

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, вып. А. 1–А. 41 (2016)

DOI 10.17377/semi.2016.13.020

УДК 517.93

MSC 37, 58, 70

**THE CONFERENCE «DYNAMICS IN SIBERIA»,
NOVOSIBIRSK, FEBRUARY 29 – MARCH 4, 2016**

I.A. DYNNIKOV, A.E. MIRONOV, I.A. TAIMANOV, A.YU. VESNIN

ABSTRACT. The program and abstracts of talks of the Conference «Dynamics in Siberia» held in Sobolev Institute of Mathematics, February 29 – March 4, 2016 are presented.

The conference «Dynamics in Siberia» was held at the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (Novosibirsk) from February 29 to March 4, 2016. Members of the program committee were as follows: I.A. Dynnikov, A.E. Mironov, A.S. Skripchenko, I.A. Taimanov and A.Yu. Vesnin.

More than 50 experts on dynamical systems, mathematical physics, geometry and topology participated in the conference. The conference program consisted of plenary talks, short talks and poster session. The talks were done by well-known experts from Moscow, St. Petersburg, Novosibirsk, Chelyabinsk, Gorno-Altaysk, Grozny, Kemerovo, Krasnoyarsk, Tomsk, Ufa and also by well-known mathematicians from France, Israel and Poland. More than 20 young scientists, graduate and undergraduate students participated in the conference. Most of them gave short talks and poster presentations.

The conference was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 16-01-20041).

Below we present the Conference program and abstracts of talks.

DYNNIKOV, I.A., MIRONOV, A.E., TAIMANOV, I.A., VESNIN, A.YU. CONFERENCE
«DYNAMICS IN SIBERIA», NOVOSIBIRSK, FEBRUARY 29 – MARCH 4, 2016.

© 2016 DYNNIKOV I.A., MIRONOV A.E., TAIMANOV I.A., VESNIN A.YU.

Received April, 9, 2016, published April, 15, 2016.

PROGRAM (PLENARY TALKS)

February 29

- 11:00-11:50 D.V. Treschev (*Moscow*) Periscope theorem.
 12:10-13:00 A. J. Maciejewski (*Zielona Gora, Poland*) Integrability of certain restricted systems of material points.
 13:10-14:00 M. Bialy (*Tel Aviv, Israel*) New results on algebraic Birkhoff conjecture for convex billiards.

March 1

- 9:00-09:50 A.V. Malyutin (*St. Petersburg*) Random walks on groups acting on treelike spaces.
 10:00-10:50 M. Przybylska (*Zielona Gora, Poland*) Integrability of homogeneous Hamiltonian systems in curved spaces.
 11:10-12:00 A.A. Glutsyuk (*Lion, France; Moscow*) On periodic orbits in complex planar billiards.
 12:10-13:00 T.E. Panov (*Moscow*) Geometric structures on moment-angle manifolds.

March 2

- 9:00-9:50 O.K. Sheinman (*Moscow*) Lax operator algebras and related structures.
 10:40-11:30 S.P. Tsarev (*Krasnoyarsk*) Geodesic flows with polynomial and non-polynomial integrals.
 11:40-12:30 A.A. Gaifullin (*Moscow*) On the bellows conjecture in spaces of constant curvature.

March 3

- 9:00-9:30 M.V. Pavlov (*Novosibirsk*) The Manin reduction and the Calogero Gold Fish.
 9:40-10:30 A.A. Shananin (*Moscow*) Inverse problems in the problem of measurement in economics.
 11:00-11:50 V.Yu. Novokshenov (*Ufa*) Orthogonal polynomials and Painlevé equations.
 12:00-12:50 A.I. Shafarevich (*Moscow*) Lagrangian manifolds, classical Hamiltonian systems and Maslov indices corresponding to the spectral series of the Schroedinger operators with delta-potentials.

March 4

- 9:00-9:50 S.Yu. Dobrokhotov (*Moscow*) Librations, instantons, tunneling and low bands of 2-D Schrödinger operator for quantum dimers.
 10:10-11:00 Yu.A. Kordyukov (*Ufa*) Semiclassical spectral analysis for magnetic Schroedinger operators.
 11:10-12:00 V.E. Nazaikinskii (*Moscow*) On the run-up of long waves generated by a localized source on a shallow beach.

Plenary talks

M. Bialy	<i>New results on algebraic Birkhoff conjecture for convex billiards</i>	A. 5
S.Yu. Dobrokhotov	<i>Librations, instantons, tunneling and low bands of 2-D Schrödinger operator for quantum dimers</i>	A. 5
A.A. Gaifullin	<i>On the bellows conjecture in spaces of constant curvature</i>	A. 5
A.A. Glutsyuk	<i>On periodic orbits in complex planar billiards</i>	A. 6
Yu.A. Kordyukov	<i>Semiclassical spectral analysis for magnetic Schroedinger operators</i>	A. 6
A.J. Maciejewski	<i>Integrability of certain restricted systems of material points</i>	A. 6
A.V. Malyutin	<i>Random walks on groups acting on treelike spaces</i>	A. 6
V.E. Nazaikinskii	<i>On the run-up of long waves generated by a localized source on a shallow beach</i>	A. 7
V.Yu. Novokshenov	<i>Orthogonal polynomials and Painlevé equations.</i>	A. 7
T.E. Panov	<i>Geometric structures on moment-angle manifolds</i>	A. 8
M.V. Pavlov	<i>The Manin reduction and the Calogero Gold Fish</i>	A. 8
M. Przybylska	<i>Integrability of homogeneous Hamiltonian systems in curved spaces</i>	A. 8
A.I. Shafarevich	<i>Lagrangian manifolds, classical Hamiltonian systems and Maslov indices corresponding to the spectral series of the Schroedinger operators with delta-potentials</i>	A. 8
A.A. Shananin	<i>Inverse problems in the problem of measurement in economics</i>	A. 9
O.K. Sheinman	<i>Lax operator algebras and related structures</i>	A. 9
D.V. Treschev	<i>Periscope theorem</i>	A. 9
S.P. Tsarev	<i>Geodesic flows with polynomial and non-polynomial integrals</i>	A. 9

Short talks

N.V. Abrosimov	<i>On fullerene C_{60} and other convex polyhedrons with symmetries in spaces of constant curvature (in Russian)</i>	A. 10
A.Yu. Anikin	<i>Non-commutative normal forms and inverse spectral problems</i>	A. 13
Yu.E. Anikonov	<i>On identification problems with varying parameter</i>	A. 13
Yu.Yu. Bagderina	<i>Criteria of the existence of rational integrals of two-dimensional geodesic flows (in Russian)</i>	A. 14
A.V. Belyaev	<i>On the representation of solutions of the problem of a heavy rigid body's movement in the Kovalevskaya case by ζ and \wp-Weierstrass functions (in Russian)</i>	A. 21
Y.V. Brezhnev	<i>Analytic connections on Riemann surfaces</i>	A. 22
E.Yu. Bunkova	<i>Universal formal groups whose exponentials are elliptic functions of level n</i>	A. 22
V.P. Golubyatnikov	<i>On discrete structures in phase portraits of some non-linear dynamical systems</i>	A. 23

V.V. Chueshev	<i>Vector bundle of abelian differentials over Teichmüller spaces of surfaces with punctures (in Russian)</i>	A. 25
G.A. Chumakov	<i>Complexity in a kinetic model of heterogeneous catalytic reaction with an hierarchy of characteristic times</i>	A. 26
E.A. Fominykh	<i>On minimal ideal triangulations of cusped hyperbolic manifolds.</i>	A. 27
S. Konstantinou-Rizos	<i>Grassmann extensions of Yang-Baxter maps related to NLS type equations</i>	A. 27
E.S. Kornev	<i>Subcomplex and subkahler structures</i>	A. 27
I.Yu. Limonchenko	<i>Nonformal moment-angle manifolds of 2-truncated cubes</i>	A. 28
M.V. Neshchadim	<i>Functionally invariant solutions of the Maxwell equation (in Russian)</i>	A. 28
G.D. Solomadin	<i>Projective toric generators in the unitary cobordism ring (in Russian)</i>	A. 31
A.V. Tetenov	<i>On isomorphisms of self-similar sets, which do not satisfy Weak Separation Property (in Russian)</i>	A. 33

Poster session

S.V. Agapov	<i>On integrability of the magnetic geodesic flows on a 2-torus</i>	A. 35
K.G. Kamalutdinov	<i>Theorem on general position for a pair of fractal curves (in Russian)</i>	A. 35
O.P. Khromova	<i>On the spectrum of the one-dimensional curvature operator of non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian 4-manifolds</i>	A. 36
S.V. Klepikova	<i>On the prescribed values of the spectrum of sectional curvature operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds</i>	A. 37
E.S. Kudina	<i>On non-euclidean version of Steiner theorem (in Russian)</i>	A. 38
G.S. Mauleshova	<i>On commuting difference operators of rank one</i>	A. 39
B.T. Saparbayeva	<i>Krichever — Novikov's operators with polynomial coefficients</i>	A. 39
D.Yu. Sokolova	<i>On euclidean structure on figure-eight knot with a bridge (in Russian)</i>	A. 40

PLENARY TALKS

New results on algebraic Birkhoff conjecture for convex billiards*M. Bialy (Tel-Aviv, Israel)*

I shall discuss new results on polynomial integrals for Birkhoff billiards which we obtained recently with A.E. Mironov. Our main tool is a new, the so called Angular billiard. It enables us to get obstructions to integrability in terms of the dual curve, extending previous result by S. Bolotin of 1990. Our approach is inspired by recent paper of S. Tabachnikov on algebraic integrability of Outer billiards.

Librations, instantons, tunneling and low bands of 2-D Schrödinger operator for quantum dimers¹*S.Yu. Dobrokhotov (Moscow)*

Librations are special unstable trajectories of n -D Hamilton systems with Hamiltonians $H = p^2 - V(x)$, $V(x) \geq 0$, coinciding the energy level curves for the potential $V(x)$ having several maxima in the case when the configuration space is Euclidian one or at least one maximum when the configuration space is a cylinder. Libration pass to singular solutions (called instantons) when the energy level tends to zero ($\max V$). It is well known that instantons appear in tunnel problems related to low parts of spectra of Schrödinger operators. We show that in spectral problems librations are much more natural and pragmatic objects then instantons. As example we discuss spectral semiclassical asymptotics for 2-D Schrödinger operator with the potential periodic in x and increasing at infinity in y , which describes quantum dimers.

On the bellows conjecture in spaces of constant curvature*A.A. Gaifullin (Moscow)*

A flexible polyhedron in an n -dimensional space of constant curvature is an $(n - 1)$ -dimensional closed polyhedral surface that can be deformed continuously so that every its face remains congruent to itself during the deformation, but the deformation is not induced by an ambient rotation of the space. Intuitively, one may think of a flexible polyhedron as of a polyhedral surface with faces made of some rigid material and with hinges at codimension 2 faces that allow dihedral angles to change continuously.

The bellows conjecture stated by Connelly in 1978 asserts that the volume of any flexible polyhedron in dimensions greater than or equal to 3 is constant during the flexion. (Originally this conjecture was stated for the three-dimensional Euclidean space.) The bellows conjecture was proved in Euclidean spaces of all dimensions (Sabitov for $n = 3$, and the author for $n \geq 4$). In the talk, we shall present the author's recent results on the bellows conjecture in non-Euclidean spaces. Namely, it turns out that the bellows conjecture is false in spheres of all dimensions and is true in odd-dimensional Lobachevsky spaces.

¹The work was supported by RFBR, grant 14-01-00521.

On periodic orbits in complex planar billiards

A.A. Glutsyuk (Lyon, France; Moscow)

A conjecture of Victor Ivrii (1980) says that in every billiard with smooth boundary the set of periodic orbits has measure zero. This conjecture is closely related to spectral theory. Its particular case for triangular orbits was proved by M. Rychlik (1989, in two dimensions), Ya. Vorobets (1994, in any dimension) and other mathematicians. The case of quadrilateral orbits in dimension two was treated in our joint work with Yu. Kudryashov (2012). We study the complexified version of planar Ivrii's conjecture with reflections from a collection of planar holomorphic curves. We present the classification of complex counterexamples with four reflections and partial positive results. The recent one says that a billiard on one irreducible complex algebraic curve without too complicated singularities cannot have a two-dimensional family of periodic orbits of any period. The above complex results have applications to other problems on real billiards: Tabachnikov's commuting billiard problem and Plakhov's invisibility conjecture.

Semiclassical spectral analysis for magnetic Schroedinger operators²

Yu.A. Kordyukov (Ufa)

We will describe some results on semiclassical spectral asymptotics for a pure magnetic Schroedinger operator with non-vanishing magnetic field on a compact Riemannian manifold. We will also discuss related problems in geometry and dynamics of magnetic fields.

Integrability of certain restricted systems of material points

A.J. Maciejewski (Zielona Gora, Poland)

We consider several mechanical systems of material points whose motion is restricted by holonomic constraints. The main aim is to study their integrability in the framework of differential Galois theory. As examples we present results concerning two systems. The first of these systems is a chain in circular orbit. The second is a system of points on a sphere whose motion is restricted by certain additional constraint.

Random walks on groups acting on treelike spaces³

A.V. Mal'utin (St. Petersburg)

Let G be a countable group and let μ be a probability measure on G . The (right) random walk on G with distribution μ (or, briefly, μ -walk) is the time-homogeneous Markov chain whose state space is G , the transition probabilities are given by $P(g, h) = \mu(g^{-1}h)$, and the initial distribution is concentrated at the identity of the group. Realizations of this process are called *paths* of the random walk. Let P_μ denote the associated Markov measure on the path space $G^{\mathbb{N}_0}$.

We obtain a series of new results of the following kind.

Theorem. *Let G be a countable group acting on a dendrite D . Assume that D is not an interval. Assume moreover that D contains no proper G -invariant connected compact subsets. Take a point $x \in D$ such that $D \setminus \{x\}$ is disconnected,*

²The work was supported by RFBR, grants 12-01-00519-a and 13-01-91052-NCNI-a.

³The work was supported by RFBR, grant 14-01-00373-a.

and let $f: G \rightarrow D$ be the map sending g to $g(x)$. Let μ be a probability measure on G whose support generates G as a semigroup. Then f maps almost all paths of the μ -walk (that is, P_μ -almost all paths) to convergent sequences.

On the run-up of long waves generated by a localized source on a shallow beach⁴

V.E. Nazaikinskii (Moscow)

Pelinovsky and Masova [1] suggested a method, later used in many papers (e.g., see [2, 3]), for finding the run-up of long waves (in particular, tsunami waves) on a shallow beach in the 1D case. This method is based on the results due to Carrier and Greenspan [4] for the 1D nonlinear shallow water equations over a linear bottom. We consider a similar problem in the 2D case for waves generated by localized sources. We find semiclassical asymptotic solutions of the linearized problem [5] with the use of a modified Maslov canonical operator [6]; the coastline is viewed as a caustic of special form, and Fock's quantization formulas for canonical transformations are used to represent the asymptotic solutions of the linearized problem near the shore via a Hankel type transform. Then an analog of the Carrier–Greenspan transformation is applied to obtain algebraic formulas for the uprush in the case of simple sources of special form.

[1] E. Pelinovsky, R. Mazova, *Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles*, *Natural Hazards*, **6** (1992), 227–249.

[2] S.Yu. Dobrokhotov, B. Tirozzi, *Localized solutions of one-dimensional nonlinear shallow-water equations with velocity $c = \sqrt{x}$* , *Russian Math. Surveys*, **65**:1 (2010), 177–179.

[3] D.S. Minenkov, *Asymptotics of the solutions of the one-dimensional nonlinear system of equations of shallow water with degenerate velocity*, *Math. Notes*, **92**:5 (2012), 664–672.

[4] G.F. Carrier, H.P. Greenspan, *Water waves of finite amplitude on a sloping beach*, *J. Fluid Mechanics*, **4**:01 (1958), 97–109.

