S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 101–110 (2016) УДК 519.644
DOI 10.17377/semi.2016.13.008 MSC 65D32

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА НА КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А.И. ЗАДОРИН

Abstract. Gauss quadrature for a function with large gradients in the exponential boundary layer is investigated. In the case of such function the application of Gauss formula on the uniform grid leads to significant errors. The accuracy of Gauss quadrature on Shishkin mesh is investigated. The error of the quadrature formula is estimated. This estimate is uniform with respect to the small parameter. Results of numerical experiments are discussed.

Keywords: definite integral, boundary layer, large gradients, Gauss quadrature, Shishkin mesh, error estimation.

1. Введение

Вопрос построения квадратурных формул для функций с особенностями представляет интерес и исследовался в ряде работ, например, в [1], [2]. В данной работе предполагается, что интегрируемая функция соответствует широкому классу функций, являющихся решением сингулярно возмущенных краевых задач. Такая функция имеет большие градиенты в области пограничного слоя и представима в виде суммы регулярной составляющей с ограниченными производными до некоторого порядка и погранслойной составляющей, имеющей большие градиенты в области пограничного слоя [3], [4], причем эти составляющие в явном виде не заданы.

В [5] показано, что применение составных квадратурных формул трапеций и Симпсона на равномерной сетке с шагом h при интегрировании функций

Zadorin, A.I., Gauss quadrature on a piecewise uniform mesh for functions with large gradients in a boundary layer.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 15-01-06584, 16-01-00727).

Поступила 26 января 2016 г., опубликована 26 февраля 2016 г.

с погранслойной составляющей может приводить к повышению погрешности этих формул до величины порядка $O(h)$. Таким образом, вопрос построения квадратурных формул, погрешность которых равномерна по градиентам интегрируемой функции в пограничном слое, является актуальным.

Для построения таких формул, по аналогии с известными подходами к построению равномерно сходящихся разностных схем для сингулярно возмущенных задач, ранее мы исследовали два подхода.

В [5]–[7] модифицированы квадратурные формулы Ньютона — Котеса с числом узлов от двух до пяти таким образом, чтобы они стали точными на известной с точностью до множителя погранслойной составляющей интегрируемой функции. Получены оценки погрешности построенных формул, из которых следует, что для составной формулы, основанной на формуле с с m узлами, порядок точности равен $(m-1)$, независимо от погранслойной составляющей и ее производных.

В [8] исследован другой подход для интегрирования функций с погранслойной составляющей, основанный на сгущении сетки в пограничном слое. Предложено применять составные формулы Ньютона — Котеса на сетке Шишкина [3]. Получены оценки погрешности, с точностью до множителя в виде логарифма от числа узлов сетки, соответствующие оценкам погрешности в регулярном случае, когда интегрируемая функция имеет ограниченные производные и сетка равномерна. Заметим, что погранслойная составляющая при таком подходе соответствует экспоненциальному пограничному слою [4].

В [9] обосновано применение квадратурной формулы Эйлера на кусочно-равномерной сетке для численного интегрирования функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое.

Известно, что квадратурные формулы Гаусса обладают повышенной точностью в сравнении с формулами Ньютона — Котеса и устойчивы к возмущениям интегрируемой функции, так как коэффициенты этих формул положительны. Устойчивость необходима, если значения интегрируемой функции в узлах находятся приближенно, например, на основе интерполяции или сеточного решения краевой задачи.

Представляет интерес анализ применимости формул Гаусса для интегрирования функций с большими градиентами в пограничном слое. В работе обосновано применение составных формул Гаусса на сетке Шишкина для численного интегрирования таких функций.

Остановимся на вычислении интеграла

$$I(u) = \int\limits_0^1 u(x)\,dx, \tag{1.1}$$

предполагая, что подынтегральная функция является достаточно гладкой и для нее справедливо представление

$$u(x) = q(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \tag{1.2}$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \le C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-\alpha x/\varepsilon},\ 0 \le j \le 2m, \tag{1.3}$$

функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0, \varepsilon > 0$, некоторая постоянная C_1 не зависит от ε. Предполагаем, что α отделено от нуля, $\varepsilon \in (0,1]$. Ниже m будет соответствовать числу узлов исследуемой формулы Гаусса.

Согласно (1.3), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до порядка $2m$, а погранслойная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, неограниченно растущие у границы $x = 0$ с уменьшением параметра ε.

