S ⓔ MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1026–1034 (2016) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2016.13.081 MSC 58J32

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. МАЗЕПА

Abstract. In this paper we study the questions of the solvability for certain boundary and external boundary value problems for quasilinear elliptic equations on arbitrary non-compact Riemannian manifolds. We compare the behavior of unbounded functions "at infinity", using a new approach which is based on the consideration of equivalence classes of functions on M.

Keywords: quasilinear elliptic equation, boundary value problem, stability of the solvability, nonnegative solution, noncompact Riemannian manifolds, the Dirichlet problem.

1. Введение

Проблема разрешимости различных краевых задач (в том числе задачи Дирихле) для эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, с одной стороны, является достаточно интересной в анализе и геометрии, а с другой стороны, достаточно новым направлением в современной математике. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых поверхностей, основанной на изучении некоторых функциональных классов на поверхностях и развитой в работах А.Альфорса, А.Бейрлинга, Л.Сарио и других математиков. Общее представление об истории развития и современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работ [1]–[3].

Mazepa, E.A., On the solvability of boundary value problems for quasilinear elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

Поступила 1 апреля 2016 г., опубликована 22 ноября 2016 г.

Первоначально большее внимание уделялось изучению гармонических функций на многообразиях, т.е. решениям уравнения

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Считающаяся ныне классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. С другой стороны, класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции достаточно обширен. Более того, обнаружены множества некомпактных римановых многообразий, на которых разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным для случая идеальной границы. Заметим, что сама постановка задачи Дирихле на некомпактных римановых многообразиях может оказаться проблематичной, т.к. не ясно, как понимать граничные данные. В некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это аналогично постановке классической задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [4]–[6]). В тоже время, в работе [7] предложен достаточно новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

В последние годы достаточно активно изучаются решения квазилинейных уравнений вида

$$\Delta u = g(x, u), \tag{2}$$

с различными структурными требованиями на правую часть $g(x, \xi)$ (см., например, [8]–[11]).

В данной работе исследуется асимптотическое поведение неограниченных решений уравнения (2) на произвольном некомпактном римановом многообразии M. Будем полагать, что правая часть этого уравнения удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(x, \xi) \in C^\gamma(\Omega \times \mathbb{R})$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$;

2) $g(x, 0) \equiv 0$;

3) $g(x, \xi_1) \geq g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$.

Частным случаем уравнения (2) является, например, стационарное уравнение Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{3}$$

где $c(x)$ — неотрицательная функция.

Отдельный интерес вызывает установление взаимосвязи между выполнением лиувиллева свойства для решений различных эллиптических уравнений при вариациях некоторых членов этих уравнений, а также установление взаимосвязи между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для них на рассматриваемых многообразиях. Изучению указанных вопросов для уравнений (2) и (3) в классе ограниченных решений посвящены работы [7, 12, 13, 14, 16]. Заметим, что для уравнений (2) и (3) ненулевая постоянная не является решением, поэтому лиувиллево свойство для них формулируется несколько иначе, чем для гармонических функций. А именно, говорят, что на некомпактном многообразии M выполнено *лиувиллево свойство* для ограниченных решений уравнения (2) (в частности, (3)), если любое такое решение есть тождественный нуль.

В данной работе будут получены условия устойчивости разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнения (2) на произвольном полном гладком связном некомпактном римановом многообразии M в классе неограниченных решений при вариациях правой части $g(x,u)$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Доказательство основных результатов опирается на принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений на предкомпактных подмножествах многообразия M. Их справедливость доказывается также как и для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ (см., напр., [17], стр. 39-40). Кроме того, в работе применяются аналогичные утверждения для решений квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений.

Предложение 1. (Принцип сравнения 1). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное открытое подмножество, функции $u,\ v \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяют в Ω неравенствам*

$$\Delta u \geq g(x,u), \qquad \Delta v \leq g(x,v), \qquad u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}\,.$$

Тогда $u \leq v$ в Ω.

Предложение 2. (Принцип максимума). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное открытое подмножество и $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω неравенству $\Delta u \geq g(x,u)$ ($\Delta u \leq g(x,u)$). Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Если же $\Delta u = g(x,u)$ в Ω, то

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Подробные доказательства этих утверждений можно найти в [16].

2. Краевые и внешние краевые задачи

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные на M функции, $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей.

Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Ясно, что введенное отношение не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$.

Обозначим через v_k — решение уравнения (3) в $B_k \setminus B$, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Используя принцип максимума, легко проверить, что последовательность v_k равномерно ограничена на $M\setminus B$, и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве $G \subset (M\setminus B)$ (см., напр. [12].) Более того, при $k\to\infty$ она монотонно возрастает и сходится на $M\setminus B$ к решению уравнения (3)

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \quad 0 < v \le 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Функцию v называют *L-потенциалом компакта B относительно многообразия M* (см., напр., [7, 14]). Для уравнения Лапласа-Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см. [1]).

Многообразие M будем называть *L-строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G\subset M$ существует L-потенциал v такой, что $v\in[0]$ (если $L=\Delta$, то многообразие будем называть *Δ-строгим*).

Заметим (см. [7]), что из Δ-строгости многообразия M следует его L-строгость (обратное не верно). Кроме того, в работе [15] показано, что понятие L-строгости инвариантное относительно выбора компакта.

Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная функция $w\ge 0$ такая, что $w\sim f$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (2) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что $u\in[f]$.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная на ∂B функция. Будем говорить, что на $M\setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (2) *с граничными условиями* $(\Phi,[f])$, если на $M\setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что $u\in[f]$ и $u|_{\partial B}=\Phi|_{\partial B}$.

Аналогичным образом можно осуществить постановку краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях для уравнений (1), (3) и ряда других эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см. [7, 10, 11, 14, 15, 16]. Более того, в [15] доказано, что на L-строгом римановом многообразии M из разрешимости внешней краевой задачи для уравнения (3) с граничными условиями из класса $[f]$ следует разрешимость краевой задачи для уравнения (3) с граничными условиями из того же класса, и наоборот. Аналогичное утверждение имеет место и для решений уравнения Лапласа-Бельтрами на Δ-строгом многообразии M.

Замечание. Если многообразие M имеет компактный край или существует естественная геометрическая компактификация многообразия M (например, на многообразиях отрицательной секционной кривизны, на сферически-симметричных, квазимодельных многообразиях), добавляющая границу на бесконечности, данный подход естественным образом приводит к классической постановке задачи Дирихле (см., напр., [4]–[6]).

Используя предложения 1 и 2, нетрудно показать справедливость следующих утверждений (подробные доказательства можно найти в [16]).

Предложение 3. (Принцип сравнения 2). *Пусть $\Delta v\le g(x,v)$, $\Delta u\ge g(x,u)$ на $M\setminus B$, $v|_{\partial B}\ge u|_{\partial B}$, $v\sim u$. Тогда $v\ge u$ на $M\setminus B$.*

Пусть $\Delta v\le g(x,v)$, $\Delta u\ge g(x,u)$ на M и $v\sim u$. Тогда $v\ge u$ на M.

Предложение 4. (Теорема единственности). *Пусть* $\Delta v = g(x,v)$, $\Delta u = g(x,u)$ *на* $M \setminus B$ *и* $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $w = u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v = g(x,v)$, $\Delta u = g(x,u)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v = u$ *на* M.

Пусть $[f]$ — асимптотически неотрицательная на M функция. Далее наряду с решениями уравнения (2) будем рассматривать решения уравнений

$$\Delta u = g_i(x,u), \tag{4}$$

где функции $g_i(x,\xi)$ удовлетворяют структурным условиям 1)–3), $i = 0, 1$, и неравенству $g_0(x,\xi) \le g(x,\xi) \le g_1(x,\xi)$.

В следующих теоремах исследуются вопросы устойчивости разрешимости краевых и внешних краевых задач при вариациях правой части квазилинейного уравнения (2).

Теорема 1. *Пусть на* $M \setminus B$ *для любых неотрицательных констант* A *разрешимы внешние краевые задачи для уравнений* (4) *при* $i = 0, 1$ *с граничными условиями* $(A, [f])$. *Тогда на* $M \setminus B$ *для любой непрерывной на* ∂B *функции* $\Phi(x) \ge 0$ *для уравнения* (2) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями* $(\Phi, [f])$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная неотрицательная на ∂B функция. Обозначим $C_1 = \sup\limits_{\partial B} \Phi(x) \ge 0$. По условию существует функция u_0 — решение внешней краевой задачи для уравнения $\Delta u = g_0(x,u)$ на $M \setminus B$ такая, что $u_0 \in [f]$ и $u_0|_{\partial B} = C_1$. Причем $u_0 \ge 0$ на $M \setminus B$, что следует из асимптотической неотрицательности функции f.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решениями задачи

$$\Delta u_k = g(x,u_k) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \qquad u_k\,|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}\,.$$

