

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 1–15 (2016)
DOI 10.17377/semi.2016.13.001

УДК 515.162.32
MSC 57M27

МНОГООБРАЗИЯ КУБИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ 2

Ф.Г. КОРАБЛЕВ, А.А. КАЗАКОВ

ABSTRACT. We give the complete list of all orientable closed 3-manifolds which can be obtained by gluing faces of one or two cubes. For each listed manifold we give a cubic diagram of its minimal cubulation.

Keywords: cubulation, manifold, classification, complexity.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Один из естественных способов задания трёхмерных многообразий состоит в попарной склейке граней нескольких полиэдров. *Кубилиацией* многообразия называется представление этого многообразия в виде результата склейки граней нескольких кубов. Число кубов в кубилиации называется *сложностью* этой кубилиации. *Кубической сложностью* многообразия называется минимальное число кубов, из которых можно склеить это многообразие. Другими словами, трёхмерное многообразие имеет *кубическую сложность* s , если его можно получить склейкой граней s кубов и нельзя получить склейкой граней меньшего числа кубов.

Понятие кубической сложности многообразий очень похоже на понятие сложности, предложенное С. Матвеевым (см. [1]). Его теория специальных спайнов тесно связана с разбиением многообразий на тетраэдры. Мы вместо разбиений на тетраэдры рассматриваем их разбиения на кубы. В работе [2] доказаны некоторые взаимосвязи между сложностью С. Матвеева и кубической сложностью. В работе [3] рассматривается *поверхностная сложность* трёхмерных многообразий, которая близка к кубической сложности. Фактически поверхностная и кубическая сложности совпадают для всех многообразий, кроме сферы S^3 ,

KORABLEV, Ph.G., KAZAKOV, A.A., MANIFOLDS OF CUBIC COMPLEXITY TWO.

© 2016 КОРАБЛЁВ Ф.Г., КАЗАКОВ А.А.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности №1.1260.2014/К.

Поступила 12 декабря 2015 г., опубликована 27 января 2016 г.

проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ и линзового пространства $L_{4,1}$. Поверхностная сложность каждого из этих трёх многообразий равна 0, а кубическая сложность равна 1.

Каждое трёхмерное многообразие можно получить склейкой граней подходящего числа кубов. Это следует из того, что каждое трёхмерное многообразие триангулируемо и каждый тетраэдр разбивается на четыре куба (рис. 1). Здесь под кубом мы понимаем трёхмерный полиэдр, комбинаторная структура вершин, рёбер и граней которого изоморфна комбинаторной структуре стандартного куба.

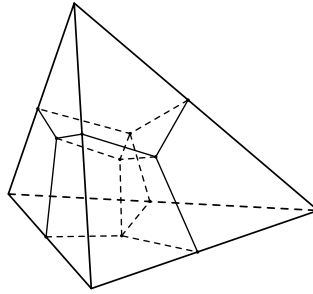


Рис. 1. Разбиение тетраэдра на четыре куба.

В настоящей работе представлен полный список замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 1 и 2. Недавно Дж. Амэндола получил полный список замкнутых неприводимых трёхмерных многообразий кубической сложности 1 (см. [4]). Наш список более полон, так как содержит не только неприводимые многообразия кубической сложности 1, а все многообразия кубической сложности 1 и 2.

Основной результат работы состоит в следующем:

Теорема 1. *Существует ровно 18 замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 1 и ровно 109 замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 2.*

Полный список многообразий кубической сложности 1 представлен в таблице 1. Полный список многообразий кубической сложности 2 представлен в таблице 2.

2. КУБИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ

В этом разделе мы опишем способ задания трёхмерных многообразий кубическими диаграммами. Каждая *кубическая диаграмма* является меченым планарным регулярным графом степени 4, который мы будем называть *базисным графом* диаграммы. Необходимо, чтобы этот граф был вложен в двумерную сферу, все его вершины были разбиты на пары, и в окрестности каждой вершины было помечено одно полурёбро графа, причём поставленные метки должны совпадать у полурёбер, инцидентных парным вершинам, и различаться у полурёбер, инцидентных вершинам из разных пар. Пример кубической диаграммы изображён на рисунке 2 справа. Удобно помечать каждое полурёбро графа толстой дугой и заглавной буквой, например, A, B, C, \dots

Каждая кубическая диаграмма задаёт замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие (возможно с коническими особенностями). Пусть D — кубическая диаграмма, вложенная в двумерную сферу S . Можно считать, что эта сфера ограничивает трёхмерный шар \mathcal{B} . Пусть $G \subset S$ — медиальный граф графа D . Тогда G разбивает сферу S на квадраты. Склеим эти квадраты на крае шара \mathcal{B} так, чтобы одинаковые метки графа D отождествлялись. Эти склейки определены однозначно. В результате получим замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие (возможно с коническими особенностями).

Пример. Кубическая диаграмма, изображённая на рисунке 2 справа, задаёт трёхмерное многообразие, получающееся в результате следующей склейки граней одного куба с вершинами $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned} (2, 3, 0, 1) &- (2, 3, 4, 5) \\ (4, 5, 6, 7) &- (7, 0, 1, 6) \\ (2, 1, 6, 5) &- (4, 3, 0, 7) \end{aligned}$$

На рисунке 2 слева изображён куб, одномерный остов которого является медиальным графом кубической диаграммы, изображённой на рисунке 2 справа. Грани этого куба склеиваются так, чтобы одинаковые метки кубической диаграммы отождествлялись.