В соответствии с [3], [4], [10], представление (1.2) с ограничениями (1.3) справедливо для решения сингулярно возмущенной краевой задачи

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \ u(1) = B, \qquad (1.4)$$

где

$$a_1(x) \geq \alpha > 0, \ a_2(x) \geq 0, \ \varepsilon > 0,$$

функции $a_1(x), a_2(x), f(\mathrm{x})$– достаточно гладкие. При малых значениях параметра ε решение задачи (1.4) имеет погранслойную область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1.2) с ограничениями (1.3).

Покажем, что в случае равномерной сетки с шагом h погрешность составной формулы Гаусса может быть значительной при интегрировании функций вида (1.2). Для квадратурной формулы Гаусса с одним узлом проведем анализ погрешности на погранслойной составляющей

$$I_1(\Phi) = \int\limits_0^h \Phi(x)\,dx \approx h\Phi(h/2).$$

Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Для погрешности Δ справедливо соотношение

$$\Delta = |I_1(\Phi) - h\Phi(h/2)| = |\varepsilon(1 - e^{-h/\varepsilon}) - he^{-h/(2\varepsilon)}|.$$

Несложно убедиться, что $\Delta = O(h^3)$ при $\varepsilon = 1$ и $\Delta = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq h$. Заметим, что при $\varepsilon \ll h$ будет $\Delta \approx \varepsilon$.

Можно показать, что при $\varepsilon \leq h$ аналогичными свойствами обладают формулы Гаусса с другим числом узлов, например, $m = 2$ и $m = 3$.

Исследуем вопрос повышения точности составной формулы Гаусса за счет применения сгущающейся в пограничном слое сетки.

Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа интервалов сетки N.

2. Составная формула Гаусса на сетке Шишкина

В соответствии с [3] зададим кусочно-равномерную сетку

$$\Omega = \{x_n : \ x_n = x_{n-1} + h_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad x_0 = 0, \ x_N = 1\} \qquad (2.1)$$

с шагами

$$h_n = h = \frac{2\sigma}{N}, \ 1 \leq n \leq \frac{N}{2}; \ \ h_n = H = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \ \frac{N}{2} < n \leq N,$$

где N — четно,

$$\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{2m\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}, \qquad (2.2)$$

m — число узлов формулы Гаусса , причем m соответствует (1.3).

Разбиваем исходный интервал $[0,1]$ на N интервалов

$$[0,1]=\bigcup_{k=1}^{N}[x_{k-1},x_k].$$

Пусть

$$I_k(u)=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}u(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Тогда

$$I(u)=\sum_{k=1}^{N}I_k(u). \tag{2.4}$$

Пусть $S_{k,m}(u)$ — формула Гаусса с m узлами для интеграла (2.3)

$$S_{k,m}(u)=\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\sum_{j=1}^{m}D_j u(x_{k,j}), \tag{2.5}$$

где узлы $x_{k,j}$ являются корнями многочлена Лежандра степени m для интервала $[x_{k-1},x_k]$.

В соответствии с [1, с. 106], если вес квадратурной формулы равен единице, то коэффициенты D_j квадратурной формулы (2.5) не зависят от интервала интегрирования и корни многочлена Лежандра на интервале $[x_{k-1},x_k]$ могут быть определены из соотношения

$$x_{k,j}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}+\frac{x_k-x_{k-1}}{2}d_j,$$

где d_j – корни многочлена Лежандра для интервала $[-1,1]$. Коэффициенты D_j и узлы d_j для интервала $[-1,1]$ известны из таблиц [1], [2].

Зададим составную квадратурную формулу Гаусса

$$S_m(u,N)=\sum_{k=1}^{N}S_{k,m}(u).$$

Теорема 1. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление (1.2). Тогда для составной формулы Гаусса $S_m(u,N)$ на сетке Ω справедливы оценки погрешности*

$$|I(u)-S_m(u,N)|\le\frac{C}{N^{2m}}\Big[1+\varepsilon\ln^{2m+1}N\Big],\ \text{если } \varepsilon<\alpha/(4m\ln N), \tag{2.6}$$

$$|I(u)-S_m(u,N)|\le\frac{C}{N^{2m}}\Big(\min\{\varepsilon^{-1},\ln N\}\Big)^{2m},\ \text{если } \varepsilon\ge\alpha/(4m\ln N), \tag{2.7}$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство. В соответствии с [2, с. 195] для формулы Гаусса справедлива оценка погрешности

$$|I_k(u)-S_{k,m}(u)|\le\frac{(x_k-x_{k-1})^{2m+1}(m!)^4}{[(2m)!]^3(2m+1)}M_{2m},\quad M_{2m}=\max_{x\in[x_{k-1},x_k]}|u^{(2m)}(x)|. \tag{2.8}$$