[5] S.Yu. Dobrokhotov, V.E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, *Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data*, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:4 (2013), 389–401.

[6] V.E. Nazaikinskii, *The Maslov canonical operator on Lagrangian manifolds in the phase space corresponding to a wave equation degenerating on the boundary*, *Math. Notes*, **96**:2 (2014), 248–260.

Orthogonal polynomials and Painlevé equations

V. Yu. Novokshenov (Ufa)

Asymptotics of the orthogonal polynomials constitute a classic analytic problem. A distribution of zeroes to generalized Hermite polynomials is studied in some scaling limit. These polynomials defined as Wronskians of classic Hermite polynomials appear in a number of mathematical physics problems as well as in the theory of random matrices. Calculation of asymptotics is based on Riemann —

⁴The work was supported by RFBR grant 14-01-00521 and by the RITMARE CINFAI project (Italy).

Hilbert problem for Painlevé IV equation which has solutions expressed in terms of these polynomials. In this scaling limit the Riemann – Hilbert problem is solved in elementary functions. As a result, we come to analogs of Plancherel – Rotach formulas for asymptotics of classical Hermite polynomials.

Geometric structures on moment-angle manifolds

T.E. Panov (Moscow)

Moment-angle complexes are spaces acted on by a torus and parametrised by finite simplicial complexes. They are central objects in toric topology, and currently are gaining much interest in the homotopy theory. Due to their combinatorial origins, moment-angle complexes also find applications in combinatorial geometry and commutative algebra. Moment-angle complexes corresponding to simplicial subdivision of spheres are topological manifolds, and those corresponding to simplicial polytopes admit smooth realisations as intersection of Hermitian quadrics in \mathbb{C}^m .

After an introductory part describing the construction and the topology of moment-angle complexes, we shall concentrate on several interesting geometric properties of moment-angle manifolds, emphasising complex-analytic, symplectic and Lagrangian aspects.

Different parts of this talk are based on joint works with Victor Buchstaber, Andrei Mironov, Yuri Ustinovsky and Mikhail Verbitsky.

The Manin reduction and the Calogero Gold Fish

M.V. Pavlov (Novosibirsk)

We show how the Calogero Gold Fish system can be integrated via Manin Reduction of the Benney hydrodynamic chain.

We generalize this construction to some other integrable hydrodynamic chains.

Integrability of homogeneous Hamiltonian systems in curved spaces

M. Przybylska (Zielona Gora, Poland)

We investigate certain natural Hamiltonian systems with two degrees of freedom. Their kinetic energy depends on coordinates and they possess appropriate forms of potentials such that these systems are homogeneous. Thanks to this property they admit particular solutions. Using these solutions we derive necessary conditions for the integrability of such systems investigating differential Galois groups of variational equations. Obtained integrability conditions give certain integrable and superintegrable systems that will be presented.

Lagrangian manifolds, classical Hamiltonian systems and Maslov indices corresponding to the spectral series of the Schroedinger operators with delta-potentials

A.I. Shafarevich (Moscow)

We study spectral series of the Schroedinger operator with delta-type potential on 2D or 3D Riemannian spherically symmetric manifold. Lagrangian manifolds, corresponding to these series, do not coincide with the standard Liouville tori. We describe topological structure of these manifolds as well as Maslov indices, entering

quantization conditions. In particular, we study the effect of the jump of the Maslov index via passing through the critical values of the multipliers of the delta-functions.

Inverse problems in the problem of measurement in economics

A.A. Shananin (Moscow)

Lax operator algebras and related structures

O.K. Sheinman (Moscow)

Lax operator algebras are Lie algebras of currents defined on Riemann surfaces and taking values in semi-simple or reductive Lie algebras. They are introduced in 2007 (I. Krichever and O. Sh.). In many respects, Lax operator algebras are similar to Kac – Moody algebras. Non-twisted Kac – Moody algebras are Lax operator algebras on Riemann sphere with marked points at 0, and infinity. Up to the end of 2013 Lax operator algebras have been defined and constructed only for classical Lie algebras, and for the exceptional Lie algebra G_2 . A natural, and long standing question of their general construction in terms of root systems has been resolved in the beginning of 2014. It is a pleasant duty of the author to stress the role of E.B. Vinberg in the discussion of the question.

The general definition shed new light at the relations between Lax operator algebras, finite-dimensional integrable systems, and holomorphic vector bundles on Riemann surfaces. It turned out to be that all these structures have the same basis related to gradings of semisimple Lie algebras.

In the talk, we are going to give a general definition of Lax operator algebras in terms of gradings of semi-simple Lie algebras, formulate their basic properties. We are to state a connection with Tyurin parameters of holomorphic vector bundles on Riemann surfaces, and formulate a general approach to construction of finite-dimensional integrable systems based on this approach.

Periscope theorem

D.V. Treschev (Moscow)

Let $F : D_1 \rightarrow D_2$ be a diffeomorphism of two domains on a plane. Consider a parallel bundle of light rays through D_1 perpendicular to the plane. We consider the following problem.

Find a system of mirrors which transforms this bundle to a parallel bundle through D_2 perpendicular to the plane such that any ray through $x \in D_1$ is transformed to the ray through $F(x) \in D_2$.

Geodesic flows with polynomial and non-polynomial integrals

S.P. Tsarev (Krasnoyarsk)

A new algorithmic method for local construction of two-dimensional metrics with polynomial or non-polynomial (rational or more general) first integral is presented. The method allows to produce multiparametric families of such metrics and its integrals. We conjecture that locally two-dimensional metrics possessing first integrals are dense in the functional space of all local two-dimensional metrics.

SHORT TALKS

**О фуллерене C_{60} и других выпуклых многогранниках
с симметриями в пространствах постоянной кривизны⁵**

Н.В. Абросимов (Новосибирск)

Мы рассматриваем выпуклые трехмерные многогранники в пространствах постоянной кривизны: евклидовом E^3 , сферическом S^3 и гиперболическом H^3 .

Определение. *Выпуклый многогранник* — это выпуклая комбинация (в соответствующей геометрии) конечного набора точек, называемых *вершинами многогранника*. *Ребро многогранника* — это отрезок геодезической, соединяющей пару его соседних вершин. *Грань* — это геодезический многоугольник, лежащий на гиперплоскости, проходящей через соответствующие вершины.

Такое определение позволяет корректно находить длины ребер, двугранные углы между гранями, «плоские» углы между ребрами, площадь поверхности многогранника и его объем. Если на время забыть о геометрии, то каждый многогранник имеет еще комбинаторную структуру.

Определение. Два многогранника имеют один и тот же *комбинаторный тип*, если их реберные скелеты эквивалентны как топологические графы.

Наша цель — получение точных формул для объемов сферических и гиперболических многогранников заданного комбинаторного типа. Нами ранее были получены точные формулы для объемов сферического и гиперболического тетраэдра, сферических и гиперболических октаэдров с различными симметриями, сферических гексаэдров с симметриями и др. (подробнее об этом можно прочитать в нашей совместной статье с А.Д. Медных [1]). Указанные формулы выражают объем через двугранные углы. На пути к получению этих формул требуется установить теоремы существования для многогранников соответствующего типа, то есть необходимые и достаточные условия, при каких значениях двугранных углов многогранник заданного типа реализуется в той или иной геометрии. Также требуется установить вспомогательные соотношения между длинами и углами. При этом в общем случае получить формулу объема крайне сложно. Но если допустить, что многогранник имеет определенную симметрию, то работа упрощается, а формула объема в результате имеет более красивый вид. Можно сказать, что впервые эту роль симметрии обнаружил сам Лобачевский, вычислив объем идеального гиперболического тетраэдра, который по определению является симметричным.

Определение. *Фуллерен (хим.)* — молекулярное соединение, принадлежащее классу аллотропных форм углерода и представляющее собой выпуклые замкнутые многогранники, составленные из четного числа трехкоординированных атомов углерода, имеющие пятиугольные и шестиугольные грани.

Теорема Эйлера для многогранников. Пусть v — число вершин, e — число ребер и f — число граней замкнутого многогранника. Тогда

$$v - e + f = 2.$$

⁵Работа выполнена при поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (грант МК-9572.2016.1).

Из приведенной теоремы непосредственно следует, что для существования замкнутого многогранника, имеющего только пятиугольные и шестиугольные грани, необходимо, чтобы пятиугольных граней было ровно 12, а шестиугольных $v/2 - 10$.

Наименьшим из фуллеренов является так называемый *бакминстерфуллерен* или C_{60} (см. Рис. 1). Как видно из названия, эта молекула состоит из шестидесяти атомов углерода.

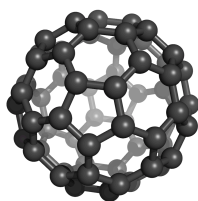


Рис 1. Бакминстерфуллерен или C_{60}

Многогранник C_{60} может быть получен из правильного икосаэдра усечением всех его двенадцати вершин с сохранением симметрии, то есть так, чтобы полученный в результате многогранник имел ту же группу симметрий, что и исходный икосаэдр (см. Рис. 2).

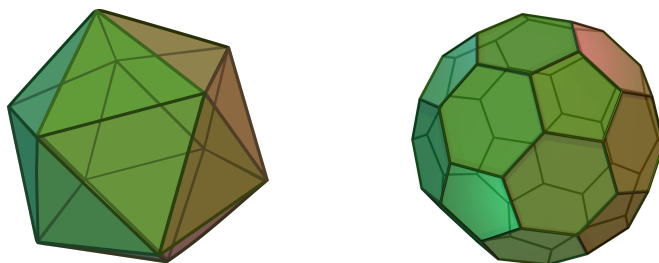


Рис 2. Правильный икосаэдр и усеченный икосаэдр — C_{60}

Таким образом, вращение пятого порядка вокруг оси, проходящей через центр C_{60} и середину любой из его пятиугольных граней, переводит C_{60} в себя. Также сохраняет C_{60} и вращение третьего порядка вокруг оси, проходящей через его центр и середину любой из его шестиугольных граней. Наконец, имеется зеркальная симметрия относительно плоскости (гиперплоскости в H^3), проходящей через середину любого ребра между пятиугольной и шестиугольной гранями ортогонально этому ребру. Иными словами, C_{60} обладает $(2, 3, 5)$ -симметрией.

Группа симметрий C_{60} в H^3 или E^3 (группа икосаэдра) порождается двумя эллиптическими элементами: вращением пятого порядка и вращением третьего

порядка. При этом угол между их осями удовлетворяет соотношению

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Как видно из определения, многогранник C_{60} имеет 12 правильных пятиугольных граней и 20 полуправильных шестиугольных граней (имеющих симметрию третьего порядка). Ребра — двух типов: между двумя шестиугольными гранями (обозначим такие ребра через ℓ) и между пяти- и шестиугольной гранями (такие обозначим через L). При этом окрестности всех 60 вершин устроены одинаково: в каждой вершине сходятся два ребра L и одно ℓ .

Фуллерен C_{60} является полуправильным многогранником и одним из тринадцати архимедовых тел.

Нами получены следующие утверждения.

Теорема 1. *В фуллерен C_{60} в E^3 может быть вписан шар, касающийся всех его граней, тогда и только тогда, когда длины его ребер двух типов удовлетворяют соотношению*

$$\frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Также показано, что полученное соотношение является решением изопериметрической задачи. То есть при таком соотношении между длинами ребер максимизируется объем евклидова фуллерена C_{60} , нормированный по площади поверхности.

Теорема 2. *В фуллерен C_{60} в H^3 может быть вписан шар, касающийся всех его граней, тогда и только тогда, когда длины его ребер двух типов удовлетворяют соотношению*

$$\frac{\operatorname{sh} \ell/2}{\operatorname{sh} L/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Также показано, что полученное соотношение является решением изопериметрической задачи. То есть при таком соотношении между длинами ребер максимизируется объем гиперболического фуллерена C_{60} , нормированный по площади поверхности.

Отдельный интерес представляет фуллерен C_{60} с прямыми двугранными углами. Несложно показать, что такой многогранник реализуется в гиперболическом пространстве, причем все его плоские углы между ребрами, имеющими общую вершину, тоже прямые. Копиями такого многогранника можно замостить все пространство H^3 без самопересечений.

Теорема 3. *Площадь поверхности гиперболического фуллерена C_{60} с прямыми углами равна 46π .*

Рассмотрим еще раз правильный икосаэдр и полученный из него усечением вершин фуллерен C_{60} (Рис. 2). Двугранные углы икосаэдра соответствуют двугранным углам между парами шестиугольных граней C_{60} . Удивительный факт: хотя гиперболический C_{60} с прямыми двугранными углами существует, но правильный икосаэдр с прямыми двугранными углами не может быть

реализован в H^3 . Предположим, что это не так, и прямоугольный гиперболический икосаэдр существует. Тогда рассмотрим его сечение сферой достаточно малого радиуса с центром в любой его вершине. В сечении получим сферический пятиугольник с прямыми углами, что невозможно, так как сумма углов в любом сферическом n -угольнике больше $(n - 2)\pi$.

[1] N. Abrosimov, A. Mednykh, *Volumes of polytopes in constant curvature spaces*, Fields Institute Communications, **70** (2014), 1–26. arXiv:1302.4919.

Non-commutative normal forms and inverse spectral problems⁶

A. Yu. Anikin (Moscow)

We discuss non-commutative analog for Birkhoff normal forms. This theory provides us with a new method for calculating asymptotic series of low lying eigenvalues of Schrödinger operator. We show that the approach may be useful for different reasons. Firstly, it enables to estimate the growth of the eigenvalues expansion coefficients, and secondly it may be efficient for practical calculations, e.g. for treating inverse problems. In particular, in the one-dimensional case under some restrictions we prove that the knowledge of asymptotic series for any pair of low lying eigenvalues is enough to recover the potential.

On identification problems with varying parameter

Yu. E. Anikonov (Novosibirsk)

We consider an evolution equation with a variable parameter p

$$\frac{\partial w}{\partial t} pA(t)w + \lambda(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad a \leq t \leq b, \quad \alpha_1 \leq p \leq \beta_1 \quad (1)$$

with data

$$w|_{t=a} = w_a(x, p), \quad w|_{t=b} = w_b(x, p), \quad (2)$$

where $A(t)$ is a linear operator such that

$$A(t)e^{ix\xi} = e^{ix\xi} \tilde{A}(\xi, t), \quad x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad \tilde{A}(\xi, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),$$

D is domain in Euclidean space \mathbb{R}^n of variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 1$, a, b, α_1, β_1 are constants. It is necessary to determine $w(x, t, p)$ and $\lambda(x, t)$ if (1) and (2) are satisfied. We put function $B(\xi, t) = \int_a^t \tilde{A}(\xi, \tau) d\tau$.

The main result is

Theorem. Let $w_a(x, p) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}_a(\xi, p) e^{ix\xi} d\xi$, $w_b(x, p) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}_b(\xi, p) e^{ix\xi} d\xi$, where

$R > 0$, $\hat{w}_a(\xi, p)$, $\hat{w}_b(\xi, p)$ are continuous for $\xi \in |\xi| \leq R$, $\alpha_1 \leq p \leq \beta_1$ and $F(\xi, y)$ is a continuous solution of equation

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b e^{(y-p)B(\xi, \tau)} d\tau \right] F(\xi, y) dy e^{-pB(\xi, b)} \hat{w}_b(\xi, p) - e^{-pB(\xi, a)} \hat{w}_a(\xi, p)$$

⁶The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grants 14-01-00521 and 15-01-03747)

for $|\xi| \leq R$, $\alpha \leq y \leq \beta$.

Then functions $w(x, t, p)$, $\lambda(x, t)$, which are determined by formulas

$$w(x, p, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{pB(\xi, t)} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^t e^{(y-p)B(\xi, \tau)} d\tau - \int_t^b e^{(y-p)B(\xi, \tau)} d\tau \right) F(\xi, y) dy + e^{-pB(\xi, b)} \widehat{w}_b(\xi, p) + e^{-pB(\xi, a)} \widehat{w}_a(\xi, p) \right] e^{ix\xi} d\xi,$$

$$\lambda(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\alpha}^{\beta} e^{yB(\xi, t)} F(\xi, y) dy \right] e^{ix\xi} d\xi,$$

satisfy (1) and (2).