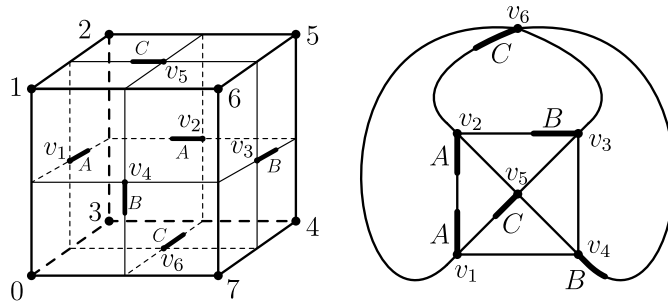


Рис. 2. Меченый граф (справа) является кубической диаграммой многообразия, которое получается следующим образом: грани куба (слева), склеиваются так, чтобы одинаковые метки отождествлялись.

Каждая кубилизация трёхмерного многообразия задаёт кубическую диаграмму этого многообразия (не единственным образом). Пусть $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ — кубы, и пусть трёхмерное многообразие M получается попарной склейкой их граней. Выполним частичную склейку граней кубов $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ так, чтобы в результате получился трёхмерный шар. Край этого шара является двумерной сферой, разбитой на квадраты (не склеенные грани кубов). Кубическая диаграмма многообразия M получается расстановкой меток на полурёбрах медиального графа одномерного остова этого разбиения так, чтобы при склейке граней кубов $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ одинаковые метки отождествлялись.

3. ТАБУЛИРОВАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ КУБИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ 1 И 2

Этот раздел посвящён построению полного списка замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 1 и 2.

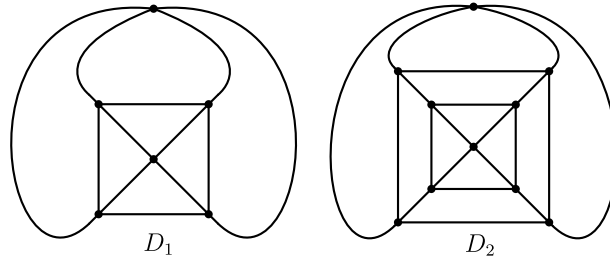


Рис. 3. Два типа планарных регулярных графов степени 4.

Отметим, что все кубические диаграммы, задаваемые кубилизациями сложности 1, имеют один и тот же базисный граф, который мы обозначим D_1 . Также все кубические диаграммы, задаваемые кубилизациями сложности 2, имеют один и тот же базисный граф, который мы обозначим D_2 (рис. 3). Процедура табулирования всех многообразий кубической сложности 1 и 2 осуществлялась за три шага:

- Шаг 1. Перечислялись все возможные комбинации меток на полурёбрах графов D_1 и D_2 . Ясно, что число таких комбинаций конечно. Для меток на полурёбрах графа D_1 использовались символы A, B и C , а для меток на полурёбрах графа D_2 использовались символы A, B, C, D и E ;
- Шаг 2. Для каждого меченого графа, построенного на предыдущем шаге, вычислялась Эйлера характеристика трёхмерного многообразия, задаваемого этой кубической диаграммой. Если эта характеристика оказывалась не нулевой, то соответствующая кубическая диаграмма отбрасывалась и далее не рассматривалась. В результате формировался набор кубических диаграмм, задающих все замкнутые ориентируемые трёхмерные многообразия кубической сложности 1 и 2. Конечно, этот набор содержал разные диаграммы, задающие гомеоморфные многообразия;
- Шаг 3. С помощью программы “Распознаватель многообразий” (доступно на странице [5]) были распознаны все многообразия, которые задавались кубическими диаграммами, построенными на предыдущем шаге. В результате все эти диаграммы были разбиты на классы эквивалентности: две диаграммы эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую сложность и задают гомеоморфные многообразия. Из каждого класса нами была выбрана одна диаграмма.

Каждому построенному многообразию назначался номер вида N_i , где N — кубическая сложность многообразия, и i — порядковый номер многообразия в таблице. Таблица 1 содержит все замкнутые ориентируемые трёхмерные многообразия кубической сложности 1. Кубические диаграммы этих многообразий изображены на рисунке 4. Отметим, что многообразия $1_4 - 1_{14}$ были получены ранее Дж. Амендолой (см. [4]). Таблица 2 содержит все замкнутые ориентируемые трёхмерные многообразия кубической сложности 2. Кубические диаграммы этих многообразий изображены на рисунках 5 – 9.

Для задания многообразий в таблицах 1 и 2 использовались следующие обозначения:

- (1) S^2 — двумерная сфера, D^2 — двумерный диск, A^2 — кольцо, T^2 — двумерный тор, $\mathbb{R}P^2$ — проективная плоскость, M^2 — лист Мёбиуса;
- (2) $L_{p,q}$ — линзовое пространство. Предполагается, что $p \geq 2$ и $0 < q < p$;
- (3) $(F; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ — многообразие Зейферта с n особыми слоями и базой F . Предполагается, что $p_i \geq 1$ и $0 \leq q_i \leq p_i$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (4) $M_1 \cup_A M_2$ — многообразие, которое получается в результате склейки двух многообразий Зейферта M_1 и M_2 . Гомеоморфизм склейки краёв этих многообразий задаётся матрицей A в канонических системах координат, индуцированных расслоениями Зейферта многообразий M_1 и M_2 . В таблицах 1 и 2 используются только две таких матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (5) $Q_n^m(p, q)$ — замкнутое трёхмерное многообразие, которое получается из гиперболического многообразия Q_n^m (такие многообразия изучались в работе [6]) перестройкой Дэна с параметрами (p, q) .

