S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1040–1051 (2016) УДК 519.17+512.54
DOI 10.17377/semi.2016.13.083 MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$

В.В. БИТКИНА, А.К. ГУТНОВА, А.А. МАХНЕВ

Abstract. It was proved that a distance-regular graph in which neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters (245,64,18,16) has intersection array $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ or $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. In this paper we found the automorphisms of a distance regular graph with intersection array $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$. It is proved that a vertex-transitive distance-regular graph with intersection array $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ is the arc-transitive Mathon graph affording the group $L_2(3^5)$.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через

Bitkina, V.V., Gutnova, A.K., Makhnev, A.A., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 15-11-10025 (теоремы 1, 2, следствия 1, 2), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 3).

Поступила 9 ноября 2016 г., опубликована 24 ноября 2016 г.

$\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x,y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] завершена классификация дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными непсевдогеометрическими графами со вторым собственным значением 4. Дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (243,22,1,2), имеет массив пересечений $\{243,220,1;1,22,243\}$ или $\{243,220,1;1,4,243\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243,220,1;1,22,243\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{243,220,1;1,22,243\}$. Тогда Γ имеет $v=1+243+2430+10=2684$ вершин и спектр $243^1, 9\sqrt{3}^{1220}, -1^{243}, -9\sqrt{3}^{1220}$ (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{243,220,1;1,22,243\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ *пересекает* t *антиподальных классов по* s *вершинам. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,61\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=2$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=244$, *либо* $p=11$, $\alpha_3(g)=11(11l+2)$, $\alpha_1(g)=594m+242-11l$, *либо* $p=61$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=244$*;*

(2) $t=1$, $p=3$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=243$*;*

(3) $p=11$, *либо* $t=2$, *либо* $t=13$ *и каждая связная компонента графа* Ω *является* 13*-кликой или графом* $K_{13,13}$ *с удаленным максимальным паросочетанием;*

(4) $p=7$, *либо* $s=11$, $t=13,20$, *причем в случае* $t=13$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{12,10,1;1,1,12\}$, *либо* $s=4$, $t=13,20,...,55$*;*

(5) $p=5$, $s=6$, $t=14,19,...,39$, *причем в случае* $t=14$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{13,10,1;1,2,13\}$*;*

(6) $p=3$ *и либо*

(*i*) $s=11$, $t=13,16,19,22$, *в случае* $t=13$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{12,10,1;1,1,12\}$, *либо*

(*ii*) $s=8$, $t=13,16,...,28$, *либо*

(*iii*) $s=5$, $t=7,10,...,46$, *причем в случае* $t=7$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{6,4,1;1,1,6\}$, *либо*

(*iv*) $s=2$, $t=10,13,...,46$, *причем в случае* $t=46$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{45,22,1;1,22,45\}$*;*

(7) $p=2$ *и либо*

(*i*) $s=9$, $t=20,22,...,26$, *причем в случае* $t=20$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{19,16,1;1,2,19\}$, *либо*

(*ii*) $s=7$, $t=16,18,...,34$, *причем в случае* $t=16$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{15,12,1;1,2,15\}$, *либо* *(iii)* $s = 5$, $t = 12, 14, ..., 48$, *причем в случае* $t = 12$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$, *либо*

(iv) $s = 3$, $t = 8, 10, ..., 68$, *причем в случае* $t = 8$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, *а в случае* $t = 68$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{67, 44, 1; 1, 22, 67\}$.

Результаты теоремы 1 уточняются в теореме 3 с помощью описания автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(243, 22, 1, 2)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(243, 22, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 27l$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 11$, $\alpha_1(g) = 99l + 22$, *либо* $p = 5$, $n = 3$, $\alpha_1(g) = 45l - 15$, *либо* $p = 2$, $n = 3$, $\alpha_1(g) = 18l - 6$;

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $p = 2$, $m = 2t + 1$, $t \leq 13$, $\alpha_1(g) = 18l + 4 - 10t$;

(4) *если* Ω *является объединением изолированных клик, то либо* Ω *— клика или коклика, либо* $p = 2$, Ω *является объединением* m *изолированных вершин и* n *треугольников;*