Alike theorems can be formulated for systems and it is possible to give applications.

Критерии существования рациональных интегралов проекций двумерных уравнений геодезических⁷

Ю.Ю. Багдерина (Уфа)

1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ. Геодезические линии на гладкой двумерной поверхности с метрикой

$$ds^2 = g_{11}(x, y)dx^2 + 2g_{12}(x, y)dx dy + g_{22}(x, y)dy^2 \quad (1)$$

определяются решением системы

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k &= 0, \quad (x^1, x^2) = (x, y), \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{g^{il}}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad i, j, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (2)$$

или, что то же самое, решением гамильтоновой системы

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(g^{11}p_1^2 + 2g^{12}p_1p_2 + g^{22}p_2^2)$. Для интегрирования системы (3) необходим дополнительный первый интеграл F , функционально независимый с H . Чаще всего (см., например, обзор [1]) F ищется в форме однородного полинома по p_1, p_2 . В [2] предполагается, что все первые интегралы задачи о геодезических являются либо полиномами по p_1, p_2 , либо функциями таких полиномов. В простейшем случае это отношение двух полиномов степени m и n . Для системы (2) такой рациональный интеграл имеет вид

$$F = \left(\sum_{j=0}^m A_j(x, y) \dot{x}^{m-j} \dot{y}^j \right) / \left(\sum_{j=0}^n B_j(x, y) \dot{x}^{n-j} \dot{y}^j \right), \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}. \quad (4)$$

Здесь рассматривается случай, когда степени числителя и знаменателя совпадают, $m = n$. Тогда проекция системы (2) на плоскость (x, y) в форме скалярного ОДУ второго порядка

$$y'' = S(x, y)y'^3 + 3R(x, y)y'^2 + 3Q(x, y)y' + P(x, y), \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (5)$$

⁷Работа поддержана РФФ (грант 14-11-00078).

где $S = \Gamma_{22}^1$, $3R = 2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2$, $3Q = \Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2$, $P = -\Gamma_{11}^2$, наследует интеграл (4) в форме

$$F = \left(\sum_{j=0}^n A_j(x, y) y'^j \right) / \left(\sum_{j=0}^n B_j(x, y) y'^j \right). \quad (6)$$

На практике рациональный интеграл ОДУ (5) удобнее искать в форме

$$F_n = a_n(x, y) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j(x, y)}{y' + b_j(x, y)}. \quad (7)$$

Эта задача является более общей чем поиск интеграла (4) системы (2) при $m = n$, так как не каждое ОДУ (5) является проекцией некоторой системы уравнений геодезических (соответствующий критерий имеется в [3]). Например, уравнения Пенлеве таким свойством не обладают.

Для того чтобы функция (7) была интегралом ОДУ (5), коэффициенты a_n , a_j , b_j , $j = 0 \dots, n-1$, должны удовлетворять переопределенной системе уравнений

$$\begin{aligned} a_{jx} &= (a_j b_j)_y + 3a_j(Q - 2Rb_j + Sb_j^2), & b_{jx} &= b_j b_{jy} - P + 3Qb_j - 3Rb_j^2 + Sb_j^3, \\ a_{ny} &= S \sum_{j=0}^{n-1} a_j, & a_{nx} &= \sum_{j=0}^{n-1} (3Ra_j - 2Sa_j b_j - a_{jy}), & j &= 0 \dots, n-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Относительно интегралов уравнений геодезических можно ставить разные задачи. Одна из них: для данной метрики (1) определить, будет ли система (2) иметь интеграл заданной формы. Такой критерий в случае полиномиального интеграла первой и второй степени получен в [4], в [5] он получен для ОДУ (5) и его интеграла (7) при $n = 1$.

Другая задача: описать метрики некоторого простого вида, например, $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ или $ds^2 = \lambda(x, y)dx^2 + dy^2$, для которых система (2) имеет интеграл заданной формы (см. [1, 6]). Предварительно доказываем, что в подходящей системе координат любая метрика (1) имеет такой вид.

При всех n уравнения (8) могут быть проинтегрированы с некоторыми P , Q , R , S , что согласуется с основным результатом [2]. Наиболее просто это сделать в случае метрики

$$ds^2 = \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Интегралы соответствующих уравнений геодезических можно получить из интегралов их проекции

$$y'' = \frac{\lambda_{xy}}{\lambda_y} y' - \frac{\lambda_{yy}}{\lambda_y} y'^2 \quad (9)$$

подстановкой $y' = \dot{y}/\dot{x}$. Перечислим функции $\lambda(x, y)$ в ОДУ (9) и его интегралы вида (7) при $n = 1, 2, 3, 4$ (здесь $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(y)$, $\gamma = \gamma(y)$, $h, h_0, \dots, h_3, \rho, \sigma$ — функции x, y):

$$n = 1, F_1 = \frac{(\alpha - \beta)\alpha'\lambda}{(\alpha - \beta)\lambda_y y' + \alpha'\lambda} - \alpha, \text{ функция } \lambda \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$2\lambda_{xy} - \frac{\lambda_x \lambda_y}{\lambda} + \left(\frac{2\alpha'}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha''}{\alpha'} \right) \lambda_y + \frac{\alpha' \beta'}{(\alpha - \beta)^2} \lambda = 0,$$

которое заменой переменных $t = \alpha(x)$, $z = \beta(y)$, $u = \sqrt{(\alpha - \beta)\lambda/\alpha'}$ преобразуется в уравнение Эйлера-Пуассона

$$u_{tz} + \frac{u_t + u_z}{2(t - z)} = 0.$$

Его решениями являются $u = \sqrt{z/t}$ и $u = 1/\sqrt{tz} - \sqrt{z}t^{-3/2}$, по рекуррентной формуле

$$u_{m+1} = (t - z)u_m + 2t^2 \frac{\partial u_m}{\partial t} + 2z^2 \frac{\partial u_m}{\partial z}$$

с помощью решения $u_0 = 1$ можно получить решения вида $u_{m+1} = (t - z)P_m(t, z)$, где $P_m(t, z)$ — однородный полином степени m по t, z .

$n = 2$, $F_2 = \frac{\alpha' \lambda \lambda_y y' + (\alpha + \beta) h_0 h_1}{(\lambda_y y' + h_0)(\lambda_y y' + h_1)} - \alpha$, при этом h_0, h_1 являются решениями уравнения

$$h h_y = \lambda_y h_x - 2\lambda_{xy} h, \quad (10)$$

λ удовлетворяет уравнению

$$((\alpha + \beta)h_0 h_1 - \alpha' \lambda (h_0 + h_1))_y + \alpha'' \lambda \lambda_y + \alpha' (\lambda_x \lambda_y - 2\lambda \lambda_{xy}) = 0. \quad (11)$$

В переменных $\alpha(x) = t$, $\beta(y) = z$, $\lambda = \alpha' U(t, z)$, $h_j = \alpha'^2 H_j(t, z)$ система, состоящая из уравнения (11) и пары уравнений (10) для $h = h_0$ и $h = h_1$, принимает вид

$$\begin{cases} 2UU_{tz} - U_t U_z + (U(H_0 + H_1))_z - (t + z)(H_0 H_1)_z - H_0 H_1 = 0, \\ H_j H_{jz} = H_{jt} U_z - 2U_{tz} H_j, \quad j = 0, 1. \end{cases}$$

$n = 3$, $F_3 = \frac{\alpha' \lambda \lambda_y^2 y'^2 + (\sigma \lambda_y y' + \alpha + \beta) h_0 h_1 h_2}{(\lambda_y y' + h_0)(\lambda_y y' + h_1)(\lambda_y y' + h_2)} - \alpha$, функции h_0, h_1, h_2 являются решениями уравнения (10),

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_y^2} \left(\gamma - \beta' \int \lambda_y dx \right) + (\alpha + \beta) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h_j}, \quad (12)$$

λ удовлетворяет уравнению

$$(\sigma h_0 h_1 h_2 - \alpha' \lambda (h_0 + h_1 + h_2))_y + \alpha'' \lambda \lambda_y + \alpha' (\lambda_x \lambda_y - 2\lambda \lambda_{xy}) = 0.$$

$n = 4$, $F_4 = \frac{\alpha' \lambda \lambda_y^3 y'^3 + (\rho \lambda_y^2 y'^2 + \sigma \lambda_y y' + \alpha + \beta) h_0 h_1 h_2 h_3}{(\lambda_y y' + h_0)(\lambda_y y' + h_1)(\lambda_y y' + h_2)(\lambda_y y' + h_3)} - \alpha$, при этом h_0, h_1, h_2, h_3 являются решениями (10), σ определяется (12), функция ρ находится из уравнения

$M_y + \alpha'' \lambda \lambda_y + \alpha' (\lambda_x \lambda_y - 2\lambda \lambda_{xy}) = 0$, где $M = \rho h_0 h_1 h_2 h_3 - \alpha' \lambda (h_0 + h_1 + h_2 + h_3)$, λ удовлетворяет уравнению $N_y = 4\lambda_{xy} M - \lambda_y M_x$, где $N = \sigma h_0 h_1 h_2 h_3 - M(h_0 + h_1 + h_2 + h_3) - \alpha' \lambda \sum_{i \neq j} h_i h_j$.

При построении всех этих решений системы (8) предполагалось, что b_j отличны от нуля. Если $n = 1$, то она имеет также решение, приводящее к интегралу $\tilde{F}_1 = \frac{\alpha'(\varepsilon + \beta)}{\beta' y'} - 2\alpha$, $\varepsilon = \varepsilon(x)$ и метрике $ds^2 = \alpha' \beta' (\varepsilon + \beta) dx dy$. Если $n = 2$, то одно из решений системы (8) для ОДУ (9) приводит к $\tilde{F}_2 = \frac{(\alpha' \lambda + \beta \lambda_y^2) \rho}{\rho \lambda_y y' + \alpha' \lambda + \beta \lambda_y^2} - \frac{\beta \lambda_y}{y'} - \alpha$, где $\rho = \alpha + \gamma + \beta' \int \lambda_y dx + 2\beta \int \lambda_{yy} dx$, λ удовлетворяет уравнению $((\alpha' \lambda + \beta \lambda_y^2)/\rho)_y = \alpha'' \lambda \lambda_y + \alpha' (\lambda_x \lambda_y - 2\lambda \lambda_{xy})$.

Когда при $n = 2$ знаменатель функции (6) имеет кратные корни, интеграл ОДУ (5) можно искать в форме

$$F_2 = a_2(x, y) + \frac{2a_1(x, y)}{y' + b(x, y)} + \frac{a_0(x, y)}{(y' + b(x, y))^2}, \quad a_0, a_1 \neq 0 \quad (13)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими переопределенной системе уравнений

$$\begin{aligned} a_{2y} &= 2Sa_1, & a_{2x} &= 6Ra_1 + 2S(a_0 - 2ba_1) - 2a_{1y}, \\ a_{1x} &= (ba_1)_y - \frac{1}{2}a_{0y} + 3Qa_1 + 3R(a_0 - 2ba_1) + 3Sb(ba_1 - a_0), \\ a_{0x} &= 2a_0b_y + ba_{0y} + 6a_0(Q - 2Rb + Sb^2), \\ b_x &= bb_y - P + 3Qb - 3Rb^2 + Sb^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Для ОДУ (9) система (14) имеет решения $\bar{F}_2 = \frac{\beta\lambda_y^2}{y'^2} + \frac{\alpha'\lambda}{\lambda_y y'} - \alpha$, где λ удовлетворяет уравнению $(\beta\lambda_y^4)_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0$ и

$$\hat{F}_2 = \frac{\alpha'\lambda\lambda_y y' + (\alpha + \beta)h^2}{(\lambda_y y' + h)^2} - \alpha,$$

где h является решением уравнения (10), а λ удовлетворяет уравнению (ср. с (11))

$$((\alpha + \beta)h^2 - 2\alpha'\lambda h)_y + \alpha''\lambda\lambda_y + \alpha'(\lambda_x\lambda_y - 2\lambda\lambda_{xy}) = 0. \quad (15)$$

Можно ожидать, что и при $n > 2$ случай кратных корней в знаменателе функции (6) может быть получен из интеграла (7), приведенного к общему знаменателю, в котором некоторые из b_j совпадают. Система (10), (15) имеет частные решения $h = \frac{C_1\alpha'^2}{(\alpha + \beta)^2}$, $\lambda = \frac{C_1\alpha'}{\alpha + \beta} + C_2\alpha'$ и $h = \frac{C_1\alpha\beta\alpha'^2 + C_2\sqrt{\alpha\beta}(\alpha - \beta)\alpha'^2}{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}$, $\lambda = \frac{C_1\beta\alpha' + 2C_2\sqrt{\alpha\beta}\alpha'}{\alpha(\alpha + \beta)}$, $C_1, C_2 = \text{const}$.

2. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА (13). Уравнение (5) имеет интеграл (13) тогда и только тогда, когда система (14) совместна. Трижды дифференцируя (14) по x, y , можно выразить все производные функций a_0, a_1, a_2, b четвертого порядка и часть производных второго и третьего порядка в терминах $a_0, a_1, b, a_{0y}, a_{1y}, b_y, a_{0yy}, b_{yy}, b_{yyy}$, а также коэффициентов P, Q, R, S уравнения (5) и их производных. Приравнивание смешанных производных a_0, a_1, a_2, b пятого порядка с подстановкой известных выражений для производных младшего порядка приводит к соотношению

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}(\delta_{20} - \delta_{11}) + \frac{1}{3}(\delta_{21} - \delta_{30})(T + b) + (\gamma_{10} - (\gamma_{20} + \gamma_{11})b + \gamma_{21}b^2)Y_1 + \\ &+ \frac{1}{2}(2\gamma_{11} - 3\gamma_{20} + \gamma_{21}b)Y_0 + (\gamma_{20} + \gamma_{11} - \gamma_{21}(T + 2b))Z_1 + \\ &+ \frac{5}{2}(\beta_2b - \beta_1)(Y_2 - 2Z_2) - \frac{5}{2}\beta_2Y_0Z_1 + 10TZ_2Z_3 + 15(Y_0 - 2Z_1)Z_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned} T &= \frac{a_0}{a_1}, & Y_0 &= \frac{a_{0y}}{a_1} + 4(Sb - R)T + 2Z_1, & Y_1 &= \frac{a_{1y}}{a_1} + 2(Sb - R) - ST, \\ Y_2 &= Y_{0y} + Y_0(Y_1 - R) + (SY_0 + 2\alpha_2)(T + b) - 2\alpha_1 - 2Z_2, \\ Z_1 &= b_y + Q - 2Rb + Sb^2, & Z_2 &= Z_{1y} + (Sb - R)Z_1 + \alpha_2b - \alpha_1, \\ Z_3 &= Z_{2y} + \frac{1}{2}\beta_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения для величин α_i и всех относительных инвариантов $\beta_i, \gamma_{ij}, \delta_{ij}, \varepsilon_{ij}$ семейства уравнений (5), кроме