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ТАБЛИЦА МНОГООБРАЗИЙ КУБИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ 1.

N_i	Многообразие
1 ₁	S^3
1 ₂	$\mathbb{R}P^3$
1 ₃	$L_{4,1}$
1 ₄	$L_{6,1}$
1 ₅	$L_{8,3}$
1 ₆	$L_{12,5}$
1 ₇	$L_{14,3}$
1 ₈	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, -1))$
1 ₉	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (3, -2))$
1 ₁₀	$(S^2; (2, 1), (4, 1), (4, -3))$
1 ₁₁	$(S^2; (3, 1), (3, 1), (3, -2))$
1 ₁₂	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, -3))$
1 ₁₃	$T^2 \times S^1$
1 ₁₄	$(\mathbb{R}P^2; (2, 1), (2, -1))$
1 ₁₅	$S^2 \times S^1$
1 ₁₆	$\mathbb{R}P^3 \# (S^2 \times S^1)$
1 ₁₇	$\mathbb{R}P^3 \# L_{4,1}$
1 ₁₈	$\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$

Таблица 1: Полный список замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 1.

Приложение В. ТАБЛИЦА МНОГООБРАЗИЙ КУБИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ 2.

N_i	Многообразие
2 ₁	$L_{3,1}$
2 ₂	$L_{5,1}$
2 ₃	$L_{5,2}$
2 ₄	$L_{7,2}$
2 ₅	$L_{8,1}$
2 ₆	$L_{10,3}$
2 ₇	$L_{16,3}$
2 ₈	$L_{16,7}$
2 ₉	$L_{18,5}$
2 ₁₀	$L_{20,9}$
2 ₁₁	$L_{22,5}$
2 ₁₂	$L_{24,5}$
2 ₁₃	$L_{24,7}$
2 ₁₄	$L_{26,7}$
2 ₁₅	$L_{28,5}$
2 ₁₆	$L_{30,7}$
2 ₁₇	$L_{34,13}$
2 ₁₈	$L_{36,11}$
2 ₁₉	$L_{40,9}$
2 ₂₀	$L_{46,17}$
2 ₂₁	$L_{52,11}$
2 ₂₂	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1))$
2 ₂₃	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 3))$
2 ₂₄	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (3, 4))$
2 ₂₅	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (3, -1))$
2 ₂₆	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (3, 2))$
2 ₂₇	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (4, -3))$
2 ₂₈	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (4, -1))$
2 ₂₉	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (5, -4))$
2 ₂₀	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (5, -3))$
2 ₃₁	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (5, 2))$
2 ₃₂	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (5, -2))$
2 ₃₃	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (7, -4))$
2 ₃₄	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (7, -2))$
2 ₃₅	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (8, -5))$
2 ₃₆	$(S^2; (2, 1), (3, 1), (3, -1))$

N_i	Многообразие
2 ₃₇	$(S^2; (2, 1), (3, 1), (4, -3))$
2 ₃₈	$(S^2; (2, 1), (3, 1), (4, 1))$
2 ₃₉	$(S^2; (2, 1), (3, 2), (4, -3))$
2 ₄₀	$(S^2; (2, 1), (3, 2), (4, -1))$
2 ₄₁	$(S^2; (2, 1), (3, 2), (6, -5))$
2 ₄₂	$(S^2; (2, 1), (3, 1), (8, -5))$
2 ₄₃	$(S^2; (2, 1), (4, 1), (5, -3))$
2 ₄₄	$(S^2; (2, 1), (4, 1), (8, -5))$
2 ₄₅	$(S^2; (2, 1), (5, 1), (6, -5))$
2 ₄₆	$(S^2; (3, 1), (3, 2), (3, -1))$
2 ₄₇	$(S^2; (3, 1), (3, 2), (5, -4))$
2 ₄₈	$(S^2; (3, 1), (3, 1), (7, -2))$
2 ₄₉	$(S^2; (3, 1), (3, 1), (9, -4))$
2 ₅₀	$(S^2; (3, 1), (4, 1), (4, -1))$
2 ₅₁	$(S^2; (3, 2), (4, 1), (4, -3))$
2 ₅₂	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, -1))$
2 ₅₃	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1))$
2 ₅₄	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (4, -7))$
2 ₅₅	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (4, -3))$
2 ₅₆	$(T^2; (1, 1))$
2 ₅₇	$(\mathbb{R}P^2; (2, 1), (2, 1))$
2 ₅₈	$(\mathbb{R}P^2; (2, 1), (2, 3))$
2 ₅₉	$(\mathbb{R}P^2; (2, 1), (4, -3))$
2 ₆₀	$(\mathbb{R}P^2; (2, 1), (4, 1))$
2 ₆₁	$(\mathbb{R}P^2; (3, 1), (3, -1))$
2 ₆₂	$(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2; (1, 1))$
2 ₆₃	$(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2; (1, 2))$
2 ₆₄	$(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) \tilde{\times} S^1$
2 ₆₅	$(M^2 \setminus D^2) \tilde{\times} S^1 / A_1$
2 ₆₆	$(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (3, 1))$
2 ₆₇	$(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (3, -1))$
2 ₆₈	$(D^2; (2, 1), (2, 3)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (3, 1))$
2 ₆₉	$(D^2; (2, 1), (2, 3)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (3, -1))$
2 ₇₀	$(D^2; (2, 1), (2, -1)) \cup_{A_2} (D^2; (2, 1), (3, -2))$
2 ₇₁	$(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (4, -1))$
2 ₇₂	$(D^2; (2, 1), (2, 3)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (4, -1))$
2 ₇₃	$(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cup_{A_2} (D^2; (2, 1), (4, -3))$
2 ₇₄	$(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cup_{A_1} (D^2; (2, 1), (2, 1), (2, -1))$