Пусть $\tau_k = x_k - x_{k-1}$. Тогда $\tau_k = h$, если интервал $[x_{k-1}, x_k]$ находится в пограничном слое и $\tau_k = H$ вне пограничного слоя. В соответствии с (2.8)

$$|I_k(u) - S_{k,m}(u)| \le \frac{\tau_k^{2m+1}(m!)^4}{[(2m)!]^3(2m+1)} M_{2m}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим в (2.2) два случая для значения параметра σ.

Пусть $\sigma < 1/2$. Тогда сетка Ω является неравномерной и $\sigma = 2m\alpha^{-1}\varepsilon \ln N$. Оценим погрешность квадратурной формулы отдельно на составляющих $q(x)$ и $\Phi(x)$.

Остановимся на случае функции $\Phi(x)$.

Пусть $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [0, \sigma]$. Тогда

$$\tau_k = h = \frac{4m\varepsilon \ln N}{\alpha N}. \tag{2.10}$$

Учитывая (1.3), (2.10), из (2.9) получаем, что для некоторой постоянной C_2

$$|I_k(\Phi) - S_{k,m}(\Phi)| \le C_2 \varepsilon \frac{\ln^{2m+1} N}{N^{2m+1}}. \tag{2.11}$$

Пусть $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [\sigma, 1]$. В силу соотношений (1.3) и (2.2) при $x \ge \sigma$ справедлива оценка

$$|\Phi(x)| \le \frac{C_1}{N^{2m}}. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12) и соотношения

$$D_j > 0, \ \sum_{j=1}^{m} D_j = 2,$$

получаем, что

$$|I_k(\Phi) - S_{k,m}(\Phi)| \le |I_k(\Phi)| + |S_{k,m}(\Phi)| \le \frac{2(x_k - x_{k-1})C_1}{N^{2m}} \le \frac{4C_1}{N^{2m+1}}. \tag{2.13}$$

Оценим погрешность на регулярной составляющей $q(x)$. Учитывая, что для произвольного шага сетки Ω справедлива оценка $h_n < 2/N$, используя (1.3), (2.9), для некоторой постоянной C_3 получаем:

$$|I_k(q) - S_{k,m}(q)| \le \frac{C_3}{N^{2m+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.14}$$

Учитывая оценки (2.11), (2.13), (2.14), получаем, что для построенной составной квадратурной формулы для некоторой постоянной C справедлива оценка погрешности

$$|I(u) - S_m(u, N)| \le \frac{C}{N^{2m}} \Big[1 + \varepsilon \ln^{2m+1} N\Big]. \tag{2.15}$$

Пусть теперь $\sigma = 1/2$. Тогда $\varepsilon \ge \alpha/(4m \ln N)$. В соответствии с (1.3), (2.9) для некоторой постоянной C_4 справедлива оценка

$$|I_k(u) - S_{k,m}(u)| \le \frac{C_4}{N^{2m+1}\varepsilon^{2m}}. \tag{2.16}$$

Учитывая, что $\varepsilon \ge \alpha/(4m \ln N)$, из (2.16) для некоторой постоянной C_5 получаем

$$|I_k(u) - S_{k,m}(u)| \le C_5 \frac{\ln^{2m} N}{N^{2m+1}}. \tag{2.17}$$

Учитывая оценки (2.16), (2.17), для некоторой постоянной C получаем оценку погрешности

$$|I(u) - S_m(u,N)| \leq \frac{C}{N^{2m}}\Big(\min\{\varepsilon^{-1}, \ln N\}\Big)^{2m}. \tag{2.18}$$

Из оценок (2.15), (2.18) следует утверждение теоремы. □

Из оценок (2.6), (2.7) следует, что при $\varepsilon \approx 1$ и при достаточно малых значениях ε оценка погрешности составной квадратурной формулы Гаусса такая же, как в регулярном случае, когда интегрируемая функция имеет ограниченные производные порядка $2m$.

Замечание. Если функция $u(x)$ задана в узлах сетки Ω, то в узлах составной формулы Гаусса значения $u(x)$ могут быть вычислены с заданной точностью на основе интерполяции. В [8] для функции вида (1.2) получены равномерные по ε оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа степени $(m-1)$ на кусочно-равномерной сетке, аналогичной (2.1).