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{41} &= \delta_{31y} - S(\delta_{30} + 2\delta_{21}) + 3R\delta_{31} - 12\alpha_2\gamma_{21}, \\
\lambda_{20} &= \varepsilon_{10y} - 4R\varepsilon_{10} + Q(3\varepsilon_{20} + \varepsilon_{11}) - 21\alpha_1\delta_{10}, \\
\lambda_{30} &= \varepsilon_{30x} - 2R\varepsilon_{20} + P(\varepsilon_{40} + \varepsilon_{31}) - 12\alpha_1\delta_{20} - \alpha_0(7\delta_{30} + 2\delta_{21}) + 6\beta_2\gamma_{10} + \\
&\quad 2\beta_1(7\gamma_{20} + 2\gamma_{11}), \\
\lambda_{40} &= \varepsilon_{40x} - 3R\varepsilon_{30} + 2Q\varepsilon_{40} + P\varepsilon_{41} - 18\alpha_1\delta_{30} - 3\alpha_0\delta_{31} + 6\beta_2(4\gamma_{20} - \gamma_{11}) + \\
&\quad 18\beta_1\gamma_{21}, \\
\lambda_{50} &= \varepsilon_{40y} - 3S\varepsilon_{30} + 2R\varepsilon_{40} + Q\varepsilon_{41} - 18\alpha_2\delta_{30} - 3\alpha_1\delta_{31} + 36\beta_2\gamma_{21}, \\
\lambda_{11} &= \varepsilon_{11x} - R\varepsilon_{10} - 2Q\varepsilon_{11} + 3P\varepsilon_{21} - 3\alpha_1\delta_{10} - 18\alpha_0\delta_{11} - 36\beta_1\gamma_{10}, \\
\lambda_{21} &= \varepsilon_{11y} - S\varepsilon_{10} - 2R\varepsilon_{11} + 3Q\varepsilon_{21} - 3\alpha_2\delta_{10} - 18\alpha_1\delta_{11} - 18\beta_2\gamma_{10} + \\
&\quad 6\beta_1(\gamma_{20} - 4\gamma_{11}), \\
\lambda_{31} &= \varepsilon_{21y} - S(\varepsilon_{20} + \varepsilon_{11}) + 2Q\varepsilon_{31} - \alpha_2(2\delta_{20} + 7\delta_{11}) - 12\alpha_1\delta_{21} - \\
&\quad 2\beta_2(2\gamma_{20} + 7\gamma_{11}) - 6\beta_1\gamma_{21}, \\
\lambda_{41} &= \varepsilon_{41x} - R(\varepsilon_{40} + 3\varepsilon_{31}) + 4Q\varepsilon_{41} - 21\alpha_1\delta_{31}, \\
\lambda_{51} &= \varepsilon_{41y} - S(\varepsilon_{40} + 3\varepsilon_{31}) + 4R\varepsilon_{41} - 21\alpha_2\delta_{31},
\end{aligned}$$

можно найти в [5]. Дифференцирование (16) по x, y дает два соотношения

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}(\varepsilon_{30} - \varepsilon_{21}) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{31} - \varepsilon_{40})(T + b) + \frac{1}{3}(4\delta_{20} - \delta_{11} - 2(\delta_{21} + 2\delta_{30})b + 3\delta_{31}b^2)Y_1 + \\
&+ \frac{1}{6}(8\delta_{21} - 11\delta_{30} + 3\delta_{31}b)Y_0 + \frac{1}{3}(2\delta_{21} + 4\delta_{30} - 3\delta_{31}(T + 2b))Z_1 - 3\gamma_{21}Y_0Z_1 + \\
&+ (\gamma_{11} - 4\gamma_{20} + 3\gamma_{21}b)Y_2 + (13\gamma_{11} - 7\gamma_{20} - 6\gamma_{21}(T + b))Z_2 + \\
&5(\beta_2b - \beta_1)(9Y_1Z_2 + 2\beta_2) + 5\beta_2(\beta_2T - TZ_3 - \frac{9}{2}Y_0Z_2) + \\
&\quad + 10TZ_3^2 + 60Z_2^2 + 45(2Y_1Z_1 - Y_2)Z_2^2 = 0, \\
&\frac{1}{3}(\varepsilon_{20} - \varepsilon_{11}) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{30})(T + b) + \\
&+ \frac{1}{3}(3\delta_{10} - 2(2\delta_{11} + \delta_{20})b + (4\delta_{21} - \delta_{30})b^2)Y_1 + \\
&+ \frac{1}{6}(7\delta_{11} - 10\delta_{20} + (4\delta_{21} - \delta_{30})b)Y_0 + \\
&+ \frac{1}{3}(4\delta_{11} + 2\delta_{20} + (\delta_{30} - 4\delta_{21})(T + 2b))Z_1 + \\
&+ ((4\gamma_{11} - \gamma_{20})b - 3\gamma_{10})Y_2 + (6\gamma_{10} + (7\gamma_{11} - 13\gamma_{20})(T + b))Z_2 + \\
&(\gamma_{20} - 4\gamma_{11})Y_0Z_1 + 5(\beta_2b - \beta_1)(3TZ_3 + 9(Y_0 - 2Z_1 + bY_1)Z_2 + 2\beta_1) + \\
&+ \frac{5}{2}\beta_2(\beta_1 + \beta_2b)T - 5\beta_2(TbZ_3 + \frac{9}{2}bY_0Z_2 + 3TZ_1Z_2) + 10TbZ_3^2 + \\
&+ 60TZ_1Z_2Z_3 + 60(T + b)Z_2^3 + 45(2bY_1Z_1 - bY_2 + 2Y_0Z_1 - 4Z_1^2)Z_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Дифференцирование (18) по x, y приводит к следующим трем соотношениям

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}(\lambda_{40} - \lambda_{31}) + \frac{1}{3}(\lambda_{41} - \lambda_{50})(T + b) + \frac{1}{3}(5\varepsilon_{30} - 2\varepsilon_{21} - (\varepsilon_{31} + 5\varepsilon_{40})b + 3\varepsilon_{41}b^2)Y_1 + \\
&+ \frac{1}{6}(10\varepsilon_{31} - 13\varepsilon_{40} + 3\varepsilon_{41}b)Y_0 + \frac{1}{3}(\varepsilon_{31} + 5\varepsilon_{40} - 3\varepsilon_{41}(T + 2b))Z_1 + \\
&+ \frac{7}{6}(2\delta_{21} - 5\delta_{30} + 3\delta_{31}b)Y_2 + \frac{7}{3}(7\delta_{21} - 4\delta_{30} - 3\delta_{31}(T + b))Z_2 - \frac{7}{2}\delta_{31}Y_0Z_1 + \\
&+ 7(5\gamma_{11} - 5\gamma_{20} - 3\gamma_{21}T)Z_3 + 21(\gamma_{11} - 4\gamma_{20} + 3\gamma_{21}b)Y_1Z_2 - \frac{63}{2}\gamma_{21}Y_0Z_2 + \\
&+ 35(\beta_2b - \beta_1)Y_1(3Z_3 - \frac{1}{2}\beta_2) + \frac{35}{2}\beta_2(3Y_2Z_2 - Y_0Z_3 - 4Z_1Z_3 - 12Z_2^2 - 6Y_1Z_1Z_2) + \\
&+ \frac{7}{6}\beta_2(9\gamma_{21}(3T + 4b) - 7\gamma_{20} - 17\gamma_{11}) - 14\beta_1\gamma_{21} + \frac{175}{4}\beta_2^2Y_0 + \\
&+ 70(2Z_1 - Y_0)Z_3^2 + 210(Z_2 - Y_2 + 2Y_1Z_1)Z_2Z_3 - 210Y_1Z_2^3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}(\lambda_{30} - \lambda_{21}) + \frac{1}{3}(\lambda_{31} - \lambda_{40})(T + b) + \\
& + \frac{1}{3}(4\varepsilon_{20} - \varepsilon_{11} - 3(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{30})b + (4\varepsilon_{31} - \varepsilon_{40})b^2)Y_1 + \\
& + \frac{1}{6}(9\varepsilon_{21} - 12\varepsilon_{30} + (4\varepsilon_{31} - \varepsilon_{40})b)Y_0 + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{30} + \frac{1}{3}(\varepsilon_{40} - 4\varepsilon_{31}))(T + 2b)Z_1 + \\
& + \frac{1}{6}(\delta_{11} - 4\delta_{20} + (4\delta_{21} - \delta_{30})b)Y_2 + \frac{1}{3}(4\delta_{20} - \delta_{11} + (5\delta_{21} - 8\delta_{30}))(T + b)Z_2 + \\
& + \frac{1}{6}(\delta_{30} - 4\delta_{21})Y_0Z_1 + 7(\gamma_{11}(T + 5b) - \gamma_{20}(4T + 5b))Z_3 + \\
& + 21(\gamma_{11} - 4\gamma_{20} + 3\gamma_{21}b)bY_1Z_2 + \\
& + \frac{21}{2}(2\gamma_{11} - 8\gamma_{20} + 3\gamma_{21}b)Y_0Z_2 + 63(\gamma_{11} + \gamma_{20} - \gamma_{21}(T + 2b))Z_1Z_2 + \\
& + 35(\beta_2b - \beta_1)Y_1(3bZ_3 + 9Z_1Z_2 + \frac{1}{2}\beta_2b - \beta_1) + \frac{35}{4}\beta_2(6\beta_1 - \beta_2b)Y_0 + \\
& + \frac{1}{3}(6\gamma_{21}(T + b) - \gamma_{20} - 11\gamma_{11})\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_2(\gamma_{11}(5T + 17b) + \\
& + \gamma_{20}(10T + 7b) - 12\gamma_{10}) + \\
& + \frac{35}{2}\beta_2(3bY_2Z_2 - 2(T + 2b)(Z_1Z_3 + 3Z_2^2) - bY_0Z_3 - 6bY_1Z_1Z_2 - 9Y_0Z_1Z_2) + \\
& + 70((T + 2b)Z_1 - bY_0)Z_3^2 + 210((T + 2b)Z_2 - bY_2 + 2bY_1Z_1)Z_2Z_3 + \\
& + 210(2Y_0 - 2Z_1 - bY_1)Z_2^3 + 315(2Y_1Z_1 - Y_2)Z_1Z_2^2 = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}(\lambda_{20} - \lambda_{11}) + \frac{1}{3}(\lambda_{21} - \lambda_{30})(T + b) + \\
& + \frac{1}{3}(3\varepsilon_{10} - (5\varepsilon_{11} + \varepsilon_{20})b + (5\varepsilon_{21} - 2\varepsilon_{30})b^2)Y_1 + \\
& + \frac{1}{6}(8\varepsilon_{11} - 11\varepsilon_{20} + (5\varepsilon_{21} - 2\varepsilon_{30})b)Y_0 + \frac{1}{3}(5\varepsilon_{11} + \varepsilon_{20} + (2\varepsilon_{30} - 5\varepsilon_{21}))(T + 2b)Z_1 + \\
& + \frac{1}{6}((5\delta_{11} - 2\delta_{20})b - 3\delta_{10})Y_2 + \frac{1}{3}(3\delta_{10} + (4\delta_{11} - 7\delta_{20}))(T + b)Z_2 + \\
& + \frac{1}{6}(2\delta_{20} - 5\delta_{11})Y_0Z_1 + \\
& + 7(5(\gamma_{11} - \gamma_{20})b(T + b) - 3\gamma_{10}T)Z_3 + \frac{21}{2}((4\gamma_{11} - \gamma_{20})b - 6\gamma_{10})Y_0Z_2 + \\
& + 21((4\gamma_{11} - \gamma_{20})b - 3\gamma_{10})bY_1Z_2 + 21(6\gamma_{10} + \gamma_{11}(T - 3b) - \gamma_{20}(4T + 3b))Z_1Z_2 + \\
& + \frac{35}{2}(\beta_2b - \beta_1)[6b^2Y_1Z_3 + 6TZ_1Z_3 + 18(T + b)Z_2^2 - 9bY_2Z_2 + 18Y_0Z_1Z_2 + \\
& + 36bY_1Z_1Z_2 - \\
& - 36Z_1^2Z_2 + (3\beta_2b - 4\beta_1)bY_1 + (4\beta_1 - \beta_2(T + 4b))Z_1] + \\
& + \frac{35}{2}\beta_2[3b^2Y_2Z_2 - 4b(T + b)(Z_1Z_3 + 3Z_2^2) - b^2Y_0Z_3 - 6b^2Y_1Z_1Z_2 - \\
& - 9bY_0Z_1Z_2 - 6TZ_1^2Z_2] + \\
& + \frac{14}{3}\beta_1(2(4\gamma_{20} - \gamma_{11})(T + b) - 9\gamma_{10}) + \frac{7}{2}\beta_2(\gamma_{10}(T + 4b) + 5(\gamma_{11} - \gamma_{20})b(T + b)) + \\
& + \frac{35}{4}(8\beta_1^2 - 4\beta_1\beta_2b + \beta_2^2b^2)Y_0 + 210((T + b)bZ_2 - b^2Y_2 + 2b^2Y_1Z_1 + 2TZ_1^2)Z_2Z_3 + \\
& + 70(2(T + b)Z_1 - bY_0)bZ_3^2 + 105(2(4T + 5b)Z_1 - 2b^2Y_1 - bY_0)Z_2^3 + \\
& + 630(2bY_1Z_1 - bY_2 + Y_0Z_1 - 2Z_1^2)Z_1Z_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Их дифференцирование по x , y дает еще четыре соотношения. Исключение величин b и (17) из этих 10 соотношений дает два условия совместности системы (14), зависящих только от относительных инвариантов семейства ОДУ (5) и не содержащих a_0 , a_1 , a_2 , b и их производных. Их дифференцирование по x , y позволяет получить еще три условия совместности системы (14). С другой стороны, дифференцирование получаемых из (16) последних четырех соотношений на величины b и (17) приводит к пяти соотношениям, исключение из которых величин b и (17) дает еще пять условий совместности системы (14), не содержащих a_0 , a_1 , a_2 , b . При этом три из них будут дифференциальными следствиями предыдущих двух условий. Поэтому из пяти последних соотношений на величины b и (17) достаточно рассматривать два. Критерий существования у ОДУ (5) интеграла (13) формулируется как условие совместности системы (16), (18), (19) и еще шести уравнений, алгебраических относительно 8 величин b и (17).

Заметим, что величины Z_1 , Z_2 , Z_3 зависят только от функции b и ее производных, а T , Y_0 , Y_1 , Y_2 входят в (16), (18), (19) линейно.

3. РАЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ (7) ВТОРОЙ СТЕПЕНИ. Условия существования интеграла (7) при $n = 2$ проще получить, представив его в виде

$$F = a_2(x, y) + \frac{a_1(x, y) + a_0(x, y)}{y' + b_1(x, y) + b_0(x, y)} + \frac{a_1(x, y) - a_0(x, y)}{y' + b_1(x, y) - b_0(x, y)}, \quad a_0, b_0 \neq 0. \quad (20)$$

Для того чтобы функция (20) была интегралом ОДУ (5), должна быть совместна переопределенная система уравнений

$$\begin{aligned} a_{2y} &= 2Sa_1, & b_{1x} &= b_0b_{0y} + b_1b_{1y} - P + 3Qb_1 - 3R(b_0^2 + b_1^2) + Sb_1(3b_0^2 + b_1^2), \\ a_{2x} &= 6Ra_1 - 4S(a_0b_0 + a_1b_1) - 2a_{1y}, \\ b_{0x} &= (b_0b_1)_y + 3b_0(Q - 2Rb_1 + Sb_1^2) + Sb_0^3, \\ a_{1x} &= (a_0b_0 + a_1b_1)_y + 3a_1(Q - 2Rb_1 + S(b_0^2 + b_1^2)) + 6a_0b_0(Sb_1 - R), \\ a_{0x} &= (a_0b_1 + a_1b_0)_y + 3a_0(Q - 2Rb_1 + S(b_0^2 + b_1^2)) + 6a_1b_0(Sb_1 - R). \end{aligned} \quad (21)$$

четырежды дифференцируя (21) по x, y , можно выразить все производные функций a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 пятого порядка и часть производных второго, третьего и четвертого порядка в терминах $a_j, b_j, a_{jy}, b_{jy}, a_{0yy}, b_{jyy}, b_{jyyy}, b_{0yyyy}$, $j = 0, 1$. Приравнивание смешанных производных шестого порядка приводит к соотношению

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{20}) + \frac{2}{3}(\varepsilon_{30} - \varepsilon_{21})(b_1 - Tb_0) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{31} - \varepsilon_{40})(b_0^2 + b_1^2 - 2Tb_0b_1) + \\ &+ (-\delta_{10} + (\delta_{11} + 2\delta_{20})b_1 + (2\delta_{21} + \delta_{30} - \delta_{31}b_1)(b_0^2 - b_1^2))Y_1 + \\ &+ \frac{2}{3}(2\delta_{21} - 5\delta_{30})b_0(b_0Y_1 + X_1) + \\ &+ \frac{1}{3}(7\delta_{11} - 10\delta_{20} + 2(5\delta_{30} - 2\delta_{21})b_1 + 3\delta_{31}(b_0^2 - b_1^2))(b_0Y_0 + TX_1) + \\ &+ 2\delta_{31}b_0(b_1 - Tb_0)X_1 + \\ &+ \frac{1}{3}(14\delta_{20} - 17\delta_{11} + 2(10\delta_{21} - 7\delta_{30})(b_1 - Tb_0) + 3\delta_{31}(2Tb_0b_1 - b_0^2 - b_1^2))Z_1 + \\ &+ 6(\gamma_{10} - (\gamma_{20} + \gamma_{11})b_1 + \gamma_{21}(b_1^2 - b_0^2))(2Y_1Z_1 - 2Y_0X_1 - b_0Y_2 - Z_2 - TX_2) + \\ &+ 6(\gamma_{20} + \gamma_{11} + 2\gamma_{21}(Tb_0 - b_1))(Z_1^2 - X_1^2 - b_0X_2 - Tb_0Z_2) + \\ &+ 12\gamma_{21}(T^2 - 1)b_0^2Z_2 + \\ &+ 20(\gamma_{11} - \gamma_{20})((T - 1/T)b_0Z_2 + b_0(Y_1X_1 - Y_0Z_1) + Z_1^2 - TX_1Z_1) + \\ &+ 30(\beta_1 - \beta_2b_1)[b_0(Y_2Z_1 - X_3 - TZ_3) + Y_1(2b_0Z_2/T - b_0X_2 - Z_1^2 - X_1^2) + \\ &\quad + Y_0(2X_1Z_1 - 3b_0Z_2) + Z_1(Z_2 + TX_2) - 3X_1(X_2 + TZ_2)] + \\ &+ 30\beta_2[b_0^2(Y_2X_1 + Y_1Z_2) + b_0X_1(Z_2 - 2Y_1Z_1) + Tb_0(X_1X_2 - Z_1Z_2) + \\ &+ b_0Y_0(Z_1^2 + X_1^2) + b_0(Z_1 - b_0Y_0)(X_2 + 2Z_2/T) + (TX_1 - Z_1)(Z_1^2 - X_1^2)] + \\ &+ 10\beta_2b_0^2(Z_3 + TX_3) + 10(\beta_1 - \beta_2b_1)^2 + \frac{5}{2}\beta_2b_0(\beta_2(b_0 + Tb_1) - \beta_1T) - \\ &- 240b_0^2Y_2Z_2^2/T + 40(T - 1/T)b_0Z_2(b_0X_4 + 4X_1X_3 + 3Z_2^2 + 3X_2^2) + \\ &+ \frac{80}{3}b_0^2(X_3^2 + 2TX_3Z_3 + Z_3^2) + 160b_0(Y_1 - Y_0/T)Z_2(b_0Z_3 + 3X_1Z_2) + \\ &+ 160b_0(Y_0 - Y_1/T)Z_2(b_0X_3 + 3X_1X_2) + \\ &+ 160b_0X_1(X_2X_3 + Z_2Z_3 + T(X_2Z_3 + Z_2X_3)) + \\ &+ 240X_1^2(X_2^2 + 2TX_2Z_2 + Z_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{a_0}{a_1}, \quad Y_0 = \frac{a_{0y}}{a_1} - 2RT + 2S(b_0 + b_1T), \quad Y_1 = \frac{a_{1y}}{a_1} - 2R + 2S(b_1 + b_0T), \\
 Y_2 &= Y_{0y} + (Y_1 + R - Sb_1)Y_0 + S(b_0(Y_1 - 2TY_0) + X_1 + TZ_1) + \alpha_2T, \\
 Z_1 &= b_{1y} + Q - 2Rb_1 + S(b_0^2 + b_1^2), \\
 Z_2 &= Z_{1y} + (Sb_1 - R)Z_1 + Sb_0X_1 + \alpha_2b_1 - \alpha_1, \\
 Z_3 &= Z_{2y} + \frac{1}{4}\beta_2, \quad X_1 = b_{0y} + 2b_0(Sb_1 - R), \\
 X_2 &= X_{1y} + (Sb_1 - R)X_1 + Sb_0Z_1 + \alpha_2b_0, \\
 X_3 &= X_{2y}, \\
 X_4 &= X_{3y} + (R - Sb_1)X_3 - S(b_0Z_3 + 3X_1Z_2 + 3Z_1X_2 + \frac{3}{4}\beta_2b_0) - 3\alpha_2X_2.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Для получения всех независимых условий совместности системы (21) необходимо пятикратное дифференцирование равенства (22) по x, y . Причем при последнем дифференцировании из шести получаемых соотношений достаточно оставить в рассмотрении три. Критерий существования у ОДУ (5) интеграла (20) формулируется как условие совместности системы 18 алгебраических уравнений относительно 13 величин b_0, b_1 и (23).

[1] А.В. Болсинов, В.С. Матвеев, А.Т. Фоменко, *Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия*, Матем. сборник, **189**:10 (1998), 6–32.

[2] V.V. Kozlov, *On rational integrals of geodesic flows*, Regul. Chaotic Dynamics, **19**:6 (2014), 601–606.

[3] R. Bryant, M. Dunajski, M. Eastwood, *Metrisability of two-dimensional projective structures*, J. Diff. Geometry, **83** (2009), 465–499.

[4] В. Kruglikov, *Invariant characterization of Liouville metrics and polynomial integrals*, J. Geom. Physics, **58** (2008), 979–995.

[5] Yu.Yu. Bagderina, *Invariants of a family of scalar second-order ODEs for Lie symmetries and first integrals*, J. Phys. A: Math. Theoretical, **49**:15 (2016), 155202.

[6] M.V. Pavlov, S.P. Tsarev, *On local description of two-dimensional geodesic flows with a polynomial first integral*, J. Phys. A: Math. Theoretical, **49**:17 (2016), 175201.

О представлении решений задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Ковалевской в ζ и φ -функциях Вейерштрасса

А.В. Беляев (Новосибирск)

Кроме частных периодических решений Бобылева – Стеклова и Делоне в случае Ковалевской есть и другие частные периодические решения, которые не обнаруживаются как очевидные вырождения общего решения. Их наличие становится явным благодаря исследованию асимптотик особых точек решений.

Такие решения образуют четырехпараметрическое семейство, зависящее от значений первых интегралов: энергии, момента, тривиального интеграла и интеграла Ковалевской. В настоящем анонсе мы предъявляем двухпараметрическое семейство таких решений.

Теорема. Пусть $\zeta(t)$, $\wp(t) = -\zeta'(t)$ — функции Вейерштрасса, $a, b \in \mathbb{R}$.

Обозначим функции $\zeta(t - a - ib)$, $\zeta(t - a + ib)$, $\zeta(t + a - ib)$, $\zeta(t + a + ib)$, соответственно, ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_4 и, аналогично, функции, противоположные их производным, $\wp(t - a - ib)$, $\wp(t - a + ib)$, $\wp(t + a - ib)$, $\wp(t + a + ib)$ — \wp_1 , \wp_2 , \wp_3 , \wp_4 .

Существует периодическое решение, рационально выражающееся с помощью ζ и \wp -функций Вейерштрасса:

$$\begin{cases} p_1 = \alpha (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4 + 2 \zeta(2a)) + \frac{2(\alpha^2 - 1) \xi}{\alpha}, \\ p_3 = 2i (\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4 + 2 \zeta(2ib)), \\ p_2 = 2 \frac{\dot{p}_1}{p_3}, \\ \gamma_1 = p_1^2 - p_2^2 - \mathcal{K}_1, \\ \gamma_2 = 2p_1 p_2 - \mathcal{K}_2, \\ \gamma_3 = p_1 p_2 + 2\dot{p}_2, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\mathcal{K}_1 = 2(\alpha^2 - 1) \left(\wp_1 + \wp_2 + \wp_3 + \wp_4 + \frac{2\xi p_1}{\alpha} - 2\wp(2ib) - 2\wp(2a - 2ib) - \frac{4\xi^2}{\alpha^2} \right),$$

$$\mathcal{K}_2 = (1 - \alpha^2)(\dot{p}_3 + 4\xi i (\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4)), \quad \xi = \zeta(2a - 2ib) - \zeta(2a) + \zeta(2ib).$$

Представление (1) является \mathbb{R} -двухпараметрическим: свободными параметрами являются g_2, g_3 , задающие \wp -функцию

$$(\wp'(z))^2 = 4 \wp(z)^3 - g_2 \wp(z) - g_3$$

вместе с параллелограммом периодов. Параметры α, a, b определяются условиями:

$$\begin{aligned} \wp'(2ib) = 0, \quad \zeta(2ib) - \zeta(a + ib) + \zeta(a - ib) = 0, \\ \alpha^2 = \frac{\zeta(2a) + \zeta(2ib) + \wp(2a - 2ib)}{\wp(2a - 2ib) - \zeta(2ib)}. \end{aligned}$$

[1] С.В. Ковалевская, *Научные труды*, Изд-во АН СССР, Москва, 1948.

[2] Ю.А. Архангельский, *Аналитическая динамика твердого тела*, Наука, Москва, 1977.

[3] A.V. Belyaev, *On the full list of finite-valued solutions of the Euler-Poisson equations having four first integrals*, Math. Nachrichten, **285**:10 (2012), 1199–1229.

Analytic connections on Riemann surfaces

Y. V. Brezhnev (Tomsk)

We give a differentially closed description of the uniformizing representation to the analytical apparatus on Riemann surfaces. Apart from well-known automorphic functions and Abelian differentials it involves construction of the connection objects. We show, in an example of the hyperelliptic curves, how can the connection be explicitly constructed. We study also a relation between classical/traditional ‘linearly differential’ viewpoint (principal Fuchsian equation) and uniformizing representation of the theory.

Universal formal groups whose exponentials are elliptic functions of level n

E. Yu. Bunkova (Moscow)

**On discrete structures in phase portraits
of some non-linear dynamical systems⁸**

A.A. Akinshin, V.P. Golubyatnikov, M.V. Kazantsev

We consider one class of multidimensional non-linear dynamical systems as models of functioning of some gene networks. Cycles of these systems describe important oscillatory biological processes.

We construct discrete structures (structure graphs) in phase portraits of these systems and show some connections of these graphs with geometry of phase portraits. Detection of possible locations of the cycles is one of the main aims of our studies, and here the main question is: Let two dynamical systems in the considered class have the same structure graph, how different can they be?

Oscillatory processes are very important in gene networks analysis: they control circadian rhythms and play a crucial role in natural biological clock.

Functioning of gene networks can be described by kinetic dynamical systems, and we consider here the case when their right-hand sides are smooth. Sometimes, we can obtain useful information on structures of their phase portraits from their discretization: if we divide them to subareas with unambiguous transitions from part to part, we can imitates the original system, and detect areas where periodic trajectories can appear. Such approach was successfully used in analysis of some biological models, see [2–4].

We apply this approach to non-linear dynamical systems of the type

$$\dot{x}_1 \equiv \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_n) - x_1, \quad \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_{i-1}) - x_i. \quad (1)$$

Here $i = 2, 3, \dots, n$, $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$, and all $f_j \geq 0$ are smooth monotonic functions. Denote monotonically increasing functions f_j as f_+ , and monotonically decreasing functions f_j as f_- ; they correspond to positive, respectively, negative feedbacks in gene networks. Typical examples used in (bio)chemical kinetics are $f_+(x) = ax^\gamma/(1+x^\gamma)$ and $f_-(x) = a/(1+x^\gamma)$.

We define the **profile** S of the system (1) as a binary vector:

$$S_i = 0, \text{ if } f_i \text{ is } f_-, \quad S_i = 1, \text{ if } f_i \text{ is } f_+, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

The **parity** $p(S)$ of the system (1) is defined as $p(S) = \sum_1^n S_i \pmod{2}$.

The system (1) has at least one equilibrium point \tilde{x} . Let Θ be its invariant neighborhood. Actually, detection of such neighborhoods is a difficult task, but in some particular cases they can be easily constructed.

We decompose Θ by 2^n disjoint domains by n hyperplanes containing the equilibrium point \tilde{x} and parallel to the coordinate hyperplanes. We also use the word **domain** to denote binary vector v :

$$v_i = 0, \quad \text{if } x_i^* \leq \tilde{x}_i; \quad v_i = 1, \quad \text{if } x_i^* > \tilde{x}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

where $x^* \in \Theta$. Two domains u and v are incident by the i -th coordinate $((u, v) \in A_i(G)$ and $u_i \neq v_i$) if they differ only in the i -th coordinate. Each pair of incident domains has a common face. Similar constructions in other situations were realized in [1–4].

Lemma 1. *For any pair of domains u and v that are incident by the i -th coordinate, the vector field on the common face of u and v is oriented in one direction along the i -th coordinate axis.*

⁸Supported by RFBR, grant 15-01-00745.

We define an oriented graph G as follows: its vertices correspond to domains of Θ , and an edge exits from a domain u to v if they are incident and the vector field of (1) is directed from u to v . We use the notations:

- (1) All vertices that have both, incoming and outgoing edges are called **transit vertices**. Let $V(G)$ be the set of all vertices of G , $T(G)$ be the set of its transit vertices, and $A(G) = \bigcup_1^n A_i(G)$.
- (2) $E_i(G)$ is a subset of edges of G parallel to the i -th coordinate axis. Let $E(G) = \bigcup_1^n E_i(G)$, then $E_i(G) = A_i(G) \cap E(G)$.
- (3) The **valency** $P(u)$ of a domain u is the number of outgoing edges from corresponding vertex. The **valency level** $V_i(G)$ is the set of all domains: $u \in V_i(G)$, and $P(u) = i$. A valency level that contains transit domains only is called **transit valency level**.
- (4) A **subsequence** of a vector u is a vector consisting of some of the components of u . If vector v is a subsequence of u , we say that u **contains** v and denote this as $v \subset u$.

There is a direct connection between cyclic trajectories of the system (1) and loops in G : if a cyclic trajectory passes through domains v_1, v_2, \dots, v_k , there is also a loop consisting of corresponding vertices in the graph G .

Lemma 2. *For any system (1), vertices of a loop in G belong to the same valency level. Valencies of all domains have the same parity.*

Consider now the system (1) where all f_i are the f_- functions. Let Q_v be a domain of such a system that satisfies following conditions:

1. $(0) \subset v$ and $(1) \subset v$;
2. $(00) \subset v$ or $(11) \subset v$.

Thus, all domains which have valency greater than zero and less than n satisfy both conditions. We call them **transit domains**, and the valency levels that contain them are called **transit levels**. We show that all transit valency levels (and only these levels) contain loops in such graphs.

Proposition 1. *In a system with negative feedbacks, each transit domain contains at least one of subsequences (001) or (110). For any transit domain, there is always an edge to another transit domain on the same valency level. Each transit valency level contains a loop.*

Now, let S be a profile of a system (1) and $I(S, i)$ is defined as follows: $I(S, i)_j = S_j + 1 \pmod{2}$ if $j = (i - 1)$ or $j = i$; and $I(S, i)_j = S_j$ otherwise. This operator inverts the $(i - 1)$ -th and the i -th elements of each profile and preserves the parity of the system.

Theorem 1. *Domain graphs of systems of the type (1) with profile vectors S and $I(S, i)$ are isomorphic for any i .*

Corollary 1. *The graphs of two such systems with the same parity are isomorphic.*

[1] N.B. Ayupova, V.P. Golubyatnikov, *On two classes of non-linear dynamical systems. The four-dimensional case*, Siberian Math. J., **56**:2 (2015), 231–236.

[2] T. Gedeon, *Cyclic feedback systems*, Memoirs of AMS, **134**:637 (1998), 72.