N_i	Многообразие
275	$(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cup_{A_1} (M^2; (2, 1))$
276	$Q_1^2(-6, 7)$
277	$Q_1^3(-4, 1)$
278	$Q_3^3(2, 1)$
279	$Q_6^3(2, 1)$
280	$Q_{41}^4(-3, 1)$
281	$(S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$
282	$L_{3,1} \# (S^2 \times S^1)$
283	$L_{4,1} \# (S^2 \times S^1)$
284	$L_{6,1} \# (S^2 \times S^1)$
285	$L_{8,3} \# (S^2 \times S^1)$
286	$L_{10,3} \# (S^2 \times S^1)$
287	$(S^2; (2, 1), (2, 1), (2, -1)) \# (S^2 \times S^1)$
288	$(\mathbb{R}P^2 \tilde{\times} S^1) \# (S^2 \times S^1)$
289	$(\mathbb{R}P^2; (1, 1)) \# (S^2 \times S^1)$
290	$(\mathbb{R}P^2; (1, 2)) \# (S^2 \times S^1)$
291	$\mathbb{R}P^3 \# L_{3,1}$
292	$\mathbb{R}P^3 \# L_{6,1}$
293	$\mathbb{R}P^3 \# L_{8,3}$
294	$\mathbb{R}P^3 \# L_{10,3}$
295	$\mathbb{R}P^3 \# L_{12,5}$
296	$\mathbb{R}P^3 \# L_{14,3}$
297	$\mathbb{R}P^3 \# (S^2; (2, 1), (2, 1), (2, -1))$
298	$\mathbb{R}P^3 \# (S^2; (2, 1), (2, 1), (3, -2))$
299	$\mathbb{R}P^3 \# (S^2; (2, 1), (4, 1), (4, -3))$
2100	$\mathbb{R}P^3 \# (S^2; (3, 1), (3, 1), (3, -2))$
2101	$\mathbb{R}P^3 \# (S^2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, -3))$
2102	$\mathbb{R}P^3 \# (T^2 \times S^1)$
2103	$\mathbb{R}P^3 \# (\mathbb{R}P^2; (2, 1), (2, -1))$
2104	$\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3 \# (S^2 \times S^1)$
2105	$\mathbb{R}P^3 \# L_{4,1} \# (S^2 \times S^1)$
2106	$\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$
2107	$\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3 \# L_{4,1}$
2108	$L_{3,1} \# L_{4,1}$
2109	$L_{4,1} \# L_{4,1}$

Таблица 2: Полный список замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 2.

Приложение С. Кубические диаграммы многообразий кубической сложности 1.