3. Результаты вычислительных экспериментов

Остановимся на вычислении интеграла

$$I(u) = \int_0^1 u(x)\,dx, \quad u(x) = cos\frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon} \tag{3.1}$$

при различных значениях параметра $\varepsilon \in (0,1]$. Подынтегральная функция соответствует представлению (1.2) при задании $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. При малых ε функция $\Phi(x)$ имеет большие градиенты у границы интервала $x = 0$. Для вычисления интеграла (3.1) используем составные формулы Гаусса с числом узлов $m = 1, 2, 3$ для интеграла (2.3)

$$S_{k,1} = h_k u\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big),$$

$$S_{k,2}(u) = \frac{h_k}{2}\Big[u\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2} - \frac{h_k}{2\sqrt{3}}\Big) + u\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2} + \frac{h_k}{2\sqrt{3}}\Big)\Big],$$

$$S_{k,3}(u) = \frac{h_k}{18}\Big[5u\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2} - \frac{h_k}{2}\sqrt{3/5}\Big) + 8u\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big) + 5u\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2} + \frac{h_k}{2}\sqrt{3/5})\Big)\Big].$$

В таблицах 1,2,3 приведена погрешность составных формул Гаусса на сетке Шишкина при различных значениях ε и N с числом узлов $m = 1, 2, 3$ соответственно. Под $e-k$ подразумевается 10^{-k}.

Таблица 1. Погрешность составной формулы Гаусса с одним узлом на сетке Шишкина

ε	N					
	4	8	16	32	64	128
1	$2.47e-3$	$6.13e-4$	$1.53e-4$	$3.82e-5$	$9.55e-6$	$2.39e-6$
10^{-1}	$4.02e-3$	$3.45e-3$	$1.35e-3$	$3.42e-4$	$8.57e-5$	$2.14e-5$
10^{-2}	$1.37e-2$	$2.94e-3$	$6.00e-4$	$1.13e-4$	$1.80e-5$	$1.45e-6$
10^{-3}	$1.64e-2$	$4.00e-3$	$9.80e-4$	$2.41e-4$	$5.90e-5$	$1.44e-5$
10^{-4}	$1.66e-2$	$4.10e-3$	$1.02e-3$	$2.54e-4$	$6.34e-5$	$1.58e-5$
10^{-5}	$1.67e-2$	$4.11e-3$	$1.02e-3$	$2.56e-4$	$6.38e-5$	$1.60e-5$
10^{-6}	$1.67e-2$	$4.11e-3$	$1.02e-3$	$2.56e-4$	$6.38e-5$	$1.60e-5$

Таблица 2. Погрешность составной формулы Гаусса с двумя узлами на сетке Шишкина

ε	N					
	4	8	16	32	64	128
1	$4.09e-6$	$2.55e-7$	$1.59e-8$	$9.95e-10$	$6.22e-11$	$3.89e-12$
10^{-1}	$7.54e-4$	$5.40e-5$	$3.50e-6$	$2.21e-7$	$1.38e-8$	$8.66e-10$
10^{-2}	$1.89e-4$	$4.23e-5$	$8.24e-6$	$1.28e-6$	$1.68e-7$	$1.95e-8$
10^{-3}	$7.02e-5$	$7.40e-6$	$1.02e-6$	$1.41e-7$	$1.76e-8$	$2.00e-9$
10^{-4}	$5.85e-5$	$3.91e-6$	$3.00e-7$	$2.64e-8$	$2.53e-9$	$2.48e-10$
10^{-5}	$5.73e-5$	$3.56e-6$	$2.27e-7$	$1.50e-8$	$1.02e-9$	$7.30e-11$
10^{-6}	$5.72e-5$	$3.52e-6$	$2.20e-7$	$1.38e-8$	$8.72e-10$	$5.54e-11$
10^{-7}	$5.72e-5$	$3.52e-6$	$2.19e-7$	$1.37e-8$	$8.57e-10$	$5.37e-11$

