ_T. Действительно, учитывая равенство $[v_i, v_j] = [v_i x_l^{-i_l}, v_j x_l^{-j_l}] \prod_{t=1}^{l-1} [x_t, x_l]^{i_t j_l - j_t i_l}$, где $v_i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_l^{i_l}$ и $v_j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_l^{j_l}$, $l \in \{2,\dots,e\}$, получим, что вершины (k_α, g_i) и (k_β, g_j) смежны тогда и только тогда, когда $g_i \neq g_j$ и

$$[w_i, w_j] = \prod_{t<l} [x_t, x_l]^{i_t j_l - j_t i_l}$$
$$= z_1^{\sum_{t<l} \alpha_{tl_1}(i_t j_l - j_t i_l)} \cdots z_a^{\sum_{t<l} \alpha_{tl_a}(i_t j_l - j_t i_l)} = z_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots z_a^{\alpha_a - \beta_a}$$

тогда и только тогда, когда $g_i \neq g_j$ и

$$[w_i w_s, w_j w_s] = \prod_{t<l} [x_t, x_l]^{(i_t + s_t)(j_l + s_l) - (j_t + s_t)(i_l + s_l)} = z_1^{\gamma_1} \cdots z_a^{\gamma_a},$$

где

$$\gamma_m = (\alpha_m + \sum_{t<l} \alpha_{tl_m}(i_t s_l - s_t i_l)) - (\beta_m + \sum_{t<l} \alpha_{tl_m}(j_t s_l - s_t j_l)), \quad m \in \{1,\dots,a\},$$

тогда и только тогда, когда смежны вершины $\phi(w_s)((k_\alpha, g_i))$ и $\phi(w_s)((k_\beta, g_j))$. Нетрудно проверить, что ϕ — мономорфизм и $\phi(T)$ — регулярная группа. Таким образом, группа G действует транзитивно на дугах графа Γ_T.

Предположим, что g_1 — 2-элемент из $G - G_{\{F\}}$, переставляющий две смежные вершины графа Γ. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Gamma = \Gamma(G, C, Cg_1C)$. Тогда $g_1 = hgk$ для некоторых элементов $k \in K$ и $h \in C$, где g — центральная инволюция стабилизатора некоторой вершины в G, отличной от вершины C. Но $g_1^2 = (hg)^2 k^2 \in C$, а элемент $h^g k^2$ из C фиксирует некоторый антиподальный класс, не содержащий вершины C, поэтому $k = 1$ и $\Gamma = \Gamma(G, C, CgC)$. Аналогично устанавливается, что $\Gamma_T \simeq \Gamma(G, C, CgC)$.

Ввиду [5, следствие 5.4] граф Γ_T (а значит, и граф Γ) дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{p^e - 1, p^{e-a}(p^a - 1), 1; 1, p^{e-a}, p^e - 1\}$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{a}_{i,j} = \begin{cases} p^{e-a}\underline{K}, & \text{если } i \neq j, \\ n\underline{e}, & \text{если } i = j \end{cases}.$$

Значит, для всех $i, j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j$, справедливо равенство

$$\sum_{l=1}^{n} 1 \cdot f(g_i g_j^{-1}, g_l) = p^{e-a}\underline{K},$$

эквивалентное тому, что для каждого элемента $k \in K$ и для любого элемента $g' \in \bar{T}$ найдется ровно p^{e-a} элементов $g'' \in \bar{T}$ таких, что $f(g', g'') = k$.