[3] L. Glass, J.S. Pasternack, *Stable oscillations in mathematical models of biological control systems*, Journal of Math. Biology, **6** (1978), 207–223.

[4] S. Hastings, J.J. Tyson, D. Webster, *Existence of periodic solutions for negative feedbacks cellular control systems*, Journal of Diff. Equations, **25** (1977), 39–64.

**Векторное расслоение абелевых дифференциалов
над пространствами Тейхмюллера поверхностей с проколами**

В.В. Чуешев, А.А. Казанцева (Кемерово)

Теория функций на компактных римановых поверхностях существенно отличается от теории функций на конечных римановых поверхностях даже для класса абелевых (однозначных) дифференциалов. Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ для $\pi_1(F)$, а F_0 — компактная риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F . Зафиксируем различные точки $P_1, \dots, P_n \in F$. Пусть $F' = F \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ — поверхность типа (g, n) , $n \geq 1$, $g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $F'_0 = U/\Gamma'$. Любая другая комплексно-аналитическая структура на F' задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F'_0 , т. е. выражением вида $\mu(z)d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F'_0 , где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F'_0 . Эту структуру на F' будем обозначать через F'_μ . q -дифференциалом относительно фуксовой группы Γ' называется дифференциал $\omega(z)dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \omega(z)$, $z \in U, T \in \Gamma'$. Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \dots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, k$.

Обозначим через $\Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \dots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \dots Q_s}; F_\mu)$ при $q > 1$ пространство q -дифференциалов на F_μ , кратных дивизору $\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \dots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \dots Q_s}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_l \geq 2, s \geq 1, 0 \leq l \leq s$ и точки Q_1, \dots, Q_s попарно различны, а через $\Omega^q(1; F_\mu)$ — подпространство голоморфных q -дифференциалов на F_μ .

Рассмотрим наборы q -дифференциалов:

$$\tau_{q, Q_1}^{(1)}, \tau_{q, Q_1}^{(2)}, \dots, \tau_{q, Q_1}^{(\alpha_1)}, \dots, \tau_{q, Q_l}^{(1)}, \tau_{q, Q_l}^{(2)}, \dots, \tau_{q, Q_l}^{(\alpha_l)}, \tau_{q, Q_{l+1}}, \dots, \tau_{q, Q_s}, \quad (1)$$

или

$$\tau_{q, Q_1}^{(1)}, \tau_{q, Q_1}^{(2)}, \dots, \tau_{q, Q_1}^{(\alpha_1)}, \dots, \tau_{q, Q_l}^{(1)}, \tau_{q, Q_l}^{(2)}, \dots, \tau_{q, Q_l}^{(\alpha_l)}, \tau_{q, Q_{l+1}}, \dots, \tau_{q, Q_s}, \quad (2)$$

при $l \geq 1, q > 1$;

$$\tau_{q, Q_1}^{(1)}, \tau_{q, Q_2}, \dots, \tau_{q, Q_s}, \quad (3)$$

или

$$\tau_{q, Q_1}^{(1)}, \dots, \tau_{q, Q_s}^{(1)}, \quad (4)$$

при $l = 0, q > 1$.

Теорема 1. Векторное расслоение $E = \bigcup_{[\mu]} \Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \dots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \dots Q_s}; F_\mu) / \Omega^q(1; F_\mu)$

будет голоморфным векторным расслоением ранга $\alpha_1 + \dots + \alpha_l + s - l$ над \mathbb{T}_g , где $g \geq 2, \alpha_1, \dots, \alpha_l \geq 2, s \geq 1, 0 \leq l \leq s, q > 1$ и точки Q_1, \dots, Q_s попарно различны. При этом классы смежности q -дифференциалов из наборов (1), (2), (3), (4) дают базис локально голоморфных сечений этого расслоения над \mathbb{T}_g .

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E' = \cup \frac{\Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \dots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \dots Q_s}; F'_\mu) \cap M_1}{\Omega^q(1, F'_\mu) \cap M_1} & \rightarrow & \cup \frac{\Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \dots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \dots Q_s}; F_\mu)}{\Omega^q(1, F_\mu)} = E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{g,n} & \rightarrow & \mathbb{T}_g. \end{array} \quad (5)$$

Теорема 2. *Диаграмма (5) является коммутативной диаграммой из голоморфных векторных расслоений, у которых соответствующие слои изоморфны, и голоморфных $n!$ -листных отображений над базами из пространств Тейхмюллера.*

[1] В.В. Чушев, Э.Х. Якубов, *Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности*, Сиб. мат. ж., **43**:6 (2002), 1408–1429.

[2] М.И. Тулина, В.В. Чушев, *Дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности*, Мат. заметки, **95**:3 (2014), 459–476.

Complexity in a kinetic model of heterogeneous catalytic reaction with an hierarchy of characteristic times

G.A. Chumakov (Novosibirsk)

Under study is a system of three nonlinear ordinary differential equations with fast, intermediate, and slow variables that models the dynamics of the heterogeneous catalytic reaction of hydrogen oxidation. The system accounts for the influence of the catalyst surface state on the properties and, in particular, on the activity of the catalyst. We shown this model to have a wide spectrum of the complexity phenomena.

We present some results of studying different types of the multi-peak oscillations and the chaotic behavior in the dynamical system with a hierarchy of characteristic times and illustrate that the influence of adsorbed species on the rate of catalytic reaction may lead to multi-peak oscillations and even to chaotic behavior under isothermal conditions. Such a situation occurs, for example, when the surface heterogeneity of the catalytic sites causes the activation energy of some reaction stage (or stages) to change with the surface coverage by one of the intermediate substances. Numerical simulations are used to demonstrate different types of the multipeak oscillations and chaos in the kinetic model of hydrogen oxidation on nickel catalyst.

Under study is also the behavior of the global error of numerical integration in the two-variable mathematical model of a heterogeneous catalytic reaction [1]. Numerical estimation of the global error indicates that there is a high sensitive dependence of the solutions on initial conditions due to the existence of a tunnel-type bundle of trajectories which is formed by the stable and unstable canards. We show that the exponential growth of the norm of the fundamental matrix of solutions of the system linearized around a stable canard-cycle yields exponential growth of the leading term in the global error of numerical solution.

Moreover, we provide some numerical analysis of the chaotic behavior within an attractor in terms of a Poincare map. For this purpose, we study a bifurcation of an invariant torus since it is of great interest to clarify the scenario of transition from periodic behavior corresponding to a stable cycle on the torus to the regime of chaotic multi-peak oscillations [2]. Note that, before the break-down of the invariant torus for some value of the control parameter (i.e., the bifurcation of the invariant torus occurs), the torus should lose its smoothness.

Finally in this paper, we study a scheme that allows us to generate homoclinic chaos in the three-dimensional system. In this case, for the generation of chaotic dynamics we use the Feigenbaum period-doubling scenario.

[1] Chumakov G.A., Lashina E.A., Chumakova N.A. *On estimation of the global error of numerical solution on canard-cycles*, Mathematics and Computers in Simulation, **116** (2015), 59–74.

[2] Chumakov G.A., Lashina E.A., Chumakova N.A. *Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables*, Chem. Eng. Journal, **282** (2015), 11–19.

On minimal ideal triangulations of cusped hyperbolic manifolds

E.A. Fominykh (Chelyabinsk)

Grassmann extensions of Yang-Baxter maps related to NLS type equations

S. Konstantinou-Rizos (Grozny)

In this talk, we present some novel endomorphisms between Grassmann extensions of algebraic varieties which possess the Yang-Baxter property. In particular, we consider the cases of the nonlinear Schroedinger (NLS) equation and the derivative NLS equation, and we make use of their associated Darboux transformations to construct ten-dimensional maps which can be restricted to eight-dimensional Yang-Baxter maps on invariant leaves. These results constitute the first attempt to extend the theory of Yang-Baxter maps in the case of Grassmann algebras.

Subcomplex and subkahler structures⁹

E.S. Kornev (Kemerovo)

A subcomplex structure is a generalization of the almost complex structure associated with a symplectic form on any manifold of arbitrary (even or odd) dimension. A subcomplex structure on manifold M is a triple (Ω, D, Φ) , where Ω is a degenerated exterior 2-form with radical R , D is a some fixed distribution of tangent subspaces transversal to radical R , and Φ is an tangent spaces endomorphisms field so that $\Phi|_R = 0$, $\Phi^2|_D = -id$, $\Phi^*\Omega|_D = \Omega|_D$. The distribution D always has even dimension for any dimension of manifold M . When Ω is fundamental 2-form for some Riemannian Metric g associated by Φ , a quadruple (Ω, D, Φ, g) is a Subtwistor Structure on M . When D is the totally nonholonomic distribution, a subtwistor structure induces a subriemannian structure on M . When D is the holonomic distribution and Ω is a closed 2-form, a subtwistor structure induces a Kähler structure on some submanifold $Q \subset M : D|_Q = TQ$. In this case, a subtwistor structure (Ω, D, Φ, g) is called a Subkähler structure on M . We provide some results and examples for subtwistor and subkähler structures. In particular, the examples of manifolds that admit or does not admit these structures.

⁹The work was supported by President RF Grant in support of Leading Scientific Schools, NSh-9740.2016.1.

Nonformal moment-angle manifolds of 2-truncated cubes¹⁰

I.Yu. Limonchenko (Moscow)

A space X is rationally formal if its Sullivan-de Rham algebra (A, d) of PL forms with coefficients in \mathbb{Q} is formal in CDGA, i.e., there exists a chain of quasi-isomorphisms between (A, d) and its cohomology algebra $(H^*(A), 0)$. Examples of such spaces include spheres, H-spaces, symmetric spaces, compact connected Lie groups and their classifying spaces, compact Kähler manifolds (Deligne, Griffiths, Morgan, Sullivan). Moreover, formality is preserved by wedges, direct products and connected sums for manifolds. It is well known that a nontrivial higher order Massey operation in cohomology is an obstruction to formality of a topological space. Based on the works of Buchstaber and Panov (see [2]) describing algebraic and topological properties of moment-angle manifolds and complexes, Baskakov [1] found a class of triangulated spheres K s.t. their moment-angle manifolds \mathcal{Z}_K are not formal, having a nontrivial triple Massey product of 3-dimensional cohomology classes. Denham and Suciu [3] proved a combinatorial criterion for a simplicial complex K to provide the situation as above.

We shall introduce a family of n -dimensional flag nestohedra P starting with a simple 3-polytope dual to the Baskakov 2-sphere, s.t. there is a nontrivial n -fold Massey product in cohomology of the moment-angle manifold \mathcal{Z}_P for any $n \geq 3$, see [4]. By Buchstaber and Volodin theorem any flag nestohedron can be realized as a 2-truncated cube (a consecutive cut of only codimension 2 faces starting with a cube); we shall present our family of flag nestohedra as 2-truncated n -cubes for $n \geq 3$.

[1] I.V. Baskakov, *Massey triple products in the cohomology of moment-angle complexes*, Russian Math. Surveys, **58**:5 (2003), 1039–1041.

[2] V.M. Buchstaber, T.E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, (2015).

[3] G. Denham, A. Suciu, *Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products*, Pure and Applied Mathematics Quarterly (Robert MacPherson special issue, part 3), **3**:1 (2007), 25–60.

[4] I.Yu. Limonchenko, *Moment-angle manifolds, 2-truncated cubes and Massey operations*, <http://arxiv.org/abs/1510.07778>, (2015).

Функционально инвариантные решения системы Максвелла¹¹

М.В. Нецадим (Новосибирск)

В работе строятся решения системы Максвелла, которые можно представить в виде конечного функционального ряда от производных произвольной функции с функциональным аргументом (фазой) и функциональными коэффициентами (амплитудами). В таком виде, развиваемый здесь подход, можно рассматривать как поиск обобщенных функционально инвариантных решений [1] системы Максвелла. С другой стороны, это аналог лучевого метода применительно к системе уравнений Максвелла. Классическое применение лучевого метода [2,3] заключается в том, что лучевой ряд является решением системы

¹⁰The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 14-11-00414).

¹¹Работа поддержана РФФИ, грант 14-01-00014.

Максвелла асимптотически. В настоящей работе предполагается, что лучевой ряд конечный и является точным решением.

Наиболее полно обобщенные функционально инвариантные решения (ОФИР) исследованы для волнового уравнения (см. литературу в [4]). (В литературе используется также термин — относительно неискажающиеся волны [5].) Так в работах [6–8] были детально изучены комплексные функционально инвариантные решения (ФИР) и, как оказалось, эти решения имеют обширные применения в задачах распространения колебаний (акустических, электромагнитных), связанных с волновым уравнением, а также и в более сложных задачах распространения упругих колебаний. Отметим, что ФИР волнового уравнения использовались для построения точных решений системы Максвелла в работах [9–11].

Построенные в данной работе решения системы Максвелла содержат функциональный произвол, что позволяет определять параметры системы Максвелла (диэлектрическую и магнитную проницаемости). Это направление продолжает исследования [12, 13], связанные с конструктивным подходом к решению обратных задач. Кроме того, использование средств группового анализа дифференциальных уравнений [14, 15] позволяет из уже найденных решений строить новые решения системы Максвелла с, вообще говоря, уже тензорными параметрами [16].

Также отметим задачу, поставленную Р. Курантом: найти все линейные гиперболические уравнения второго порядка, для которых существуют семейства решений относительно неискажающихся волн. В двумерном случае найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, при которых существуют ОФИР. В больших размерностях известны только отдельные классы таких уравнений, а в общем случае эта задача остается нерешенной. Результаты данной работы показывают, что система Максвелла имеет ОФИР. Отметим, что в работах [17, 18] построены классы уравнений и систем второго порядка с переменными коэффициентами, допускающие ОФИР и получены некоторые применения данных результатов к обратным задачам.

Приведем формулировки основных результатов.

Система уравнений Максвелла [19] имеет вид:

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J, \quad (1)$$

где $E = (E_1, E_2, E_3)(\bar{x}, t)$, $H = (H_1, H_2, H_3)(\bar{x}, t)$ — вектора электрической и магнитной напряженности, $\rho = \rho(\bar{x}, t)$ — плотность зарядов, $J = (J_1, J_2, J_3)(\bar{x}, t)$ — ток проводимости, $\varepsilon = \varepsilon(\bar{x})$, $\mu = \mu(\bar{x})$ — диэлектрические функции, зависящие от переменных $\bar{x} = (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, D — область вещественного евклидова пространства \mathbb{R}^3 . Для обозначения стандартных скалярного и векторного произведений векторов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 используются обозначения \langle, \rangle , $[\cdot, \cdot]$. Через $f^{(s)}(\zeta)$ обозначается производная порядка s от функции $f(\zeta)$ одного аргумента ζ .

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если выполнена система уравнений

$$\frac{\varepsilon}{c} A_k + [\nabla \tau, B_k] = \operatorname{rot} B_{k-1} - C_{k-1},$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu}{c}B_k + [\nabla\tau, A_k] &= \text{rot} A_{k-1}, \\
\text{rot} B_m &= C_m, \quad \text{rot} A_m = 0, \\
\langle \nabla\tau, \mu B_k \rangle &= \text{div}(\mu B_{k-1}), \\
\langle \nabla\tau, \varepsilon A_k \rangle &= \text{div}(\varepsilon A_{k-1}) - \rho_{k-1}, \\
\text{div}(\mu B_m) &= 0, \quad \text{div}(\varepsilon A_m) = \rho_m, \\
A_{-1} = B_{-1} = C_{-1} &= 0, \quad \rho_{-1} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

для вектор функций $A_k(\bar{x})$, $B_k(\bar{x})$, $C_k(\bar{x})$ и скалярных функций $\rho_k(\bar{x})$, $k = 0, \dots, m$, то для произвольной функции $f(\zeta)$ одного аргумента ζ следующие функции

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{k=0}^m A_k(\bar{x})f^{(m-k)}(t - \tau(\bar{x})), & H &= \sum_{k=0}^m B_k(\bar{x})f^{(m-k)}(t - \tau(\bar{x})), \\
\frac{4\pi}{c}J &= \sum_{k=0}^m C_k(\bar{x})f^{(m-k)}(t - \tau(\bar{x})), & 4\pi\rho &= \sum_{k=0}^m \rho_k(\bar{x})f^{(m-k)}(t - \tau(\bar{x})),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $|\nabla\tau|^2 = (\varepsilon\mu)/c^2$, удовлетворяют системе уравнений (1).