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(i) $p = 3$, Ω *— сильно регулярный подграф с параметрами* $(9, 4, 1, 2)$ *и* $\alpha_1(g) = 27l + 9 \leq 72$, *либо*

(ii) $p = 2$, $|\Omega| = 2l + 1 \leq 27$, *каждая связная компонента графа* Ω *является треугольником, сильно регулярным графом с параметрами* $(9, 4, 1, 2)$ *или графом диаметра 3 степени 6 и с не менее чем* 21 *вершиной.*

Теорема 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(243, 22, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *— непустой граф, пересекающий* t *антиподальных классов по* s *вершинам. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 61\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $t = 1$, $p = 3$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 243$;

(2) $p = 7$, $s = 4$, $t = 34, 41, 48, 55$, *причем в случае* $t = 34$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{33, 24, 1; 1, 8, 33\}$;

(3) $p = 5$, $s = 6, t = 39$ *и подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{38, 35, 1; 1, 7, 38\}$;

(4) $p = 3$ *и либо*

(i) $s = 5$, $t = 22, 25, ..., 46$, *причем в случае* $t = 22$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{21, 16, 1; 1, 4, 21\}$, *либо*

(ii) $s = 2$, $t = 10, 13, ..., 46$, *причем в случае* $t = 10$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{9, 4, 1; 1, 4, 9\}$, *а в случае* $t = 46$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{45, 22, 1; 1, 22, 45\}$;

(5) $p = 2$ *и либо*

(i) $s = 7$, $t = 28, 30, 32, 34$, *причем в случае* $t = 28$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 4, 27\}$, *либо*

(ii) $s = 5$, $t = 20, 22, ..., 48$, причем в случае $t = 20$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{19, 16, 1; 1, 4, 19\}$, либо

(iii) $s = 3$, $t = 12, 14, ..., 68$, причем в случае $t = 12$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{11, 8, 1; 1, 4, 11\}$, а в случае $t = 68$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{67, 44, 1; 1, 22, 67\}$.

Следствие 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(243, 22, 1, 2)$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и 11 делит $|G/S(G)|$. Тогда G — полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка 243 и группы M_{11}.*

Следствие 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, F — антиподальный класс и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $S(G) = 1$, цоколь T группы G изоморфен $L_2(3^5)$, $T_{\{F\}}$ — расширение элементарной абелевой группы порядка 243 с помощью циклической группы порядка 121 и Γ — реберно симметричный граф Мэтона.*

2. Сильно регулярный случай

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, R) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $d(u, w) = i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 1 ([4], лемма 2). *Пусть O_K — кольцо целых алгебраических чисел поля K. Если d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа,*

$K = Q(d^{1/2})$ — соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца O_K равен $(1,(1+d^{1/2})/2)$, если $d \equiv 1$ $(mod\ 4)$, и $(1, d^{1/2})$, если $d \equiv 2,3$ $(mod\ 4)$.

В леммах 2–4 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(243, 22, 1, 2)$ и спектром $22^1, 4^{132}, -5^{110}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Далее, порядок клики в Γ не больше 3, порядок коклики в Γ не больше 45. Наконец, $|\Omega| \le 243 \cdot 2/18 = 27$.

Лемма 2. *Пусть $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 132. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/9 - 3$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 132$ делится на p, а если $|g| = p^2$, p — простое число, то $\chi_1(g^p) - 132$ делится на p^2.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 132 & 24 & -3 \\ 110 & -25 & 2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/81$. Подставляя $\alpha_2(g) = 243 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/9 - 3$.

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1–2 [5].

Лемма 3. *Пусть g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p = 2$, то любая вершина $u \in \Gamma - \Omega$ смежна с нечетным числом вершин из Ω, если $d(u, u^g) = 1$, с четным числом вершин из Ω, если $d(u, u^g) = 2$;*

(2) *если Ω — пустой граф, то $p = 3$, $\alpha_1(g) = 27l$ и $\alpha_2(g) = 243 - 27l$;*

(3) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 11$, $\alpha_1(g) = 99l + 22$ и $\alpha_2(g) = 220 - 99l$, либо $p = 5$, $n = 3$, $\alpha_1(g) = 45l - 15$, либо $p = 2$, $n = 3$, $\alpha_1(g) = 18l - 6$;*

(4) *если Ω является m-кокликой, $m \ge 2$, то $p = 2$, $m = 2t + 1$, $t \le 13$, $\alpha_1(g) = 18l + 4 - 10t$;*

(5) *если Ω является объединением изолированных клик, то либо Ω — клика или коклика, либо $p = 2$, Ω является объединением m изолированных вершин и n треугольников.*

Доказательство. Так как $\lambda = 1$, $\mu = 2$, то выполняется утверждение (1).