Далее, действие группы C на $\bar{T}$ сопряжениями эквивалентно действию ρ группы C изометриями на векторном пространстве V размерности $2d$ над полем F из p^c элементов с невырожденной знакопеременной формой $\bar{\phi}$. Пусть δ — биекция множества $\{g_1,\dots,g_n\}$ на множество векторов пространства V такая, что $\delta(g_i^x) = \delta(g_i)^{\rho(x)}$, $i \in \{1,...,n\}$ (при этом δ — изоморфизм групп $\bar{T}$ и $(V,+)$). Положим $\bar{T}^\# = \bar{T} - \{1\}$. Так как группа C транзитивна на множестве гиперболических пар пространства V и для заданных $\alpha \in F$ и $u \in V$ число $v \in V$ таких, что $\bar{\phi}(u,v) = \alpha$ равно p^{e-c}, то, по доказанному выше, множество $\bar{T}^\# \times \bar{T}^\#$ допускает разбиение, блоками которого являются множества вида $B_k = \{(g_i, g_j)|f(g_i, g_j) = k\}$, где $k \in Z(T)$, причем в случае $a = c$ получим, что $(p^c - 1)$ блоков B_k, отличных от B_1, являются несамоспаренными орбиталами группы C на $\bar{T}^{\#}$. Пусть ψ это отображение F на K, заданное по правилу $\psi(\alpha) = k$, где элементы α, k удовлетворяют соотношениям $f(g_i, g_j) = k$ и $\bar{\phi}(\delta(g_i), \delta(g_j)) = \alpha$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\psi(0_F) = 1_T$ и

$$\tilde{B}_\alpha = \{(g_i, g_j)|\bar{\phi}(\delta(g_i), \delta(g_j)) = \alpha\} \subseteq B_{\psi(\alpha)} = \{(g'_i, g''_j)|f(g'_i, g''_j) = \psi(\alpha))\}.$$

Заметим, что поскольку δ — изоморфизм $\bar{T}$ и $(V, +)$, то ψ — гомоморфизм $(F, +)$ на K. Пусть $r = p^c$. Тогда группа T определена однозначно (с точностью до изоморфизма) и граф Γ_T изоморфен дистанционно регулярному накрытию, получаемому с помощью конструкции Таса —Соммы. Далее, для любого собственного делителя $\tilde{r}$ числа p^c частное $\tilde{\Gamma}_T$ графа Γ_T на множестве $\tilde{K}$-орбит, где $\tilde{K}$ — это произвольная подгруппа индекса $\tilde{r}$ из K, является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{p^e-1, (\tilde{r}-1)p^e/\tilde{r}, 1; 1, p^e/\tilde{r}, p^e-1\}$ (см. также [1, c.385, замечание (iv)]), и G действует транзитивно на дугах графа $\tilde{\Gamma}_T$. При этом $T/\tilde{K}$ — специальная группа порядка $\tilde{r}p^e$, регулярная на вершинах графа $\tilde{\Gamma}_T$. По доказанному выше, специальная группа $\tilde{T}$ порядка $\tilde{r}p^e$ с $|Z(\tilde{T})| = \tilde{r}$, удовлетворяющая условию леммы, изоморфна группе T/N для некоторой нормальной в T подгруппы N из K. Поэтому в случае $a < c$ получим, что Γ изоморфен некоторому частному дистанционно регулярного накрытия Таса —Соммы, определенного для пространства V. Лемма 5 доказана. □

Теорема 1 вытекает из лемм 1–5. □

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A Neumaier. *Distance-regular graphs.* Berlin etc: Springer-Verlag (1989)

[2] J.D. Dixon, B. Mortimer. *Permutation Groups.* Springer, New York (1996)

[3] C.D. Godsil, R.A. Liebler, C.E. Praeger, *Antipodal distance transitive covers of complete graphs*, Europ. J. Comb., **19**:4 (1998), 455-478.

[4] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina. *Edge-symmetric distance-regular coverings of cliques: the affine case*, Sib. Math. J., **54**:6 (2013), 1353–1367.

[5] M. Klin, Ch. Pech. *A new construction of antipodal distance-regular covers of complete graphs through the use of Godsil-Hensel matrices*, Ars Mathematica Contemporanea **4** (2011), 205–243.

[6] The GAP Group, GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.6.4; 2013; http://www.gap-system.org.

Ludmila Yur'evna Tsiovkina
Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics,
S. Kovalevskaya str., 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: tsiovkina@imm.uran.ru