Таким образом, формулы (3) дают точное решение системы (1), при условии выполнения (2). Общее решение системы (2) дается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $\tau(\bar{x})$, $\varphi(\bar{x})$ — произвольные функции, $A_0(\bar{x})$ — произвольная вектор функция ортогональная τ :

$$\langle A_0, \nabla\tau \rangle = 0,$$

$A_1(\bar{x}), \dots, A_{m-1}(\bar{x})$ — произвольные вектор функции. Тогда вектор функции $A_m(\bar{x})$, $B_k(\bar{x})$, $C_k(\bar{x})$ и функции $\rho_k(\bar{x})$, $k = 0, \dots, m$, определенные формулами

$$\begin{aligned}
A_m &= \nabla\varphi, \\
B_k &= \frac{c}{\mu}([\nabla\tau, A_k] - \text{rot} A_{k-1}), \\
C_k &= \text{rot} \left(\frac{c}{\mu}([\nabla\tau, A_k] - \text{rot} A_{k-1}) \right) + \frac{c}{\mu}[\nabla\tau, \text{rot} A_k] - \frac{c}{\mu} \langle \nabla\tau, A_{k+1} \rangle \nabla\tau, \\
\rho_k &= \text{div}(\varepsilon A_k) - \langle \nabla\tau, \varepsilon A_{k+1} \rangle,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $A_k = 0$ при $k > m$ или $k < 0$, удовлетворяют системе уравнений (2).

[1] Н.П. Еругин, М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений*, Дифф. уравнения, **17**:5 (1981), 853–865.

[2] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, Москва, 1972.

[3] В.М. Бабич, *Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения. Дифференциальные уравнения с частными производными – 5*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНТИ, М., **34** (1988), 93–134.

[4] М.В. Нецадим, *Классы обобщенных функционально инвариантных решений волнового уравнения. I*, Сибирские электронные математические известия, **10** (2013), 418–435.

[5] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964.

- [6] В.И. Смирнов, С.Л. Соболев, *Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний*, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, **20** (1932), 37.
- [7] В.И. Смирнов, С.Л. Соболев, *О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии*, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, **29** (1933), 43–51.
- [8] С.Л. Соболев, *Функционально-инвариантные решения волнового уравнения*, Труды физ.-мат. инст. им. Стеклова В.А., **5** (1934), 259–264.
- [9] М.С. Шнеерсон, *Уравнения Максвелла и функционально-инвариантные решения волнового уравнения*, Дифф. уравнения, **4:4** (1968), 743–758.
- [10] Н.Т. Стельмашук, *Построение функционально-инвариантных решений системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте*, Вестник АН БССР. Сер. физ.-мат. науки, **4** (1974), 35–39.
- [11] М.В. Нецадим, *Решения системы Максвелла с нулевыми инвариантами*, Вестник Новосибирского государственного университета Серия математика, механика, информатика, **6:3** (2006), 59–61.
- [12] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нецадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I*, Сибирский журнал индустриальной математики, **14:1** (2011), 27–39.
- [13] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нецадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II*, Сибирский журнал индустриальной математики, **14:2** (2011), 28–33.
- [14] Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1978.
- [15] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, Москва, 1989.
- [16] M.V. Neshchadim, *Equivalent transformations and some exact solutions to the system of Maxwell's equations*, Selcuk J. Appl. Math., **3:2** (2002), 99–108.
- [17] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нецадим, *Представления для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка*, Сибирский журнал индустриальной математики, **15:4** (2012), 17–23.
- [18] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нецадим, *Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений*, Сибирский журнал индустриальной математики, **16:2** (2013), 40–49.
- [19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, М., 1988.

Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов¹²

Г.Д. Соломадин (Москва)

В 1958 году на пленарном докладе математического конгресса в Эдинбурге Ф. Хирцебрухом [1] была поставлена задача: какие условия нужно наложить на набор целых чисел, чтобы существовало неприводимое комплексное алгебраическое многообразие, для которого этот набор представляет собой набор чисел Чженя? В начале 60 годов Милнором (аддитивная структура) и Новиковым (мультипликативная структура) (см. [2]) было вычислено кольцо комплексных кобордизмов: $\Omega_*^U \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$, $\deg(a_i) = 2i$. Также из их результатов следует,

¹²Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант №14-11-00414).

что наборы чисел Чженя двух комплексных многообразий M_1^n, M_2^n совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие классы комплексных кобордизмов равны в $\Omega_*^U : [M_1^n] = [M_2^n]$. Вариант проблемы Хирцебруха в классе стабильно комплексных многообразий решили Стонг и Хаттори (см. [2]). Данный результат дает описание всех наборов чисел Чженя, реализуемых стабильно комплексными многообразиями. Таким образом, вопрос Хирцебруха сводится к описанию всех элементов кольца Ω_*^U комплексных кобордизмов, обладающих представителями — неособыми алгебраическими многообразиями:

Задача 1. *Описать все классы комплексных кобордизмов, имеющие представителем неприводимое комплексное алгебраическое многообразие.*

Решение данной задачи без условия неприводимости имеет классическое решение в терминах гиперповерхностей Милнора. Требование неприводимости алгебраического многообразия оказалось принципиально важным. Так, в вещественной размерности 4 эта задача оказалась тесно связана с глубокими вопросами алгебраической геометрии и в общем виде до сих пор не решена.

В рамках задачи 1 стоял важный частный случай: нахождение представителей специальных элементов — полиномиальных образующих кольца $\Omega_*^U \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$, $\deg(a_i) = 2i$, в классе гладких комплексных неприводимых алгебраических многообразий. Данная задача была положительно решена в [3]. Дальнейшее развитие исследований привело к постановке аналогичной задачи в классе *квазиторических* (в смысле Дэвиса-Янушкевича) многообразий, и ее решению [4]. Конструкция *бриллиантовой суммы* для представителя суммы классов кобордизма квазиторических многообразий $[M_1] + [M_2]$, была предъявлена в [5]. Ее применение к построенным в [4] представителям полиномиальных порождающих кольца Ω_*^U позволило найти квазиторического представителя в любом классе комплексных кобордизмов (см. [5]). Однако квазиторические многообразия не являются, вообще говоря, алгебраическими; данное требование выделяет класс торических многообразий. Это приводит к задаче:

Задача 2. *Построить гладкие проективные (алгебраические) торические многообразия в каждой (комплексной) размерности n , являющиеся полиномиальными порождающими кольца Ω_*^U .*

Согласно теореме Милнора-Новикова, задача 2 эквивалентна нахождению многообразий в данном классе со специальными значениями старшего числа Чженя (числа Милнора). Задача вычисления последнего является сложной. Вильфонг [6] достиг существенного продвижения в решении задачи 2: им были построены торические многообразия, являющиеся полиномиальными порождающими кольца кольца Ω_*^U в (комплексных) размерностях n вида $n = p^s - 1$, где p простое, а также нечетных n . Конструкция Вильфонга [6] основывалась на раздутиях некоторых проективных расслоений (обобщенных башен Ботта высоты 2) в неподвижных точках и инвариантных рациональных кривых.

В докладе будет представлен совместный результат докладчика и Ю. Устиновского [7]: полное решение задачи 2. Наш метод состоит в использовании семейства эквивариантных модификаций (бirationальных изоморфизмов) торического многообразия X комплексной размерности n ($n \geq 2$). Каждая из данных модификаций является результатом последовательного раздутия \tilde{X} многообразия X в произвольной неподвижной точке $x_0 \in X$, и раздутия полученного многообразия $\tilde{\tilde{X}}$ вдоль инвариантного проективного подпространства

исключительного дивизора раздутия в точке: $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^{n-1} \cong E \subset \tilde{X}$. Изменение числа Милнора при любой из описанных модификаций определяется лишь числами n и k , в частности не зависит от самого многообразия X . Данные модификации позволяют строить торические многообразия с нужными значениями числа Милнора в размерностях, не покрываемых результатами Вильфонга [6]. Отметим, что наш подход [7] и подход Вильфонга [6] дополняют друг друга.

-
- [1] *Международный математический конгресс в Эдинбурге (1958г.) (обзорные доклады)*, Физматгиз, Москва, (1962).
 [2] Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, Москва, 1973.
 [3] В. Johnston, *The values of the Milnor genus on smooth projective connected complex varieties*, *Topology and its Applications*, **138**:1–3 (2004), 189–206.
 [4] В.М. Бухштабер, Н. Рэй, *Торические многообразия и комплексные кобордизмы*, УМН, **53**:2 (1998), 139–140.
 [5] V.M. Buchstaber, T.E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.
 [6] A. Wilfong, *Toric Polynomial Generators of Complex Cobordism*, <http://arxiv.org/abs/1308.2010>, (2013).
 [7] Y. Ustinovskiy, G. Solomadin, *Projective toric generators in the unitary cobordism ring*, <http://arxiv.org/abs/1602.02448>, (2016).

**Изоморфизмы самоподобных множеств,
не удовлетворяющих условию WSP¹³**
А.В. Тетенев (Новосибирск; Горно-Алтайск)

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ – система сжимающих подобий в \mathbb{R}^n , а G – порожденная этой системой полугруппа. Непустое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется аттрактором системы \mathcal{S} , если $K = S_1(K) \cup \dots \cup S_m(K)$. Такое множество K существует и однозначно задается системой \mathcal{S} . Говорят также, что система \mathcal{S} задает самоподобную структуру (K, \mathcal{S}) на множестве K .

Рассмотрим множество $\mathcal{F} = \{g^{-1} \cdot f, f, g \in G\}$, которое называется ассоциированным семейством подобий для системы \mathcal{S} [1]. Говорят, что система \mathcal{S} удовлетворяет слабому условию отделимости (WSP), если Id является изолированной точкой в \mathcal{F} [4].

Это условие является ключевым при характеристизации самоподобных множеств с положительной мерой Хаусдорфа:

Если система \mathcal{S} удовлетворяет условию (WSP), то её аттрактор K имеет положительную хаусдорфову меру $H^s(K)$ в размерности $s = \dim_H(K)$ [1,4].

Однако, нарушение условия WSP дает ряд следствий, важных с точки зрения геометрической структуры самоподобных множеств:

1. Если аттрактор K системы $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ является жордановой дугой, а система \mathcal{S} не удовлетворяет условию WSP, то K есть отрезок прямой [2].

2. Более того, такие одномерные самоподобные структуры, не удовлетворяющие WSP, не допускают никаких деформаций и могут быть сопряжены только посредством линейных отображений:

¹³Работа поддержана РФФИ, грант 16-01-00414.

Пусть системы $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ и $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ системы сжимающих подобий с аттракторами $K_{\mathcal{S}}$ и $K_{\mathcal{T}}$. Непрерывное отображение $\varphi : K_{\mathcal{S}} \rightarrow K_{\mathcal{T}}$ задает морфизм самоподобных структур $(K_{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$ и $(K_{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$, если для любого $x \in K_{\mathcal{S}}$ и для любого $i = 1, \dots, m$ выполняется равенство $\varphi(x) \cdot S_i(x) = T_i \cdot \varphi(x)$. Как было доказано автором в 2006 г., если система \mathcal{S} , не удовлетворяющая условию WSP, задает самоподобную структуру на отрезке $K_{\mathcal{S}} = [0, 1]$, то всякий морфизм этой структуры задается линейным отображением $\varphi : [0, 1] \rightarrow K_{\mathcal{T}}$, где $K_{\mathcal{T}}$ – отрезок прямой [3].

Эти два свойства, связанные с жесткостью одномерных самоподобных структур на континуумах, приводят к постановке следующей задачи:

Проблема. При каких значениях $\alpha = \dim_H K_{\mathcal{S}}$ и каких дополнительных геометрических условиях всякий морфизм $\varphi : K_{\mathcal{S}} \rightarrow K_{\mathcal{T}}$ самоподобной структуры $(K_{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$ задается линейным отображением?

Следующее утверждение даёт частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Существует бесконечное семейство Σ попарно изоморфных самоподобных структур $(K_{pq}, \mathcal{S}_{pq})$, где $\{0, 1\} \subset K_{pq} \subset [0, 1]$, для которых*

(i) $\dim_H K_{pq} < 1/2$;

(ii) $\frac{\ln p}{\ln q} \notin \mathbb{Q}$, и поэтому \mathcal{S}_{pq} не удовлетворяет условию WSP;

(iii) Если $(p, q) \neq (p', q')$, то гомеоморфизм $\varphi : K_{pq} \rightarrow K_{p'q'}$ не продолжается до гомеоморфизма отрезка $[0, 1]$ на себя.

Отметим несколько важных подробностей, связанных как с доказательством теоремы, так и с замечательными свойствами полученного семейства Σ :

Каждая из систем отображений \mathcal{S}_{pq} состоит из отображений $S_1(x) = px$, $S_2(x) = qx$, $S_3(x) = px + 1 - p$, $S_4(x) = qx + 1 - q$, удовлетворяющих соотношениям $S_1S_2 = S_2S_1$ и $S_3S_4 = S_4S_3$.

Для любого $p \in (0, 1/2)$ существует бесконечно много таких $q > 0$, что $\sqrt{p} + \sqrt{q} < 1/2$ (что влечет выполнение условия (i)) и для любых $m, n \in \mathbb{N}$,

$$S_1^m(S_3(K_{pq}) \cup S_4(K_{pq})) \cap S_2^n(S_3(K_{pq}) \cup S_4(K_{pq})) = \emptyset,$$

что дает выполнение условия (ii).

Хотя при любых m и n , $S_1^m(K_{pq}) \cap S_2^n(K_{pq}) = S_1^m S_2^n(K_{pq})$, множество K_{pq} является дисконтинуумом.

При этом, для каждого из множеств K_{pq} при $t \rightarrow +\infty$ существуют топологические пределы $\lim_{t \rightarrow +\infty} tK_{pq} = [0, +\infty)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tK_{pq} - t + 1 = (-\infty, 1]$. Аналогичные пределы существуют для каждой из точек $S_{i_1 \dots i_n}(0)$ и $S_{i_1 \dots i_n}(1)$.

[1] C. Bandt, S. Graf, *Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure*, Proc. Amer. Math. Soc., **114**:4 (1992), 995–1001.

[2] А.В. Тетенов, *Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий*, Сиб. матем. журнал, **47**:5 (2006), 1147–1153.

[3] А.В. Тетенов, *On the rigidity of one-dimensional systems of contraction similitudes*, Сибирские электронные мат. известия, **3** (2006), 342–345.

[4] M.P.W. Zerner, *Weak separation properties for self-similar sets*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**:11 (1996), 3529–3539.

POSTER SESSION

On integrability of the magnetic geodesic flows on a 2-torus¹⁴*S.V. Agapov (Novosibirsk)*

There are two types of metrics on a 2-torus with an integrable geodesic flow. If a metric is of the kind $ds^2 = \Lambda(\alpha x + \beta y)(dx^2 + dy^2)$ or $ds^2 = (\Lambda_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \Lambda_2(\alpha_2 x + \beta_2 y))(dx^2 + dy^2)$, then there is an additional first integral which is polynomial in momenta of the first or of the second degree. It is not known if there are metrics with irreducible polynomial first integrals of higher degree. This question was studied in [1] – [4].

Existence of an additional first integral for the metric $ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ leads to existence of smooth periodic solutions of a quasi-linear PDEs of the following kind

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0 \quad (1)$$

on the metric and coefficients of the first integral. This system turned out to be semi-hamiltonian, i.e. in the hyperbolic region it possesses Riemann's invariants and can be presented in the form of conservation laws. For any semi-hamiltonian system there is a diagonal metric naturally associated with this system. In [5] it's proved that this metric is the one of Egorov type.