Учитывая предложение 1, для всех k имеем

$$0 \le u_k \le u_0 \quad \text{в} \quad B_k \setminus B.$$

Покажем, что данная последовательность функций является монотонно убывающей. Для этого рассмотрим функции u_k и u_{k+1}, которые на множестве $B_k \setminus B$ являются решениями уравнения (2) и удовлетворяют следующим неравенствам

$$0 \le u_{k+1} \le u_0, \qquad u_k\,|_{\partial B} = u_{k+1}\,|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B} \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \ge u_{k+1}\,|_{\partial B_k}\,.$$

Используя предложение 1 в $B_k \setminus B$ для всех k, получаем $u_0 \ge u_k \ge u_{k+1}$.

Покажем теперь равномерную ограниченность последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$.

Так как $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то существует номер k_0 такой, что для всех $k \ge k_0$ выполнено $\Omega \subset\subset B_k \setminus B$. Тогда, учитывая монотонное убывание последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ и предложение 2, для всех $k \ge k_0$ во множестве Ω получаем

$$0 \le u_k \le \sup_{\Omega} u_0 \le \sup_{B_{k_0} \setminus B} u_0 = \max\{\sup_{\partial B_{k_0}} u_0, \sup_{\partial B} u_0\} = K,$$

т.е. выполнено условие равномерной ограниченности последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$.

Далее, используя внутренние оценки градиентов в комбинации с внутренними оценками в пространстве Гёльдера $C^\gamma(\Omega)$ производных для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M \setminus B$ (см., например, [17, с. 294, 346]), получаем, что семейство функций $g_k(x) = g_k(x, u_k(x))$ имеет равномерно ограниченные нормы в $C^\gamma(\Omega)$. Тогда с учетом внутренних оценок Шаудера [17, стр. 91, 94–95] получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$. Последнее влечет за собой существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является решением уравнения (2) на Ω таким, что $0 \le u \le u_0$.

Далее в качестве множества Ω будем брать последовательно множества $B_k \setminus B$ для $k = 1, 2, \dots$. Тогда на множестве $B_1 \setminus B$ существует предельная функция

$$u^1 = \lim_{k\to\infty} u_{1,k}$$

— решение уравнения (2), где $\{u_{1,k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_k\}$. Кроме того, $u^1 \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Далее, рассмотрим подпоследовательность $\{u_{1,k}\}$ как последовательность решений уравнения (2) на множестве $B_2 \setminus B$. Тогда на этом множестве существует предельная функция

$$u^2 = \lim_{k\to\infty} u_{2,k}$$

— решение уравнения (2) такое, что $u^2 \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$. Здесь $\{u_{2,k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_{1,k}\}$. Причем, в силу единственности существования предела сходящейся подпоследовательности, функция u^2 является продолжением функции u^1, т.е. $u^2 \mid_{B_1 \setminus B} = u^1$. Продолжая процесс для любого n, имеем, на множестве $B_n \setminus B$ существует предельная функция

$$u^n = \lim_{k\to\infty} u_{n,k}$$

— решение уравнения (2) такое, что $u^n \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$, u^n является продолжением функции u^{n-1}, т.е. $u^n \mid_{B_{n-1} \setminus B} = u^{n-1}$. Кроме того, для всех n выполнено $0 \le u^n \le u_0$.

Рассмотрим функцию

$$u = \begin{cases} u^1 & \text{на} \quad B_1 \setminus B, \\ u^2 & \text{на} \quad B_2 \setminus B_1, \\ \dots & \\ u^n & \text{на} \quad B_n \setminus B_{n-1}, \\ \dots & \end{cases}$$

Она будет являться решением уравнения (2) на множестве $M \setminus B$. Причем $0 \le u \le u_0$ и $u \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Покажем, что $u \sim f$.

Согласно условию на $M \setminus B$ существует решение v_0 уравнения $\Delta u = g_1(x, u)$ такое, что $v_0|_{\partial B} = 0$ и $v_0 \in [f]$. Используя предложение 3, на $M \setminus B$ получаем $u_0 \ge v_0 \ge 0$, где u_0 — функция, определенная выше.