Таблица 3. Погрешность составной формулы Гаусса с тремя узлами на сетке Шишкина

ε	N					
	4	8	16	32	64	128
1	$1.09e-9$	$1.69e-11$	$2.64e-13$	$4.21e-15$	$2.22e-16$	–
10^{-1}	$9.91e-6$	$1.80e-7$	$2.92e-9$	$4.60e-11$	$7.21e-13$	$1.10e-14$
10^{-2}	$1.77e-5$	$3.39e-6$	$3.48e-7$	$2.26e-8$	$1.09e-9$	$4.36e-11$
10^{-3}	$1.72e-6$	$3.40e-7$	$3.49e-8$	$2.28e-9$	$1.09e-10$	$4.36e-12$
10^{-4}	$1.04e-7$	$3.30e-8$	$3.47e-9$	$2.26e-10$	$1.09e-11$	$4.36e-13$
10^{-5}	$5.78e-8$	$2.25e-9$	$3.31e-10$	$2.23e-11$	$1.09e-12$	$4.36e-14$
10^{-6}	$7.39e-8$	$8.22e-10$	$1.68e-11$	$1.98e-12$	$1.05e-13$	$4.77e-15$
10^{-7}	$7.55e-8$	$1.13e-9$	$1.46e-11$	$5.68e-13$	$8.32e-15$	$2.22e-16$

В табл. 4 приведен порядок точности $M(\varepsilon, N)$ составной формулы Гаусса с двумя узлами, вычисленный по формуле:

$$M(\varepsilon, N) = \log_2 \frac{|I(u) - S_2(u, N)|}{|I(u) - S_2(u, 2N)|}.$$

Данные табл. 4 согласуются с оценками (2.6), (2.7) для построенной квадратурной формулы: порядок точности близок к значению $2m = 4$ при $\varepsilon = 1$ и при достаточно малых значениях ε. В нижней строке табл. 4 при $m = 2$ приведен теоретический порядок точности

$$CR_m = 2m \log_2 \frac{2\ln(N)}{\ln(2N)},$$

Таблица 4. Вычисленный порядок точности составной формулы Гаусса с двумя узлами на сетке Шишкина

ε	N				
	4	8	16	32	64
1	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
10^{-1}	3.8	3.9	4.0	4.0	4.0
10^{-2}	2.2	2.4	2.7	2.9	3.1
10^{-3}	3.2	2.9	2.9	3.0	3.1
10^{-4}	3.9	3.7	3.5	3.4	3.4
10^{-5}	4.0	4.0	3.9	3.9	3.9
10^{-6}	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
10^{-7}	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
CR_2	1.7	2.3	2.7	2.9	3

соответствующий наибольшей по порядку погрешности в (2.6), (2.7):

$$|I(u) - S_m(u,N)| \approx C\Big(\frac{\ln(N)}{N}\Big)^{2m}.$$

При $\varepsilon = 10^{-2}$ вычисленный порядок точности при различных N является наименьшим и согласуется с теоретическим порядком точности.

В табл. 5 аналогичным образом приведены вычисленный и теоретический порядки точности формулы Гаусса с тремя узлами.

Таблица 5. Вычисленный порядок точности составной формулы Гаусса с тремя узлами на сетке Шишкина

ε	N			
	8	16	32	64
1	6.0	6.0	6.0	6.0
10^{-1}	5.9	6.0	6.0	6.0
10^{-2}	3.3	4.0	4.4	4.6
10^{-3}	3.3	3.9	4.4	4.7
10^{-4}	3.2	3.9	4.4	4.7
10^{-5}	2.8	3.9	4.4	4.7
10^{-6}	5.6	3.1	4.2	4.5
10^{-7}	6.3	4.7	6.1	5.6
CR_3	3.5	4.1	4.4	4.5

В табл. 6, 7 для сравнения приведена погрешность составных формул Гаусса с двумя и тремя узлами на равномерной сетке. Погрешность существенно неравномерна по параметру ε, при некоторых значенях параметра ε погрешность не уменьшается с увеличением числа узлов сетки. Как говорилось выше, в случае равномерной сетки при $\varepsilon \le h$ погрешность квадратурной формулы на погранслойной составляющей порядка $O(\varepsilon)$. С увеличением N погрешность квадратурной формулы на регулярной составляющей $q(x)$ становится достаточно малой и основной вклад в погрешность дает погранслойная составляющая, поэтому погрешность квадратурной формулы становится порядка $O(\varepsilon)$, что согласуется с данными табл. 6, 7.