Если Ω — пустой граф, то $p = 3$, $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/9 - 3$, $\chi_1(g) - 132$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 27l$.

Если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 11$, либо p делит 20 и $n - 3$, поэтому $p = 2, 5$.

Если $p = 11$, то $\chi_1(g) = (5 + \alpha_1(g))/9 - 3$ и $\alpha_1(g) = 99l + 22$, $l \le 2$.

Если $p = 5$, то $n = 3$, число $\chi_1(g) = (15 + \alpha_1(g))/9 - 3$ сравнимо с 2 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 45l - 15$. Если $p = 2$, то $n = 3$, число $\chi_1(g) = (15 + \alpha_1(g))/9 - 3$ четно и $\alpha_1(g) = 18l - 6$.

Если Ω является m-кокликой, $m \ge 2$, то p делит 2 и $201 - n$, поэтому $p = 2$, $m = 2t + 1$, $t \le 13$, число $\chi_1(g) = (10t + 5 + \alpha_1(g))/9 - 3$ четно и $\alpha_1(g) = 18l + 4 - 10t$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда $p = 2$, Ω является объединением m изолированных вершин и n треугольников.

Лемма 4. *Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 1, 2)$, то Δ имеет параметры $(9, 4, 1, 2)$, 162 вершины из $\Gamma - \Delta$ смежны с единственной вершиной из Δ и 72 вершины из $\Gamma - \Delta$ не смежны с вершинами из Δ;*

(2) *если $p = 3$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ и $\alpha_1(g) = 27l + 9 \le 72$;*

(3) $p = 2$, $|\Omega| = 2l+1$, $l \in \{2, ..., 13\}$, *каждая связная компонента графа Ω является треугольником, сильно регулярным графом с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ или графом диаметра 3 степени 6 и с не менее чем 21 вершиной.*

Доказательство. Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 1, 2)$. Тогда $n^2 = 1 + 4(k' - 2)$, $n = 2u + 1$, $k' = u^2 + u + 2$, Δ имеет собственные значения $u, -(u + 1)$ и кратность u равна $u(u^2+u+2)(u^2+2u+3)/(2(2u+1))$. Отсюда Δ имеет параметры $(9, 4, 1, 2)$ или $(99, 14, 1, 2)$. Но в последнем случае число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно 792 и некоторая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна по крайней мере с 6 вершинами из Δ, противоречие.

В случае $(9, 4, 1, 2)$ 162 вершины из $\Gamma - \Delta$ смежны с единственной вершиной из Δ и 72 вершины из $\Gamma - \Delta$ не смежны с вершинами из Δ.

Если $p > 2$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ и $p = 2, 3$. В случае $p = 3$ число $\chi_1(g) = (45 + \alpha_1(g))/9 - 3$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 27l + 9$. Далее, вершина u, смежная с u^g, не смежна с вершинами из Ω, поэтому $\alpha_1(g) \le 72$.

Пусть $p = 2$, $|\Omega| = 2l + 1$, $l \in \{2, ..., 13\}$. Тогда каждая связная компонента графа Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 1, 2)$. Далее, каждая связная компонента графа Ω является треугольником, сильно регулярным графом с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ или графом диаметра 3 степени 6 и с не менее чем 21 вершиной.

Из лемм 2–4 следует теорема 2.

3. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$

В леммах 5–8 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ и спектром $243^1, 9\sqrt{3}^{1220}, -1^{243}, -9\sqrt{3}^{1220}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 1220, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 243. Ввиду границы Дельсарта для клик имеем $|C| \le 1 - k/\theta_d$ для любой клики C и $|C| \le 16$.