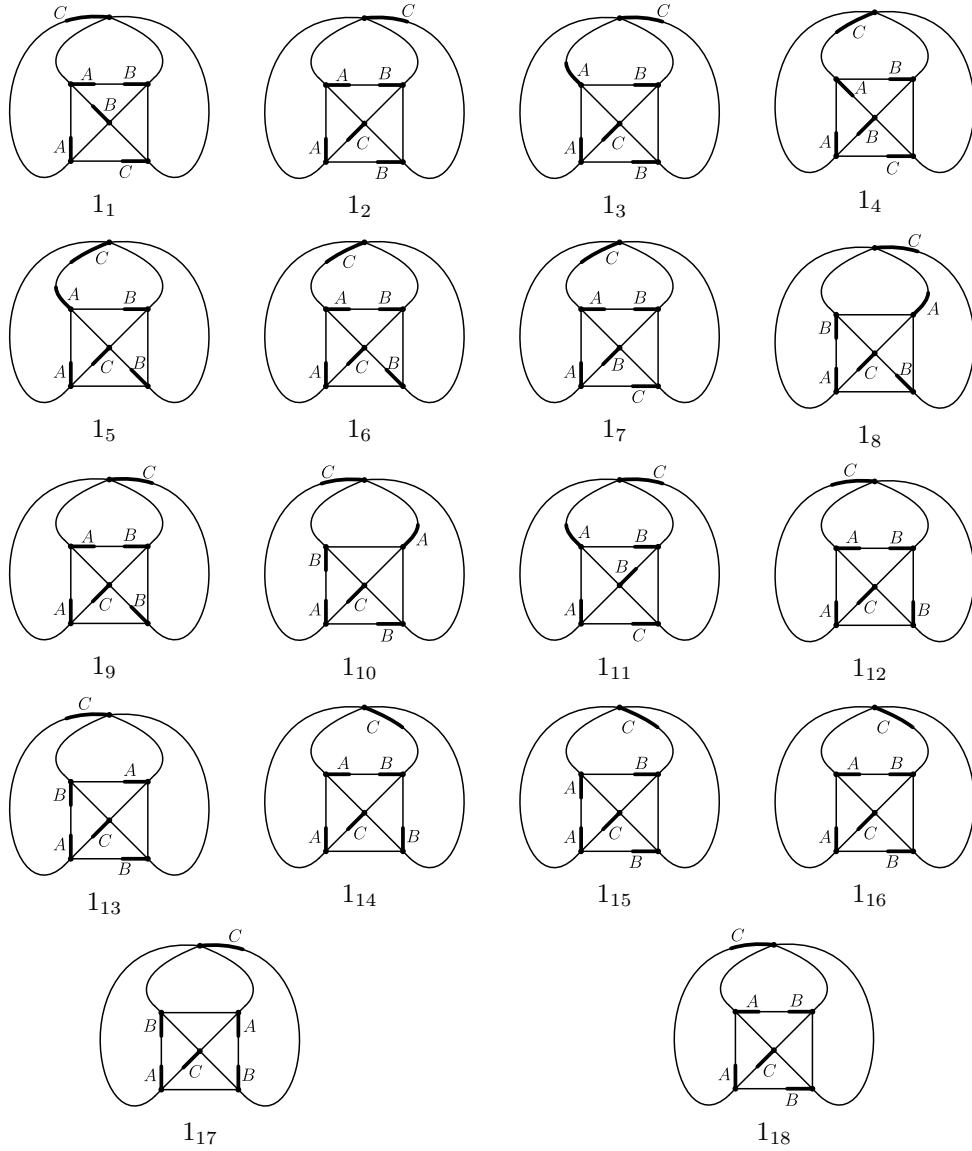


Рис. 4. Кубические диаграммы всех замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий кубической сложности 1.

Приложение D. Кубические диаграммы многообразий кубической сложности 2.

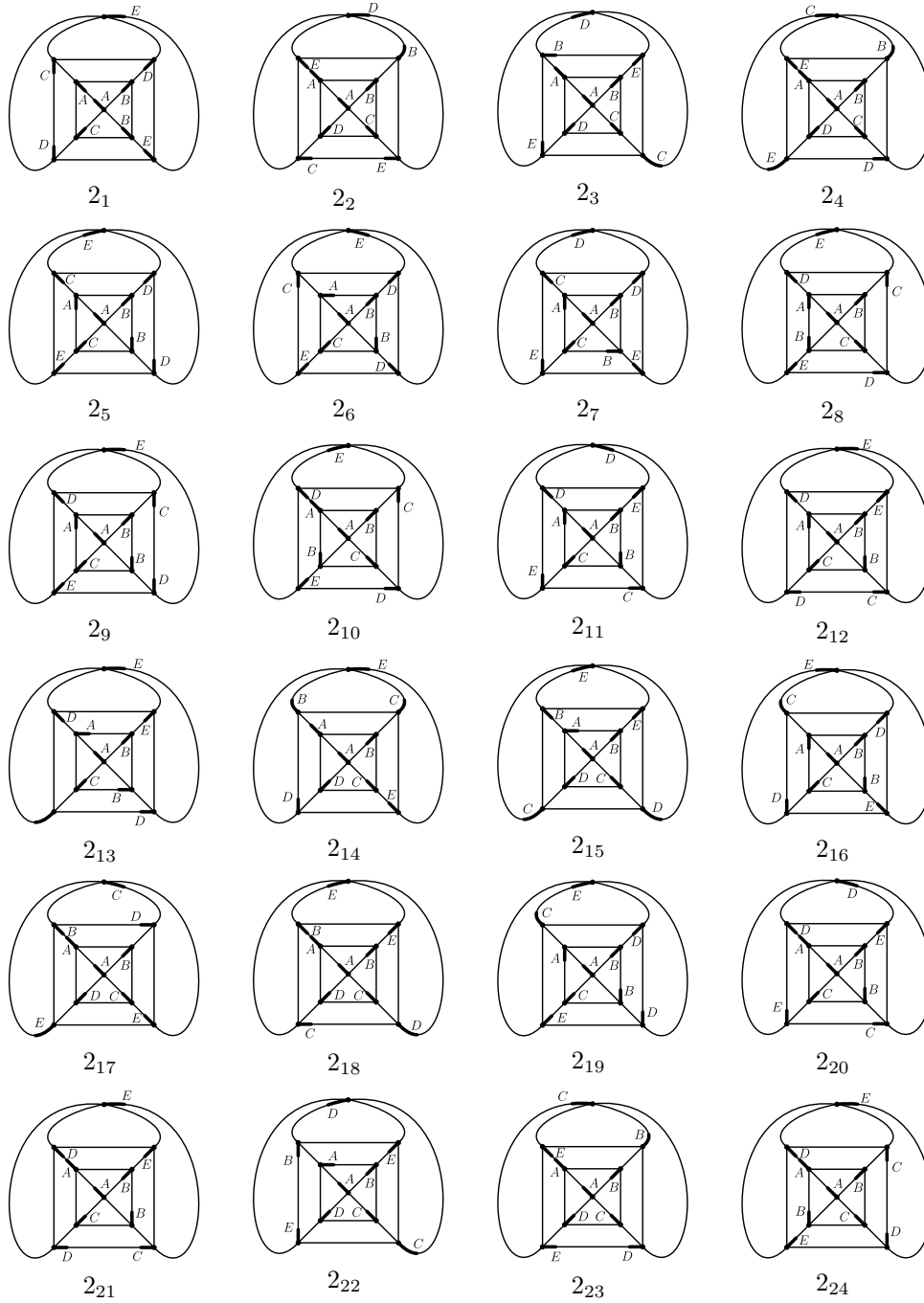


Рис. 5. Кубические диаграммы многообразий $2_1 - 2_{24}$ кубической сложности 2.