In this work the magnetic geodesic flow on a 2-torus is considered. We fix an energy level and assume that there is an additional first integral which is polynomial in momenta. The corresponding quasi-linear PDEs is a semi-hamiltonian system (see [5]). In [5] it is also proved that if there is an integral of the second or of the third degree, then this metric is the one of Egorov type. In this work we generalize this result to the case of the first integral of an arbitrary degree.

[1] M.V. Pavlov, S.P. Tsarev, *On Local Description of Two-Dimensional Geodesic Flows with a Polynomial First Integral*, <http://arxiv.org/abs/1509.03084v1> (2015).

[2] V.V. Kozlov, *Polynomial integrals of geodesic flows on a two-dimensional torus*, Math. USSR Sbornik, **83**:2 (1995), 469–481.

[3] V.V. Kozlov, D.V. Treshchev, *On the integrability of Hamiltonian systems with toral position space*, Math. USSR Sbornik, **63**:1 (1989), 121–139.

[4] V.N. Kolokoltsov, *Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities*, Math. USSR-Izvestiya, **21**:2 (1983), 291–306.

[5] M. Bialy, A.E. Mironov, *New semi-hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces*, Central European Journal of Mathematics, **10**:5 (2012), 1596–1604.

Теорема об общем положении для пар фрактальных кривых¹⁵*К.Г. Камалутдинов (Новосибирск)*

Пусть имеется семейство $S = \{\gamma_1(x), \gamma_2(x) : x \in X\}$ пар кривых, параметризованное $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Каково множество тех параметров $x \in X$, при которых кривые $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ не пересекаются? Следующая теорема об общем положении для пар фрактальных кривых позволяет выделить достаточное условие

¹⁴This work was supported by RFBR, grant 14-11-00441.

¹⁵Работа поддержана РФФИ, грант 16-31-00138.

для того, чтобы кривые $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ не пересекались в общем положении (т. е. при почти всех $x \in X$).

Теорема 1. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Пусть функции $\varphi(x, t), \psi(x, t): X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — α -гильдеровы по $t \in I = [0, 1]$, а функция $f(x, u) = \varphi(x, t) - \psi(x, s)$, где $u = (t, s) \in U = I^2$, удовлетворяет условию $|x_1 - x_2| \leq L |f(x_1, u) - f(x_2, u)|^\beta$ при любых $x_1, x_2 \in X, u \in U$. Тогда множество $X_1 = \{x \in X \mid \varphi(x, I) \cap \psi(x, I) \neq \emptyset\}$ имеет хаусдорфову размерность $\dim X_1 \leq \frac{2}{\alpha\beta}$.

Как видно из теоремы 1, при $\frac{2}{\alpha\beta} < \dim X$ кривые $\varphi(x, I)$ и $\psi(x, I)$ в общем положении не пересекаются. Таким образом, эта теорема позволяет решить вопрос — можно ли с помощью малой деформации пары фрактальных кривых избавиться от их взаимопересечения.

Для самоподобных кривых, являющихся аттракторами систем сжимающих подобий [1], параметр x может играть как роль преобразования пространства \mathbb{R}^n , так и роль внутренней деформации, меняющей параметры сжимающих отображений.

Размерностью подобия системы $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений называется решение s уравнения Морана: $\sum_{i=1}^m (\text{Lip } S_i)^s = 1$. Можно показать, что наибольший возможный показатель Гельдера для структурных параметризаций самоподобной кривой [2] равен $\frac{1}{s}$, где s — ее размерность подобия.

Поэтому, в частном случае, когда: кривые самоподобны, одна из них неподвижна, а другая подвергается параллельным переносам — они не пересекаются в общем положении, если их размерности подобия меньше $\frac{n}{2}$. То же самое верно для самоподобных кривых при $n = 3$, одна из которых подвергается гомотетии и повороту, а другая неподвижна.

Теорема об общем положении может быть использована также для оценки размерности множества тех параметров $x \in X$, при которых некоторая самоподобная кривая $\gamma(x)$ имеет самопересечения, в случае если соседние подкопии кривой пересекаются не более чем по одной точке.

Например, пусть параметр x задает параллельный перенос одной из подкопий кривой γ , соседние к которой подвергаются поворотам, необходимым для сохранения связности. Тогда кривая будет жордановой в общем положении, если ее размерность подобия меньше $\frac{n}{2}$, а коэффициенты подобия меньше $\frac{1}{3}$.

[1] M.F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.

[2] В.В. Асеев, А.В. Тегенов, А.С. Кравченко, *О самоподобных жордановых кривых на плоскости*, Сиб. матем. журнал, 44:3 (2003), 481–492.

On the spectrum of the one-dimensional curvature operator of non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian 4-manifolds ¹⁶

O.P. Khromova (Barnaul)

¹⁶The work was supported by RFBR, grants 16-01-00336, 16-31-00048.

The eigenvalues of the Ricci curvature operator of locally homogeneous 3-manifolds were investigated in [1, 2]. Similar results for 4-dimensional non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian manifolds were obtained in [3].

One-dimensional curvature operator is defined by

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n-2} \left(Ric - \frac{s}{2(n-1)} Id \right),$$

where Ric , Id , and s denote respectively the Ricci operator, the identity operator, and the scalar curvature of n -dimensional Riemannian manifolds.

The spectrum of the one-dimensional curvature operator of 3-dimensional metric Lie groups studied in [4, 5]. In this paper we investigate the spectrum of the one-dimensional curvature operator of non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian 4-manifolds.

[1] O. Kowalski, S. Nikčević, *On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemannian 3-manifolds*, *Geom. Dedicata*, **1** (1996), 65–72.

[2] G. Calvaruso, O. Kowalski, *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds*, *Central Eur. J. Math.*, **1:7** (2009), 124–139.

[3] G. Calvaruso, *On geometry of four-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds*, VII International Meeting on Lorentzian Geometry, São Paulo (2013).

[4] D.S. Voronov, O.P. Gladunova, *The Signature of the One Dimensional Curvature Operator on Three Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Riemannian Metric*, *Izvestia of ASU*, **65:1** (2010), 24–28.

[5] P.N. Klepikov, S.V. Klepikova, O.P. Khromova, *On the Spectrum of One-Dimensional Curvature Operators on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentzian Metrics*, to appear in *Izvestia of ASU*, (2016).

On the prescribed values of the spectrum of sectional curvature operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds¹⁷

S. V. Klepikova (Barnaul)

Let (M, g) is n -dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifold, R is the Riemannian curvature tensor of the metric g .

The Riemann curvature tensor R at any point $X \in M$ can be associated with the sectional curvature operator $\mathcal{R}: \Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2 M$, defined by equation

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the induced scalar product in the space $\Lambda_x^2 M$, defined by the rule $\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j))$.

The problem of establishing connections between the topology and the curvature of (pseudo)Riemannian manifold is one of the important problems of (pseudo)Riemannian geometry. One of possible variants is to investigate the spectrum of different curvature operators. The spectrum of the Ricci curvature operator of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups was studied by J. Milnor. In particular, he found the possible signature of spectrum of the Ricci operator in the case of three-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric [1]. O. Kowalski,

¹⁷The work was supported by RFBR (grants: №16-01-00336A, №16-31-00048_{мол.а}), Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the base part of the state tasks in the field of scientific activity "Altai State University"(Project Code: 1148)

S. Nikcevic solved the problem of the prescribed values of the spectrum of Ricci operator on three-dimensional metric Lie groups and for the three-dimensional locally homogeneous Riemannian spaces [2]. Further, similar results for the sectional curvature operator were obtained by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, O.P. Khromova [3, 4].

The case of locally homogeneous Lorentzian manifolds was investigated by G. Calvaruso and O. Kowalski [5]. In particular, they proved, that three-dimensional connected, simply connected, complete locally homogeneous Lorentzian manifold is either

- (1) isometric to a three-dimensional Lie group equipped with a left-invariant Lorentzian metric, or
- (2) a Lorentzian space form \mathbb{R}_1^3 , \mathbb{S}_1^3 or \mathbb{H}_1^3 , or
- (3) a direct product $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}_1^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ or $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, or
- (4) a space which admit local coordinates (t, x, y) such that, with respect to the local frame field $\{(\frac{\partial}{\partial t}), (\frac{\partial}{\partial x}), (\frac{\partial}{\partial y})\}$, the Lorentzian metric g is given by

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(x, y) \end{pmatrix},$$

where $\varepsilon = \pm 1$ and $f(x, y) = x^2\alpha + x\beta(y) + \xi(y)$, for any constant $\alpha \in \mathbb{R}$ and any functions β, ξ .

In this paper we study the problem of the prescribed values of the sectional curvature operator \mathcal{R} on three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds with the help of the above classification.

[1] J. Milnor, *Curvature of left invariant metric on Lie groups*, Advances in mathematics, **21** (1976), 293–329.

[2] O. Kowalski, S. Nikcevic, *On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds*, Geom. Dedicata, **1** (1996), 65–72.

[3] Yu.G. Nikonorov, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, *Geometry of locally homogeneous Riemannian manifolds*, The modern mathematic and its application. Geometry, **37** (2006), 1–78.

[4] O.P. Gladunova, D.N. Oskorbin, *An Application of Symbolic Computation Packages to the Investigation of the Curvature Operator Spectrum on the Metric Lie Groups*, The News of ASU, **77:1** (2013), 19–23.

[5] G. Calvaruso, O. Kowalski, *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds*, Cent. Eur. J. Math., **7:1** (2009), 124–139.

О неевклидовой версии теоремы Штейнера¹⁸

Е.С. Кудина (Горно-Алтайск)

В одном из пространств постоянной кривизны \mathbb{E}^3 , \mathbb{H}^3 , \mathbb{S}^3 рассмотрим тетраэдр с длинами сторон a, b, c при одной из вершин и длинами a_1, b_1, c_1 противоположащих ребер. Согласно классической формуле Сервуа [1, с. 99] объем евклидова тетраэдра выражается как: $V = \frac{1}{6}aa_1\delta\sin\varphi$, где δ и φ — соответственно расстояние и угол между данными ребрами. Непосредственным следствием этого равенства является теорема Штейнера: объем тетраэдра не изменяется,

¹⁸Работа поддержана РФФИ, грант 16-31-50009.

если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.

В неевклидовой геометрии аналог формулы Сервуа получен в работе [2]:

$$\tilde{V} = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} a_1 \operatorname{sh} \delta \sin \varphi.$$

Здесь псевдообъем гиперболического тетраэдра определяется матрицей Грама данного тетраэдра

$$\tilde{V} = \sqrt{-\det G}.$$

Следствием этого равенства является теорема Штейнера для гиперболического тетраэдра: псевдообъем гиперболического тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.

Аналогичный результат имеет место и в сферическом пространстве.

Для обычных объемов в гиперболическом и сферическом пространствах данная теорема не верна. Существуют соответствующие контрпримеры.

[1] Я.П. Понарин, *Элементарная геометрия: в 2 т.*, – Т.2: Стереометрия, преобразования пространства, МЦНМО, Москва, 2006.

[2] B.D.S. McConnell, *Hedronometric formulas for a hyperbolic tetrahedron*, <http://daylateanddollarshort.com/mathdocs/Hedronometric-Formulas-for-a-Hyperbolic-Tetrahedron.pdf>

On commuting difference operators of rank one

G.S. Mauleshova (Novosibirsk)

We consider one-point commuting difference operators of rank one. Coefficients of these operators depend on a functional parameter, shift operators being included only with positive degrees. We study these operators in a case of hyperelliptic spectral curve when the marked point coincides with the branch point. We construct examples of operators with polynomial and trigonometric coefficients. Moreover, difference operators with polynomial coefficients can be embedded in the differential ones with polynomial coefficients. This construction provides a new way of constructing commutative subalgebras in the first Weyl algebra.

Krichever – Novikov’s operators with polynomial coefficients

B.T. Saparbayeva (Novosibirsk)

A generic form of pairs of rank two commuting ordinary differential operators of orders 4 and 6 operators on the elliptic spectral curve was found by I.M. Krichever and S.P. Novikov [1]. P.G. Grinevich [2] found conditions when Krichever–Novikov operators have rational coefficients. We show that for any elliptic spectral curve there exists non-self-adjoint operators of orders 4 and 6 with polynomial coefficients.

Theorem 1. *For arbitrary spectral curve Γ defined by the equation*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

arbitrary $(z_0, w_0) \in \Gamma, w_0 \neq 0$ and arbitrary integer $n \geq 1$ there are polynomials

$$R = \delta_{2n+2} x^{2n+2} + \dots + \delta_0, \quad P = \beta_n x^n + \dots + \beta_0,$$

with $\delta_{2n+2} \neq 0$, $\beta_n \neq 0$, such that the operator

$$L_4 = (\partial_x^2 + R)^2 + (4w_0P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0P_x) - 16F(z_0)P^2 + 4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0$$

commutes with an operator L_6 of order 6 with polynomial coefficients, and the spectral curve of L_4, L_6 is Γ .

[1] I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations*, Russian Mathematical Surveys, **35**:6 (1980), 47–68.

[2] P.G. Grinevich, *Rational solutions for the equation of commutation of differential operators*, Functional Analysis and Its Applications, **16**:1 (1982), 15–19.

Об евклидовой структуре на узле восьмерка с мостом¹⁹

Д.Ю. Соколова (Новосибирск)

Цель настоящей работы — изучение евклидовых структур на узлах и зацеплениях. В 1975 году Р. Райли [1] обнаружил примеры гиперболических структур на некоторых узлах и дополнениях зацеплений в трехмерной сфере. Позднее, весной 1977, У. П. Терстон представил теорему существования для римановой метрики постоянной отрицательной кривизны на трехмерных многообразиях. На практике оказалось, что дополнения простых узлов, исключая торические и сателлитные, допускают гиперболическую структуру. Отметим следующий известный результат: евклидова структура на узле «восьмерка» 4_1 возникает, когда его конический угол α равен $\frac{2\pi}{3}$. Этот результат был получен Терстоном [2]. Явная конструкция фундаментального множества для конического многообразия $4_1(\alpha)$ в \mathbb{E}^3 была предложена в работе А. Д. Медных и А. А. Рассказова [3]. Это фундаментальное множество представляет собой невыпуклый двадцатигранник, вершины которого задаются целочисленными координатами. Вопрос существования евклидовой структуры на зацеплении Уайтхеда изучен в работе Р. Н. Шматкова [4]. В работе автора [5] было исследовано строение фундаментального многогранника для узла «трилистник» с мостом и даны условия существования евклидовой структуры соответствующего конического многообразия. В данной работе мы исследуем основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел «восьмерка» с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Мы установим условия существования такого объекта и вычислим его объем.

[1] R. Riley, *An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structure*, Topology of low-dimension manifolds, Springer, Berlin Heidelberg, (1979), 99–133.

[2] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifold. Lecture Notes*, Princeton University, 1980.

[3] A. Mednykh, A. Rasskazov, *Volumes and degeneration of cone-structures on the figure-eight knot*, Tokyo J. Math., **29**:2 (2006), 445–464 .

[4] R.N. Shmatkov, *Properties of Euclidean Whitehead link cone-manifolds*, Sib. Adv. Mathematics, **13**:1 (2003), 55–86.

¹⁹Работа поддержана РФФИ (грант №16-31-00138)

- [5] Д.Ю. Соколова, *О существовании евклидовой структуры на узле трилистник с мостом*, Мат. заметки ЯГУ, **20**:1 (2013), 128–140.

IVAN ALEKSEEVICH DYNNIKOV
STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE,
UL. GUBKINA, 8,
119991, MOSCOW, RUSSIA
E-mail address: `dynnikov@mech.math.msu.su`

ANDREY EVGENYEVICH MIRONOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: `mironov@math.nsc.ru`

ISKANDER ASANOVICH TAIMANOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: `taimanov@math.nsc.ru`

ANDREY YURIEVICH VESNIN
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: `vesnin@math.nsc.ru`