Лемма 5. *Имеем $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/22 + \sqrt{3}(10\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/594$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/11 - 1$ и $\chi_2(g) - 243$ делится на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1220 & 1220\sqrt{3}/27 & -122\sqrt{3}/27 & -122 \\ 243 & -1 & -1 & 243 \\ 1220 & -1220\sqrt{3}/27 & 122\sqrt{3}/27 & -122 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/22 + \sqrt{3}(10\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/594$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (243\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 243\alpha_3(g))/2684$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 2684 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/11 - 1$.

Последнее утверждение леммы следует из [4, лемма 1].

Заметим, что для элемента $g \in G$ значение характера $\chi_1(g)$ является суммой $n = 1220$ корней из 1 степени p. Если $p = 2, 3$, то значение характера — вещественное число, поэтому $10\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 0$.

Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x, и положим $F(a) = \{a, a_2, ..., a_{11}\}$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 244$, *либо* $p = 11$, $\alpha_3(g) = 11(11l + 2) < 2684$, $\alpha_1(g) = 594m + 242 - 11l$, l *четно, либо* $p = 61$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 244$*;*

(2) *если* $t = 1$, *то* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 243$*;*

(3) *число* s *не равно* 1.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф.Так как $v = 4 \cdot 11 \cdot 61$, то $p = 2, 11, 61$.

Если $p = 61$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 2684$, $\chi_1(g) = \sqrt{3}(\alpha_1(g) - 244)/54$ и $\alpha_1(g) = 244$.

Если $p = 11$, то $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/11 - 1$ и $\chi_2(g) - 243$ делится на 11, поэтому $\alpha_3(g) = 11(11l + 2)$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 2662 - 121l$, $\chi_1(g) = -(11l + 2)/2 + 11\sqrt{3}(\alpha_1(g)/11 - 22 + l)/54$ и $\alpha_1(g) = 594m + 242 - 11l$, l четно. Если $\alpha_3(g) = 2684$, то $\langle g \rangle$ действует регулярно на каждом антиподальном классе и число $r = 11$ делит $k + 1 = 244$, противоречие.

Если $p = 2$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 2684$, $\chi_1(g) = \sqrt{3}(\alpha_1(g) - 244)/54$ и $\alpha_1(g) = 244$.

Если $t = 1$, то p делит 243, поэтому $p = 3$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 10\alpha_1(g)$ и $\chi_1(g) = 5$,

Если $s = 1$, то p делит $11 - s$, $24 - t$ и $244 - t$, поэтому $p = 2, 5$. В случае $p = 5$ имеем $t = 4, 9, 14$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/11 - 1 = t/11 - 1$, противоречие. В случае $p = 2$ имеем $t = 2, 4, ..., 16$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/11 - 1 = t/11 - 1$, противоречие.

Лемма 7. *Если* $p \geq 11$, *то* $p = 11$ *и либо* $t = 2$, $\alpha_1(g) = 242$, *либо* $t = 13$, $\alpha_1(g) = 231$ *и каждая связная компонента графа* Ω *является* 13*-кликой или графом* $K_{13,13}$ *с удаленным максимальным паросочетанием.*

Доказательство. Если $p > 7$, то $s = 11$, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $244 - t$. Каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна ровно с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 22$. Если $p > 19$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t-1, t-24, 1; 1, 22, t-1\}$. В этом случае $t-24 = 10 \cdot 22$, противоречие.

Пусть $p = 19$. Тогда $t = 16$ и $\mu_\Omega = 3$, противоречие с тем, что $b_1(\Omega) = 30$.

Случаи $p = 13, 17$ рассматриваются аналогично.

Пусть $p = 11$. Тогда $t = 2$ и $\lambda_\Omega = \mu_\Omega = 0, 11$. В случае $t = 13$ связная компонента графа Ω является 13-кликой или графом $K_{13,13}$ с удаленным максимальным паросочетанием. В случае $t = 2$ имеем $\alpha_1 + \alpha_2(g) = 2662$, $\chi_1(g) = 10 + \sqrt{3}(\alpha_1(g) - 242)/54$, поэтому $\alpha_1(g) = 242$. В случае $t = 13$ имеем $\alpha_1 + \alpha_2(g) = 2541$, $\chi_1(g) = 65 + \sqrt{3}(\alpha_1(g) - 231)/54$, поэтому $\alpha_1(g) = 231$.