Более того, для каждого k имеют место следующие неравенства

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \le g_1(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B,$$

$$v_0|_{\partial B} \le u_k \mid_{\partial B}, \quad v_0|_{\partial B_k} \le u_k \mid_{\partial B_k}.$$

Тогда с учетом предложения 1 в $B_k \setminus B$ имеем $u_k \geq v_0$, и, следовательно, $u_0 \geq u_k \geq v_0 \geq 0$. Аналогичное неравенство имеет место и для элементов подпоследовательности $u_0 \geq u_{n,k} \geq v_0 \geq 0$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ для каждого n на $B_n \setminus B$, получаем $u_0 \geq u^n \geq v_0$. Учитывая вид функции u и условие $u_0 \sim v_0 \sim f$, окончательно имеем $u \sim f$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть на M разрешимы краевые задачи для уравнений* (4) *при* $i = 0, 1$ *с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на M для уравнения* (2) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Доказательство. Пусть функция u_0 — решение краевой задачи для уравнения $\Delta u = g_0(x, u)$ на M такая, что $u_0 \in [f]$. Причем из асимптотической неотрицательности f следует, что $u_0 \geq 0$ на M.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решениями задачи

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k \mid_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

Учитывая предложение 1, для всех k имеем

$$0 \leq u_k \leq u_0 \quad \text{в} \quad B_k.$$

Как и в предыдущей теореме легко показать, что последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей и равномерно ограниченной на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Действительно, так как $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то существует номер k_0 такой, что для всех $k \geq k_0$ выполнено $\Omega \subset\subset B_k$. Рассмотрим функции u_k и u_{k+1}, которые на множестве B_k являются решениями уравнения (2) и удовлетворяют следующим неравенствам

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_0, \qquad u_k \mid_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \geq u_{k+1} \mid_{\partial B_k}.$$

Используя предложение 1 в B_k для всех k, получаем $u_0 \geq u_k \geq u_{k+1}$.

Покажем равномерную ограниченность. Учитывая монотонное убывание последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ и предложение 2, для всех $k \geq k_0$ во множестве Ω получаем

$$0 \leq u_k \leq \sup_{\Omega} u_0 \leq \sup_{B_{k_0}} u_0 = \sup_{\partial B_{k_0}} u_0 = K,$$

то есть последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$.

Далее, как и в предыдущей теореме, доказывается компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$ и строится предельная функция $u = \lim\limits_{k \to \infty} u_k$ которая будет являться решением уравнения (2) на многообразии M. Причем $0 \leq u \leq u_0$.

Покажем, что $u \sim f$.

Согласно условию на M существует решение v_0 уравнения (4) при $i = 1$, т.е. $\Delta v_0 = g_1(x, v_0)$ такое, что $v_0 \in [f]$. Используя предложение 3, на M получаем $u_0 \geq v_0 \geq 0$.

Более того, для каждого k имеют место следующие неравенства

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \leq g_1(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k,$$

$$v_0|_{\partial B_k} \leq u_0 \mid_{\partial B_k} = u_k \mid_{\partial B_k}.$$

Тогда по предложению 1 в B_k имеем $u_k \geq v_0$, и, следовательно, $u_0 \geq u_k \geq v_0 \geq 0$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $u_0 \geq u \geq v_0$. Учитывая условие $u_0 \sim v_0 \sim f$, получаем $u \sim f$. Теорема доказана. □

Пусть дополнительно правая часть уравнения (2) удовлетворяет следующему условию: существует функция $0 \leq c(x) \in C^\gamma(\Omega)$ такая, что $0 \leq g(x,\xi) \leq c(x)\xi$ при $\xi \geq 0$. Тогда имеет место следствие.

Следствие 1. *Пусть многообразие M является Δ-строгим и на $M \setminus B$ для любых неотрицательных констант разрешимы внешние краевые задачи для линейных уравнений* (1) *и* (3) *с граничными условиями* $(A,[f])$. *Тогда*

1) *на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \geq 0$ для уравнения* (2) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями* $(\Phi,[f])$*;*
2) *на M для уравнения* (2) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Замечание. Частный случай данного результата для уравнения вида $\Delta u = \phi(|u|)u$, где $\phi(\xi) \geq 0$ — монотонно неубывающая функция класса C^1 при $\xi \geq 0$, был получен ранее (см. [19]).