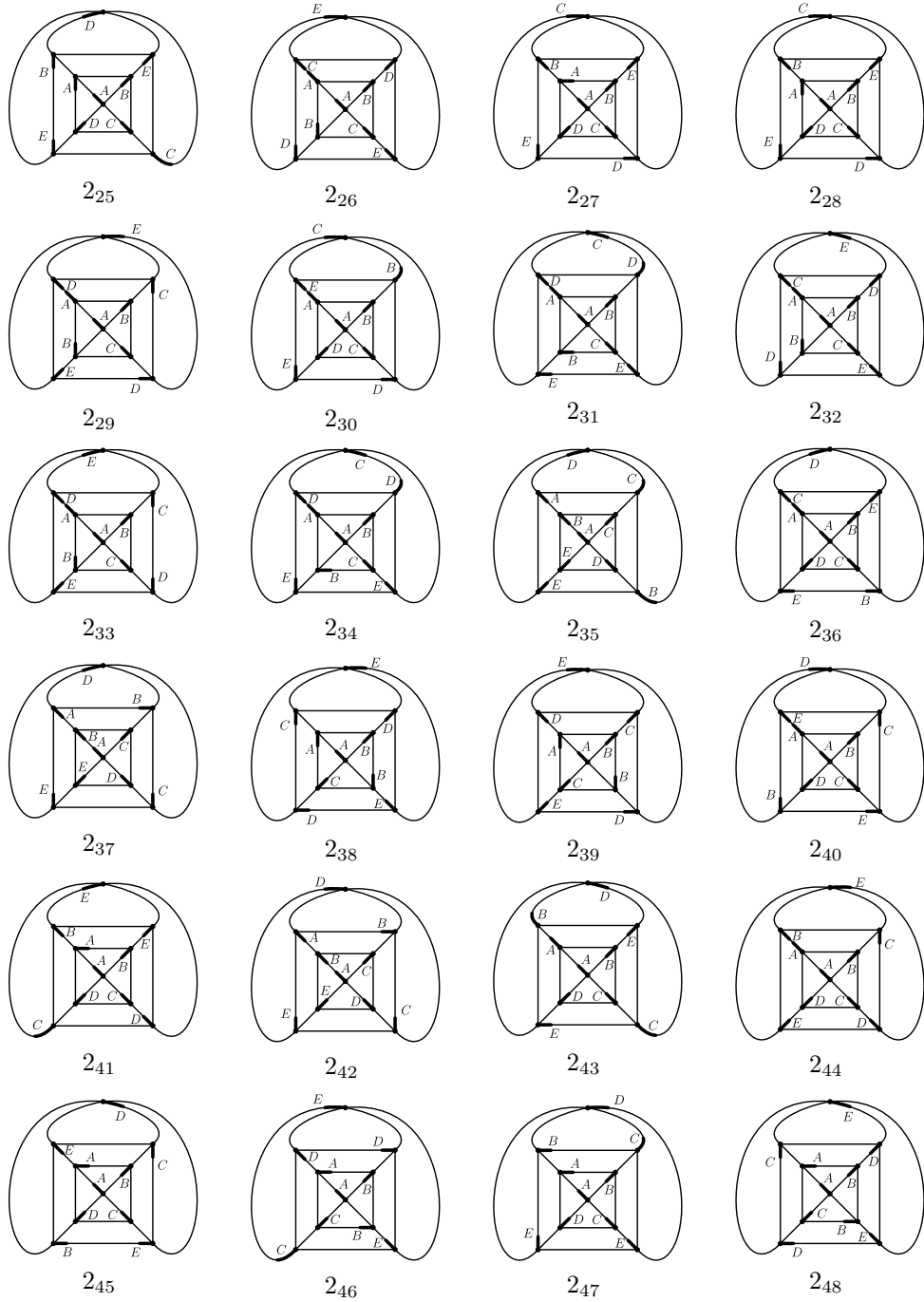


Рис. 6. Кубические диаграммы многообразий $2_{25} - 2_{48}$ кубической сложности 2.