Лемма 8. *Если $p \leq 7$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 7$, *либо* $s = 11$, $t = 13, 20$, *причем в случае* $t = 13$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$, *либо* $s = 4$, $t = 13, 20, ..., 55$;

(2) $p = 5$, $s = 6$, $t = 14, 19, ..., 39$, *причем в случае* $t = 14$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$;

(3) $p = 3$ *и либо*

(i) $s = 11$, $t = 13, 16, 19, 22$, *в случае* $t = 13$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$, *либо*

(ii) $s = 8$, $t = 13, 16, ..., 28$, *либо*

(iii) $s = 5$, $t = 7, 10, ..., 46$, *причем в случае* $t = 7$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{6, 4, 1; 1, 1, 6\}$, *либо*

(iv) $s = 2$, $t = 10, 13, ..., 46$, *причем в случае* $t = 46$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{45, 22, 1; 1, 22, 45\}$;

(4) $p = 2$ *и либо*

(i) $s = 9$, $t = 20, 22, ..., 26$, *причем в случае* $t = 20$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{19, 16, 1; 1, 2, 19\}$, *либо*

(ii) $s = 7$, $t = 16, 18, ..., 34$, *причем в случае* $t = 16$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, *либо*

(iii) $s = 5$, $t = 12, 14, ..., 48$, *причем в случае* $t = 12$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$, *либо*

(iv) $s = 3$, $t = 8, 10, ..., 68$, *причем в случае* $t = 8$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, *а в случае* $t = 68$ *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{67, 44, 1; 1, 22, 67\}$.

Доказательство. Пусть $p = 7$. Тогда $t = 6, 13, ..., 55$, $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \geq 1$. Поэтому для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее двух вершин из $a^\perp$ и по одной вершине, смежной с $a_2, ..., a_s$.

Если $s = 11$, то $t = 13, 20$. В случае $t = 13$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$. Если $s = 4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $4t(244 - t)$, но не больше $11(244 - t)22$, поэтому $t = 6, 13, ..., 55$. В случае $t = 6$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{5, 3, 1; 1, 1, 5\}$, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $t = 4, 9, ..., 39$, $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \geq 2$. Поэтому для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее трех вершин из $a^\perp$ и по две вершины, смежные с $a_2, ..., a_s$.

Если $s = 11$, то $t \geq 24$, противоречие. Если $s = 6$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $6t(244 - t)$, но не больше $11(244 - t)22$, поэтому $t = 14, 19, ..., 39$.

В случае $t = 14$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $t = 2, 4, ..., 46$, $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \geq 2$. Поэтому для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее трех вершин из $a^\perp$ и по две вершины, смежные с $a_2, ..., a_s$.

Если $s = 11$, то $t = 24$, противоречие.

Если $s = 9$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $9t(244 - t)$, но не больше $11(244 - t)22$, поэтому $t = 20, 22, ..., 26$. В случае $t = 20$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{19, 16, 1; 1, 2, 19\}$.

Если $s = 7$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $7t(244 - t)$, но не больше $11(244 - t)22$, поэтому $t = 16, 18, ..., 34$. В случае $t = 16$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$.

Если $s = 5$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5t(244 - t)$, но не больше $11(244 - t)22$, поэтому $t = 12, 14, ..., 48$. В случае $t = 12$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$.

Если $s = 3$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $3t(244 - t)$, но не больше $11(244 - t)22$, поэтому $t = 8, 10, ..., 80$. В случае $t = 8$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$. Лемма доказана.

Из лемм 6–8 следует теорема 1.

Докажем теорему 3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(243, 22, 1, 2)$,$G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ — непустой граф, пересекающий t антиподальных классов по s вершинам. Тогда степень вершины в любом μ-подграфе равна 2 (в частности, $\mu_\Omega \geq 3$) и пересечение окрестностей вершин любой 3-клики содержит единственную вершину.