Таблица 6. Погрешность составной формулы Гаусса с двумя узлами на равномерной сетке

ε	N					
	4	8	16	32	64	128
1	$4.09e-6$	$2.55e-7$	$1.59e-8$	$9.95e-10$	$6.22e-11$	$3.89e-12$
10^{-1}	$7.54e-4$	$5.40e-5$	$3.50e-6$	$2.21e-7$	$1.38e-8$	$8.66e-10$
10^{-2}	$9.37e-3$	$5.54e-3$	$1.42e-3$	$1.67e-4$	$1.28e-5$	$6.46e-7$
10^{-3}	$1.00e-3$	$1.00e-3$	$1.00e-3$	$9.74e-4$	$7.12e-4$	$2.42e-4$
10^{-4}	$1.04e-3$	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$1.00e-4$
10^{-5}	$1.35e-5$	$1.02e-5$	$1.02e-5$	$1.00e-5$	$1.00e-5$	$1.00e-5$
10^{-6}	$4.52e-6$	$1.22e-6$	$1.01e-6$	$1.00e-6$	$1.00e-6$	$1.00e-6$
10^{-7}	$3.62e-6$	$3.19e-7$	$1.14e-7$	$1.01e-7$	$1.00e-7$	$1.00e-7$
10^{-8}	$3.53e-6$	$2.29e-7$	$2.37e-8$	$1.08e-8$	$1.01e-8$	$1.00e-8$
10^{-9}	$3.52e-6$	$2.20e-7$	$1.47e-8$	$1.86e-9$	$1.05e-9$	$1.00e-9$

Таблица 7. Погрешность составной формулы Гаусса с тремя узлами на равномерной сетке

ε	N					
	4	8	16	32	64	128
1	$1.09e-9$	$1.69e-11$	$2.64e-13$	$4.21e-15$	$2.22e-16$	–
10^{-1}	$9.91e-6$	$1.80e-7$	$2.92e-9$	$4.60e-11$	$7.21e-13$	$1.00e-14$
10^{-2}	$5.85e-3$	$1.41e-3$	$1.09e-4$	$3.41e-6$	$6.65e-8$	$1.11e-9$
10^{-3}	$1.03e-3$	$1.00e-3$	$9.84e-4$	$7.44e-4$	$2.51e-4$	$2.79e-5$
10^{-4}	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$1.00e-4$	$9.97e-5$
10^{-5}	$1.00e-5$	$1.00e-5$	$1.00e-5$	$1.00e-5$	$1.00e-5$	$1.00e-5$
10^{-6}	$1.00e-6$	$1.00e-6$	$1.00e-6$	$1.00e-6$	$1.00e-6$	$1.00e-6$

4. Заключение

Исследован вопрос применения составной формулы Гаусса на сетке Шишкина для численного интегрирования функций одной переменной с погранслойной составляющей, соответствующей экспоненциальному пограничному слою. Получена оценка погрешности составной квадратурной формулы в зависимости от числа узлов формулы, равномерная по малому параметру. Показано, что в случае равномерной сетки при наличии погранслойной составляющей погрешность составной формулы Гаусса зависит от соотношения между малым параметром и шагом сетки и может быть значительной.

References

[1] N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel'kov, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow, 1987 [in Russian]. Zbl 0638.65001

[2] I.S. Berezin, N.P. Zhidkov, *Computing Methods*, Pergamon, Oxford, 1965; Nauka, Moscow, 1966. Zbl 0122.12903

[3] G. I. Shishkin, *Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations*, Ural Otd. Ross. Akad. Nauk, Yekaterinburg, 1992 [in Russian].

[4] J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin, *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition)*, World Scientific, Singapore, 2012. Zbl 1243.65002

[5] A.I. Zadorin, N.A. Zadorin, *Quadrature formulas for functions with a boundary-layer component*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **51**:11 (2011), 1837–1846. Zbl 1249.65053
[6] A.I. Zadorin, N.A. Zadorin, *An Analogue of the Four-Point Newton-Cotes Formula for a Function with a boundary-Layer Component*, Numerical Analysis and Applications, **6**:4 (2013), 268–278. Zbl 1299.65040
[7] A. Zadorin, N. Zadorin, *Quadrature Formula with Five Nodes for Functions with a Boundary Layer Component* , Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, **8236** (2013), 540–546. Zbl 06223323
[8] A.I. Zadorin, *Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids*, Numerical Analysis and Applications, **8**:3 (2015), 235–247.
[9] A.I. Zadorin, N.A. Zadorin, *Euler quadrature rule for a function with a boundary layer component on a picewise uniform mesh*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 491–503 [in Russian]. Zbl 06509089
[10] T. Lins, *The Necessity of Shishkin Decompositions*, Applied Mathematics Letters, **14** (2001), 891–896.

Alexander Ivanovich Zadorin
Sobolev Institute of Mathematics, Omsk branch,
ul. Pevtsova, 13,
644043, Omsk, Russia
E-mail address: zadorin@ofim.oscsbras.ru