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 1. Достаточно рассмотреть уравнения (4) с правыми частями $g_0(x,u) \equiv 0$ и $g_1(x,u) = c(x)u$.

Для доказательства второго утверждения заметим еще раз, что из Δ-строгости многообразия M следует его L-строгость. Кроме того, в работе [15] показано, что на таких многообразиях для уравнений (1) и (3) из разрешимости на $M \setminus B$ внешних краевых задач с граничными условиями из класса $[f]$ следует разрешимость краевых задач на всем многообразии M с граничными условиями из того же класса $[f]$. Таким образом, на всем многообразии M разрешимы краевые задачи для линейных уравнений (1) и (3) с граничными условиями из класса $[f]$. Далее, применяя теорему 2 для уравнений (4) с правыми частями $g_0(x,u) \equiv 0$ и $g_1(x,u) = c(x)u$, получаем разрешимость краевой задачи с граничными условиями из класса $[f]$ для уравнения (2) на всем многообразии M.

□

References

[1] A. Grigor'yan, *Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **36** (1999), 135–249. Zbl 0927.58019

[2] B. Gidas, J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of non-linear elliptic equations*, Comm. pure Appl. Math., **34** (1981), 525–598. Zbl 0465.35003

[3] J. Serrin, H. Zou, *Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*, Acta Math., **189**:1 (2002), 79–142. Zbl 1059.35040

[4] M. T. Anderson, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 701–721. Zbl 0541.53036

[5] A. G. Losev, E. A. Mazepa, *On the asymptotic behavior of solutions of certain equations elliptic type on noncompact Riemannian manifolds*, Soviet Mathematics, **6** (1999), 41–49. Zbl 0988.58008

[6] A. G. Losev, E. A. Mazepa, *Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products*, St. Petersburg Mathematical Journal, **13**:1 (2001), 84–110.
[7] E.A. Mazepa, *Boundary value problems for the stationary equation Schrödinger on Riemannian manifolds*, Siberian Mathematical Journal, **43**:3 (2002), 591–599. Zbl 1074.58502
[8] A.A. Kon'kov, *Behavior of solutions of quasilinear elliptic inequalities*, **7** (2004), 3–158.
[9] V. A. Kondratiev, E. M. Landis, *On qualitative properties of solutions of a nonlinear second-order equation*, Sbornik Mathamatics, **135**:3 (1988), 346–360. Zbl 0658.35033
[10] E.A. Mazepa, *Boundary Value Problems and Liouville theorems for semilinear elliptic equations on Riemannian manifolds*, Izvestiya VUZ, **49**:3 (2005), 59–66. Zbl 1116.58022
[11] E. A. Mazepa, *On the existence of entire solutions of a semilinear elliptic equation on noncompact Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, **81**:1 (2007), 153–156. Zbl 1127.58019
[12] A. A. Grigor'yan, N. S. Nadirashvili, *Liouville theorems and exterior boundary value problems*, Soviet Mathematics, **31**:5 (1987), 31–42. Zbl 0665.58040
[13] A. G. Losev, *The relationship between some Liouville theorems on Riemannian manifolds of a special type*, Soviet Mathematics, **41**:10 (1997), 31–37. Zbl 0927.58021
[14] S. A. Korol'kov, A. G. Losev, *Solutions for elliptic equations on Riemannian manifolds with ends*, Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, **14**:1 (2011), 23–40.
[15] A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko, *Unbounded solutions of the stationary of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds*, CMFT, **3**:2 (2003), 443–451.
[16] E. A. Mazepa, *On the asymptotic behavior of solutions of some semilinear elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds*, Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, **14**:1 (2011), 41–59.
[17] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math Wiss., Bd. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. Zbl 0562.35001
[18] A. G. Losev, *Some Liouville theorems on noncompact Riemannian manifolds*, Siberian Mathematical Journal, **39**:1 (1998), 87–93. Zbl 0946.58015
[19] E. A. Mazepa, *On the solvability of boundary value problems for semilinear elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds*, Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, **23**:4 (2014), 36–44.

Elena Alexeevna Mazepa
Volgograd State University,
pr. Universitetsky, 100,
400062, Volgograd, Russian Federation
E-mail address: lmazepa@rambler.ru