По теореме 1 верно одно из утверждений:

(1) $t = 1$, $p = 3$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 243$;

(2) $p = 11$, либо $t = 2$, либо $t = 13$ и каждая связная компонента графа Ω является 13-кликой или графом $K_{13,13}$ с удаленным максимальным паросочетанием;

(3) $p = 7$, либо $s = 11$, $t = 13, 20$, причем в случае $t = 13$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$, либо $s = 4$, $t = 13, 20, ..., 55$;

(4) $p = 5$, $s = 6$, $t = 14, 19, ..., 39$, причем в случае $t = 14$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$;

(5) $p = 3$ и либо

(*i*) $s = 11$, $t = 13, 16, 19, 22$, в случае $t = 13$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$, либо

(*ii*) $s = 8$, $t = 13, 16, ..., 28$, либо

(*iii*) $s = 5$, $t = 7, 10, ..., 46$, причем в случае $t = 7$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{6, 4, 1; 1, 1, 6\}$, либо

(*iv*) $s = 2$, $t = 10, 13, ..., 46$, причем в случае $t = 46$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{45, 22, 1; 1, 22, 45\}$;

(6) $p = 2$ и либо

(*i*) $s = 9$, $t = 20, 22, ..., 26$, причем в случае $t = 20$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{19, 16, 1; 1, 2, 19\}$, либо

(ii) $s=7$, $t=16,18,...,34$, причем в случае $t=16$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{15,12,1;1,2,15\}$, либо

(iii) $s=5$, $t=12,14,...,48$, причем в случае $t=12$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{11,8,1;1,2,11\}$, либо

(iv) $s=3$, $t=8,10,...,68$, причем в случае $t=8$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7,4,1;1,2,7\}$, а в случае $t=68$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{67,44,1;1,22,67\}$.

Так как Γ не содержит 5-клик, то в случае (2) каждая связная компонента Δ графа Ω является графом $K_{13,13}$ с удаленным максимальным паросочетанием. Теперь для двух вершины a_1,a_2 из 13-коклики графа Δ и для вершины $b\in[a_1]\cap\Delta(a_2)$ степень b в графе $[a_1]\cap[a_2]$ равна 2, противоречие.

В случае (3) для $b\in\Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее девяти вершин из $a^{\perp}$ и по восемь вершин, смежных с $a_2,...,a_s$. Поэтому $s=4$, $t=34,41,48,55$, причем в случае $t=34$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{33,24,1;1,8,33\}$.

В случае (4) для $b\in\Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее трех вершин из $a^{\perp}$ и по семь вершин, смежных с $a_2,...,a_s$. Отсюда $s=6,t=39$ и подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{38,35,1;1,7,38\}$.

В случае (5) для $b\in\Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее пяти вершин из $a^{\perp}$ и по четыре вершины, смежных с $a_2,...,a_s$. Отсюда либо

(i) $s=5$, $t=22,25,...,46$, причем в случае $t=22$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{21,16,1;1,4,21\}$, либо

(ii) $s=2$, $t=10,13,...,46$, причем в случае $t=10$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{9,4,1;1,4,9\}$, а в случае $t=46$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{45,22,1;1,22,45\}$.

В случае (6) для $b\in\Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее трех вершин из $a^{\perp}$ и по четыре вершины, смежных с $a_2,...,a_s$. Отсюда либо

(i) $s=7$, $t=28,30,32,34$, причем в случае $t=28$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{27,24,1;1,4,27\}$, либо

(ii) $s=5$, $t=20,22,...,48$, причем в случае $t=20$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{19,16,1;1,4,19\}$, либо

(iii) $s=3$, $t=12,14,...,68$, причем в случае $t=12$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{11,8,1;1,4,11\}$, а в случае $t=68$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{67,44,1;1,22,67\}$.

Теорема 3 доказана. Докажем следствие 1.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(243,22,1,2)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ и 11 делит $|G=G/S(G)|$.

Лемма 9. *Пусть f — элемент порядка 11 из G, g — элемент простого порядка p из $C_G(f)$, $p\neq 11$. Тогда $|\Omega|=23$, $p=2$ и $\alpha_1(g)=110,308$.*

Доказательство. По теореме 2 $\mathrm{Fix}(f)=\{a\}$ — одновершинный граф, $\alpha_1(f)=99l+22$, $|\Omega|=23$, $p=2$ и $\alpha_1(g)=18l-106$ делится на 11, поэтому $\alpha_1(g)=110,308$. Лемма доказана.