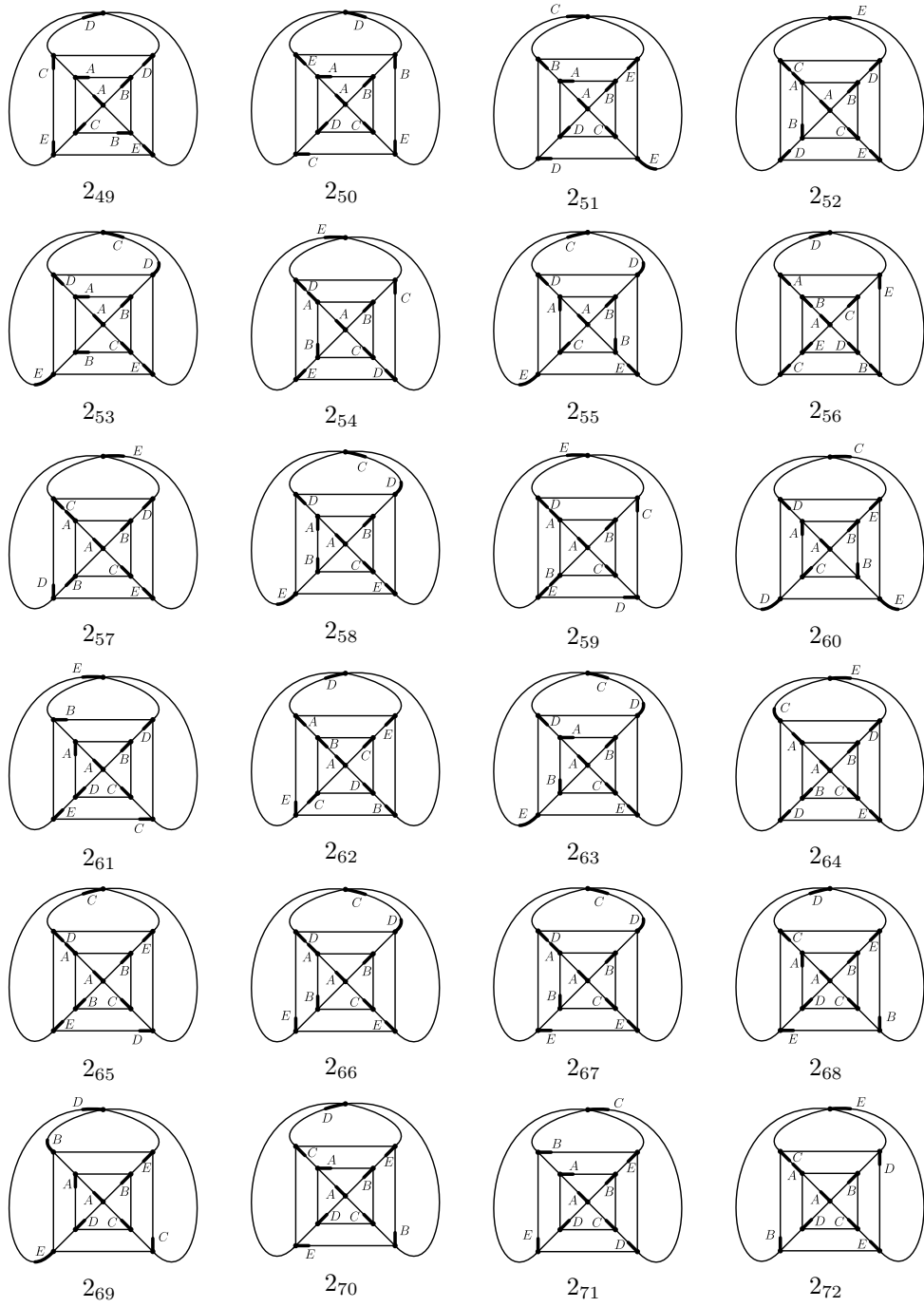


Рис. 7. Кубические диаграммы многообразий $2_{49} - 2_{72}$ кубической сложности 2.

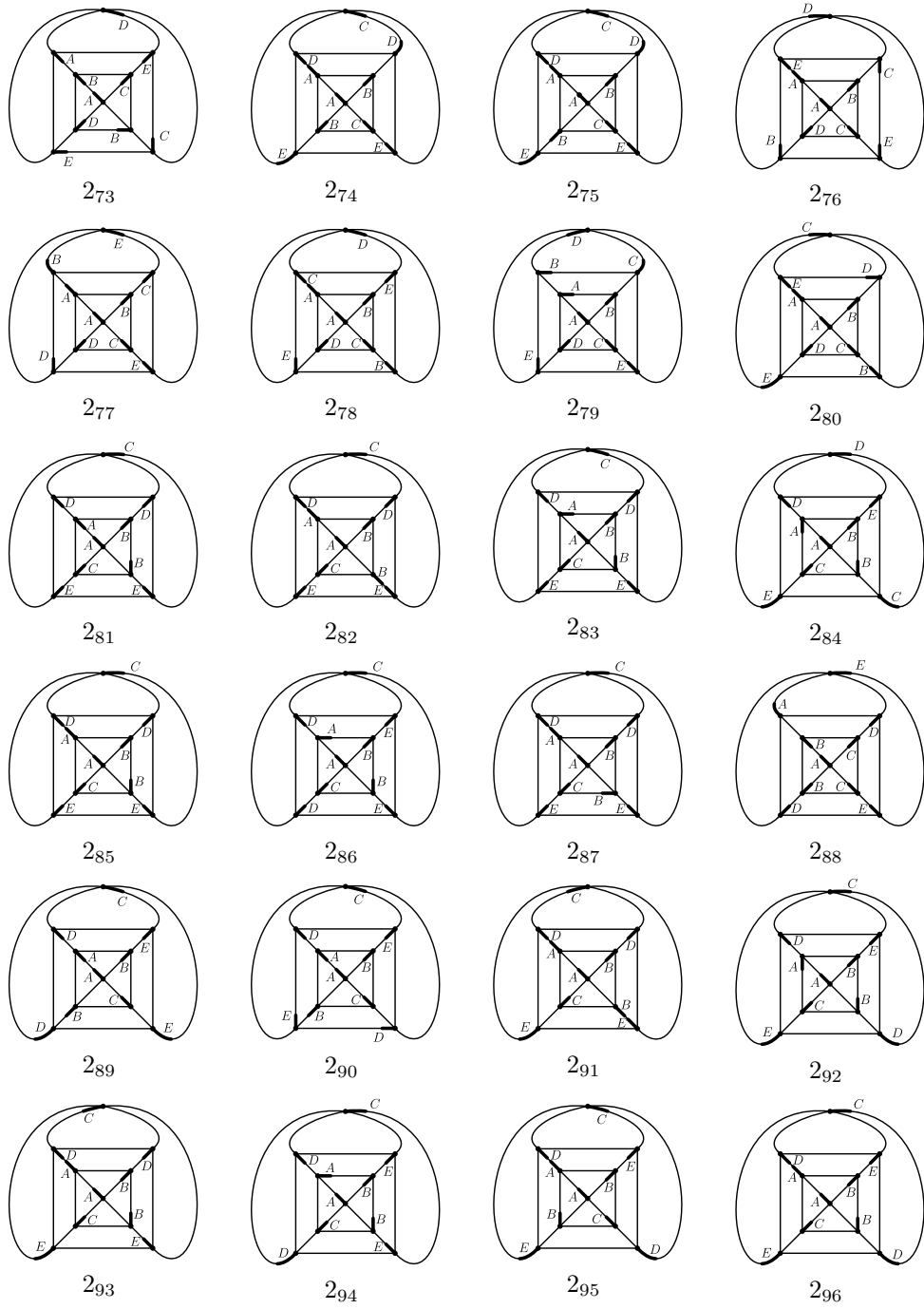


Рис. 8. Кубические диаграммы многообразий 273 — 296 кубической сложности 2.

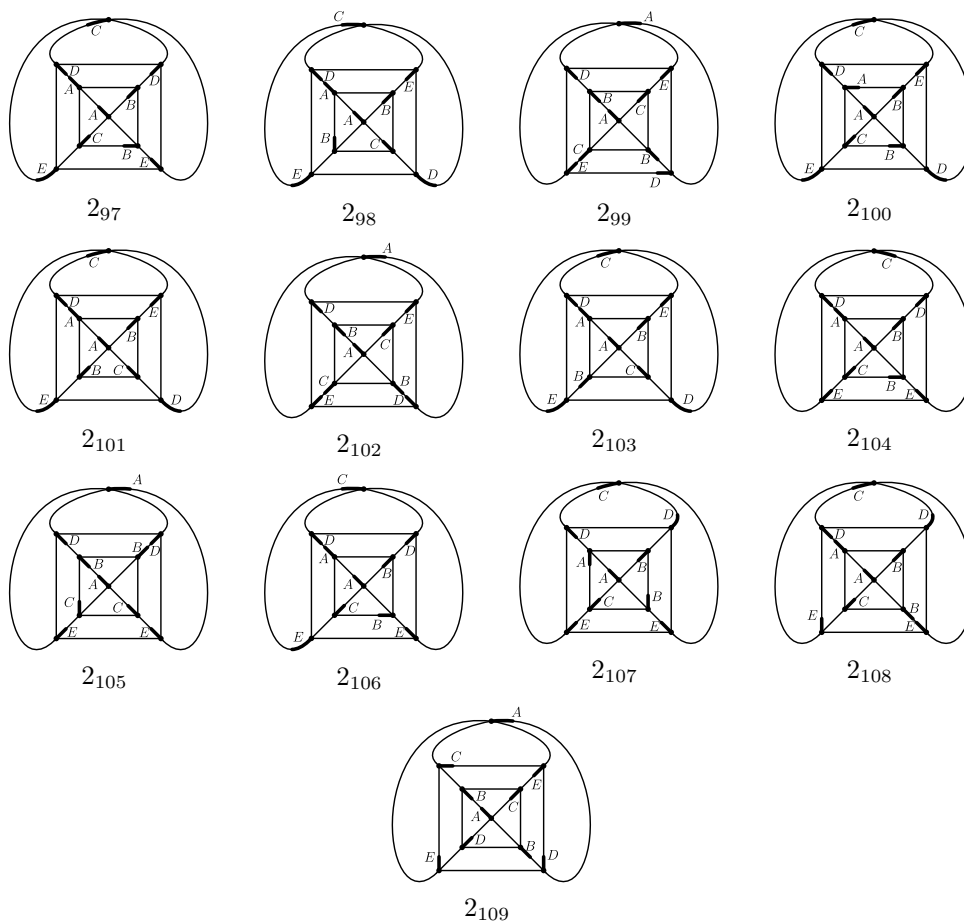


Рис. 9. Кубические диаграммы многообразий 2₉₇ – 2₁₀₉ кубической сложности 2.

REFERENCES

- [1] S. Matveev, *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*, Springer, 2007. Zbl 1128.57001
- [2] V.V. Tarkaev, *On the cubic complexity of three-dimensional polyhedra*, Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki, **17**:1 (2014), 245–250.
- [3] G. Amendola, *A 3-manifold complexity via immersed surfaces*, J. Knot Theory Ramifications, **19** (2010), 1549–1569. Zbl 1221.57033
- [4] G. Amendola, *Orientable closed 3-manifolds with surface-complexity one*, arXiv:1011.4196 [math.GT].
- [5] <http://matlas.math.csu.ru>
- [6] J. Weeks, *Hyperbolic Structures on 3-manifolds*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1985.

PHILIPP GLEBOVICH KORABLEV
CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
BR. KASHIRINYKH STR., 192,
454000, CHELYABINSK, RUSSIA,
LABORATORY OF QUANTUM TOPOLOGY OF CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
BR. KASHIRINYKH STR., 192,
454000, CHELYABINSK, RUSSIA,
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
STR. S. KOVALEVSKOY, 4,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
E-mail address: korablev@csu.ru

ALEXANDER ANDREEVICH KAZAKOV
CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
BR. KASHIRINYKH STR., 192,
454000, CHELYABINSK, RUSSIA
E-mail address: Kazakov.Al.An@gmail.com