Так как $v=3^5$, то $S(G)$ является 3-группой. Пусть $\bar{T}$ – цоколь группы $\bar{G}=G/S(G)$. По таблице 1 [6] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 3^5, то $\bar{T} = \bar{T}_a$ и $S(G)$ — группа порядка 243, не пересекающая G_a. Заметим, что $\bar{T}$ изоморфно вкладывается в группу $L_5(3)$, поэтому $S(G)$ — элементарная абелева группа порядка 243 и $\bar{T} \cong M_{11}$. Следствие 1 доказано.

Докажем следствие 2. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, F — антиподальный класс, содержащий вершину a и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 2684 = 244 \cdot 11$.

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент порядка 61 из G, g — элемент простого порядка p из $C_G(f)$, $p \neq 61$, то $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 244$, $\mathrm{Fix}(g)$ — пустой граф, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 244$;*

(2) *$|G|$ не делится на 11^3;*

(3) *разрешимый радикал $S(G)$ является 2-группой;*

(4) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(3^5)$.*

Доказательство. По теореме 1 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 244$, Ω — также пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 244$.

Пусть $|G|$ делится на 11^3, P — силовская 11-подгруппа из G. Тогда P_a — подгруппа индекса 11 из P и P — полупрямое произведение P_a на группу $\langle g \rangle$ порядка 11. Далее, P фиксирует два антиподальных класса, один из которых — F. Отсюда $\langle g \rangle$ действует транзитивно на F и без неподвипжных точек на Γ. Пусть U — нормальная в P подгруппа порядка 121 из P_a. Если $U = \langle h \rangle$, $f = h^{11}$, то $\alpha_1(f) = 242$, противоречие с действием группы $U\langle g \rangle$ на $\{u \in \Gamma \mid d(u, u^f) = 1\}$. Значит, группа $U = \langle f, h \rangle$ является элементарной абелевой.

Если x — число подгрупп порядка 11 из U, фиксирующих 13 антиподальных классов из Γ, то $244 - (2 + 11x)$ делится на 121, поэтому $x = 0, 11$. Из действия $U\langle g \rangle$ на множестве указанных антиподальных классов следует, что $242 - 11x = 11l$, где $\alpha_3(g) = 11(11l + 2)$. Так как l — четное число, то $x = 0$ и $\alpha_3(g) = 11 \cdot 244$, противоречие с леммой 6.

Так как $v = 44 \cdot 61$, то $S(G)$ является $\{2, 11, 61\}$-группой. Ввиду утверждений (1-2) $S(G)$ является 2-группой.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По таблице 1 [6] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(3^5)$ или $L_2(11^2)$. Индекс в $\bar{T}$ глобального стабилизатора антиподального класса $\bar{T}_{\{F\}}$ равен 244 в случае $L_2(3^5)$ и равен 122 или 244 в случае $L_2(11^2)$. Так как $\bar{T}_{\{F\}}$ содержит подгруппу индекса 11, то случай $L_2(11^2)$ невозможен. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 2. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}| = 244$, то $S(G) = 1$, $G \cong L_2(3^5)$ и Γ — реберно симметричный граф Мэтона. Следствие 2 доказано.

References

[1] A.A. Makhnev, D. V. Paduchikh, *Graphs with strongly regular local subgraphs having eigenvalue 4*, Maltsevskie chteniya, Abstracts, Novosibirsk (2016), 72.

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, 1989. Zbl 0747.05073

[3] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts, **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Zbl 0922.20003

[4] A.A. Makhnev, D. V. Paduchikh, *An automorphism group of a distance-regular graph with intersection array* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, Algebra and Logic, **4** (2012), 319–332. Zbl 1258.05050

[5] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **3** (2010), 439–442. Zbl 1250.05059

[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean Electr. Math. Reports, **6** 2009, 1–12. Zbl 1289.20021

Bitkina Viktoriya Vasilyevna
Severo-Osetinskii State University,
str. Vatutina, 46,
362000, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: bviktoriyav@mail.ru

Gutnova Alina Kazbekovna
Severo-Osetinskii State University,
str. Vatutina, 46,
362000, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: gutnovaalina@gmail.com

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru