S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1052–1066 (2016) УДК 512.552.4
DOI 10.17377/semi.2016.13.084 MSC 16R10

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА НИЛЬПОТЕНТНОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ R С УСЛОВИЕМ $dimR^2/R^3 = 2$

Е.П. ПЕТРОВ

Abstract. In this paper we describe defining relations of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^2/R^3 = 2$, it is proved that such algebra R satisfies the standard identity of degree four.

Keywords: defining relations, identities, nilpotent algebra.

1. Введение

В данной статье рассматриваются ассоциативные нильпотентные конечномерные алгебры над произвольным полем F.

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). В 1980 году С.А.Пихтильковым [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$. В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$, а также доказано, что каждая n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам: $x_1x_2\dots x_{n-2} = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n-2)}$, $\sigma \in S_{n-2}$, $n \geq 6$; $[x_1, x_2, \dots, x_k] = 0$, где $k = [\frac{n+1}{2}] + 1$. Кроме того, в работе [3] был поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$?*

Заметим, что описание многообразия $\mathfrak{M}_n$ на языке тождеств позволит ответить на вопрос: когда приведенно-свободная алгебра некоторого многообразия аппроксимируется k-мерными нильпотентными алгебрами ($k \leq n$)? Исходя из

Petrov, E.P., Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^2/R^3 = 2$.

Поступила 30 августа 2016 г., опубликована 28 ноября 2016 г.

этого, представляется естественным изучение тождеств сначала нильпотентных n-мерных алгебр, а затем уже произвольных n-мерных алгебр.

В 1989 г. И.Л.Гусевой [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1,\dots,x_k) = \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(k)} = 0, \text{ где } k \ = \ [\tfrac{n}{3}]+2.$$

В 1991 г. автором [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1,\dots,x_k)=0$, где $k=[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, в качестве подтверждения этой гипотезы приводится пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dimR^2/R^3 \le 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

Из этого результата следует, что стандартное тождество $S_k(x_1,\dots,x_k)=0$, где $k=[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, является минимальным тождеством в $\mathfrak{M}_n$ для $n\le 12$ и $n=15$ (см. [5]). Таким образом, для малых размерностей был найден ответ на вопрос (*).

В данной работе усиливается результат работы [5]. Именно, доказано, что всякая нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dimR^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\sigma\in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка является точной.

Рассматриваемая в данной работе нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dimR^2/R^3=2$ является в некотором смысле опорной для дальнейшего изучения произвольных нильпотентных конечномерных алгебр, для которых уже $dimR^2/R^3>2$. Поэтому описание ее определяющих соотношений и тождеств является весьма важным.

2. Предварительные замечания и определения

Далее во всей статье мы будем предполагать, что R — нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dimR^2/R^3=2$ над произвольным полем F.

Из работы [5] следует, что нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dimR^2/R^3=2$ с точностью до антиизоморфизма имеет следующую базис-таблицу:

(**)

a	a^2	a^3	$\dots$	a^k	a^{k+1}	a^{k+2}	a^{k+3}	$\dots$	a^{k+t}
b	ab	a^2b	$\dots$	$a^{k-1}b$	a^kb				
c_1									
$\vdots$									
c_s									

,

под которой мы понимаем описание базиса алгебры, где элементы столбца – базис R^i по модулю R^{i+1}, $i=1,\dots,k+t$.

Заметим, что согласно [5] в базис-таблице (**) параметр $t\ge 0$, причем при $t=0$ алгебра R удовлетворяет тождеству $x^{k+1}=0$.

В работе [5] также доказано предложение о том, что если R — нильпотентная конечномерная алгебра с условием $dimR^i/R^{i+1}=1$ для некоторого i, то R удовлетворяет так называемым перестановочным тождествам $p^\sigma_{i+1}(x_1,\dots,x_{i+1})=$

$x_1x_2\cdots x_{i+1} - x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(i+1)} = 0$ для всех $\sigma \in S_{i+1}$. Откуда следует, что в нашем случае алгебра R удовлетворяет тождествам
$p^{\sigma}_{k+3}(x_1,\dots,x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$.

3. Определяющие соотношения в алгебре R

При изучении строения алгебры R важное значение имеет равенство:

$$ba = \sum_{p=1}^{k+t-1} \alpha_p a^{p+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p a^p b, \text{ где } \alpha_p,\ \beta_p \in F. \tag{1}$$

Можно добиться значительного упрощения данной формулы. В следующей лемме мы хотим заменить порождающий элемент b на b', так чтобы выполнялись некоторые более простые соотношения.

Лемма. *Можно выбрать порождающий элемент b' так, чтобы в алгебре R выполнялись равенства:*

1) *в случае $\beta_1 \neq 1$:*

$$b'a = \sum_{p=1}^{k} \beta_p a^p b;$$

2) *в случае $\beta_1 = 1$:*

$$b'a = \alpha a^{l+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p a^p b, \quad \text{где} \quad \alpha \in \{0,1\}, \quad l \in \{1,\dots,k\ +\ t\ -\ 1\ \}.$$

Доказательство. Пусть $b' = X + Yb$, где X – неизвестный пока элемент подалгебры $\langle a\rangle$, порожденной элементом a, Y – неизвестный обратимый элемент подалгебры $\langle a\rangle^1$ с присоединенной единицей. (Поскольку, a – нильпотентный элемент, обратимость в этой алгебре равносильна наличию ненулевого "свободного члена".)

Из (1) имеем соотношение $ba = Aa + Bab$, где $A = \sum\limits_{p=1}^{k+t-1} \alpha_p a^p \in \langle a\rangle$, $B = \sum\limits_{p=1}^{k} \beta_p a^{p-1} \in \langle a\rangle^1$. Тогда

$$\begin{aligned} b'a &= Xa + Yba = Xa + Y(Aa + Bab) = Xa + YAa + BaYb \\ &= Xa + YAa + Ba(b' - X) = (X(1-B) + YA)a + Bab'. \end{aligned}$$

Если $\beta_1 \neq 1$, то элемент $(1 - B)$ обратим, поэтому при любом Y мы сможем найти такой X, чтобы выполнялось равенство $X(1-B)+YA = 0$. Это означает, что $b'a = Bab'$.

Если $\beta_1 = 1$, то положим $X = 0$. Очевидно, если $A \neq 0$, то $A = \widetilde{A}a^l$, где $\widetilde{A}$ — обратимый элемент из $\langle a\rangle^1$ (a^l — это самая маленькая степень с ненулевым коэффициентом). Положим, $Y = (\widetilde{A})^{-1}$, откуда $b'a = a^{l+1} + Bab'$.

Лемма доказана. □

Далее в тексте мы для удобства будем использовать запись b вместо b'.

Предложение 1. *Можно выбрать порождающие элементы c_i' так, чтобы в алгебре R с базис-таблицей $(**)$ для любых $x, y, z \in R$ и $i \in \{1, \dots, s\}$ выполнялись следующие равенства:*

$$ac_i' = 0, \tag{2}$$

$$c_i'x \equiv 0 \ (mod\ R^{k+1}). \tag{3}$$

Кроме того, в случае $\beta_1 \neq 0$:

$$yc_i' \equiv 0 \ (mod\ R^{k+1}), \tag{4}$$

$$xyc_i' = 0, \tag{5}$$

$$c_i'xyz = xc_i'yz = xyc_i'z = xyzc_i' = 0; \tag{6}$$

в случае $\beta_1 = 0$:

$$a^{k+2}b = 0, \tag{7}$$

$$ab^2c_i' = 0, \tag{8}$$

$$ba^m bc_i' = 0, \ m \geq 1, \tag{9}$$

$$bc_i'x = 0, \tag{10}$$

$$c_i'xyz = xc_i'yz = xyc_i'z = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Предположим для некоторого $i \in \{1, \dots, s\}$

$$ac_i = \sum_{p=1}^{k+t-1} \alpha_p^{(i)} a^{p+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p^{(i)} a^p b, \text{ где } \alpha_p^{(i)}, \beta_p^{(i)} \in F.$$

Тогда после замены $c_i' = c_i - \sum_{p=1}^{k+t-1} \alpha_p^{(i)} a^p + \sum_{p=1}^{k} \beta_p^{(i)} a^{p-1} b$ получим $ac_i' = 0$. Таким образом, в алгебре R выполнено соотношение (2).

Рассмотрим для некоторых $x \in R, \ i \in \{1, \dots, s\}$ равенство

$$c_i'x \equiv \sum_{p=1}^{k} \alpha_p^{(x)} a^{p+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p^{(x)} a^p b \ (mod\ R^{k+2}), \quad \alpha_p^{(x)}, \ \beta_p^{(x)} \in F.$$

Из соотношения (2) при условии, что $k > 1$, имеем

$$0 = (ac_i')x \equiv \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p^{(x)} a^{p+2} + \sum_{p=1}^{k-1} \beta_p^{(x)} a^{p+1} b \ (mod\ R^{k+2}),$$

откуда $\alpha_p^{(x)} = \beta_p^{(x)} = 0, \ p = 1, \dots, k-1$, то есть для любых $x \in R$ и $i \in \{1, \dots, s\}$ справедливо соотношение (3). При $k = 1$ это соотношение очевидно.

Поскольку алгебра R удовлетворяет тождествам $p_{k+3}^{\sigma}(x_1, \dots, x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$, то, учитывая (3), заключаем, что любых $y, z \in R$ элемент $(c_i'x)yz \in R^{k+3}$ и имеют место равенства

$$(c_i'x)yz = (c_i'x)zy = y(c_i'x)z = z(c_i'x)y = yz(c_i'x) = zy(c_i'x). \tag{12}$$

Разобьем далее доказательство на два случая: $\beta_1 \neq 0$ и $\beta_1 = 0$.

Случай 1. $\beta_1 \neq 0$.

Рассмотрим с учетом (2) следующее равенство:

$$0 = bac_i' = \Big(\alpha a^{l+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p a^p b\Big) c_i' = \sum_{p=1}^{k} \beta_p a^p b c_i'.$$

Очевидно, что в нильпотентной алгебре элементы вида $a^p bc_i',\ p = 1, \ldots, k$, могут быть либо линейно независимыми, либо равны нулю. Так как $\beta_1 \neq 0$, то для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ имеем соотношение

$$abc_i' = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим для некоторых $x, y \in R$ равенство

$$xy = \sum_{p=1}^{k+t-1} \alpha_p^{(xy)} a^{p+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p^{(xy)} a^p b, \quad \alpha_p^{(xy)},\ \beta_p^{(xy)} \in F.$$

Учитывая (2) и (13), получим, что для любых $x, y \in R$ выполняются соотношения (5): $xyc_i' = 0$.

Пусть для некоторых $y \in R,\ i \in \{1, \ldots, s\}$

$$yc_i' \equiv \sum_{p=1}^{k} \alpha_p^{(y)} a^{p+1} + \sum_{p=1}^{k} \beta_p^{(y)} a^p b \ (mod\ R^{k+2}), \quad \alpha_p^{(y)},\ \beta_p^{(y)} \in F.$$

Из (5) при условии $k > 1$,имеем, что

$$0 = ayc_i' \equiv \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p^{(y)} a^{p+2} + \sum_{p=1}^{k-1} \beta_p^{(y)} a^{p+1} b \ (mod\ R^{k+2}),$$

откуда $\alpha_p^{(y)} = \beta_p^{(y)} = 0,\ p = 1, \ldots, k-1$, то есть для любых $y \in R$ и $i \in \{1, \ldots, s\}$ справедливо соотношение (4), то есть $yc_i' \in R^{k+1}$.
При $k = 1$ это включение очевидно.

Наконец, принимая во внимание (5) и (12), для любых $x, y, z \in R$ и любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ получим соотношения (6): $c_i'xyz = xc_i'yz = xyc_i'z = xyzc_i' = 0$.

Случай 2. $\beta_1 = 0$.

Возможны два варианта:

1) для некоторого $l \in \{2, \ldots, k\}$ $\ \beta_1 = \cdots = \beta_{l-1} = 0,\ \beta_l \neq 0$, и тогда по лемме,

$$ba = \sum_{p=l}^{k} \beta_p a^p b. \tag{14}$$

2) $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$, то есть $ba = 0$.

Причем при $k = 1$ возможен только второй вариант.

Рассмотрим элемент $bc_i' = \sum\limits_{p=1}^{k+t-1} \varepsilon_p a^{p+1} + \sum\limits_{p=1}^{k} \xi_p a^p b, \quad \varepsilon_p,\ \xi_p \in F.$

Из сравнения (3) при условии $k > 1$ имеем

$$0 \equiv bc_i'a \equiv \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p a^{p+2} + \sum_{p=1}^{k-1} \xi_p a^p ba \ (mod\ R^{k+2})$$

$$\equiv \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p a^{p+2} + \sum_{p=1}^{k-1} \xi_p a^p \Big(\sum_{j=l}^{k} \beta_j a^j b\Big) \equiv \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p a^{p+2} + \sum_{p\geq 1}\sum_{j\geq l} \xi_p \beta_j a^{p+j} b \ (mod\ R^{k+2}).$$

Откуда, в частности, следует, что $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{k-1} = 0$, то есть

$$bc_i \equiv \varepsilon_k a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \xi_p a^p b \ (mod\ R^{k+2}).$$

При $k = 1$ это сравнение очевидно.

Докажем, что при $\beta_l \neq 0,\ \ l < k$, выполняется равенство

$$bc'_i \equiv \varepsilon_k a^{k+1} + \sum_{p=k-l+1}^{k} \xi_p a^p b \ (mod\ R^{k+2}). \tag{15}$$

Действительно, так как $\beta_l \neq 0$, то из равенства $0 = bac'_i = \sum\limits_{p=l}^{k} \beta_p a^p bc'_i$, имеем $a^l bc'_i = 0$. Отсюда получим $0 = a^l bc'_i \equiv \sum\limits_{p=1}^{k-l} \xi_p a^{p+l} b \ (mod\ R^{k+2})$. Следовательно, при $l < k\ \ \xi_1 = \cdots = \xi_{k-l} = 0$ и требуемое равенство (15) выполняется.

Заметим, что соотношение (7): $a^{k+2}b = 0$ при $t < 3$, когда $R^{k+3} = 0$, очевидно. Покажем, что при $t \geq 3$ это соотношение также имеет место.

Действительно, поскольку алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_m(x_1, \ldots, x_{k+3}) = 0, m \geq k+3$, для всех $\sigma \in S_m$, то $a^{k+2}b = ba^{k+2}$. Используя равенство (9), поскольку $l > 1$, получим

$$\begin{aligned} ba^{k+2} = \beta_l^{k+2} a^{l(k+2)} b + \cdots = \beta_l^{k+2} ba^{l(k+2)} + \cdots = \beta_l^{k+2} \beta_l^{l(k+2)} a^{l^2(k+2)} b + \ldots \\ = \beta_l^{(l+1)(k+2)} ba^{l^2(k+2)} + \cdots = \cdots = 0. \end{aligned}$$

В случае $ba = 0$ это равенство тем более верно.

Рассмотрим с учетом (7), (14) и (15) для случая $\beta_l \neq 0$, $l \in \{2, \ldots, k\}$, следующее равенство:

$$ab(bc'_i) = \sum_{p\geq k} \varepsilon_p aba^{p+1} + \sum_{p=k-l+1}^{k} \xi_p aba^p b = 0 + \sum_{p=k-l+1}^{k} \xi_p \Big(\sum_{j=l}^{k} \beta_j a \cdot a^j b\Big) a^{p-1} b.$$

Легко видеть, что элементы $a \cdot a^j ba^{p-1}$ принадлежат $R^{1+(l+1)+(k-l)} = R^{k+2}$, поэтому $a \cdot a^j ba^{p-1} b = 0$.

Таким образом, выполняется соотношение (8): $ab^2 c'_i = 0$.

Рассмотрим также с учетом (7), (14) и (15) для случая $\beta_l \neq 0$, $l \in \{2, \ldots, k\}$, следующее равенство:

$$ba(bc'_i) = \sum_{p\geq k} \varepsilon_p baa^{p+1} + \sum_{p=k-l+1}^{k} \xi_p baa^p b = 0 + \sum_{p=k-l+1}^{k} \xi_p \Big(\sum_{j=l}^{k} \beta_j a^j b\Big) a^p b.$$

Здесь элементы $a^j ba^p$ принадлежат $R^{(l+1)+(k-l+1)} = R^{k+2}$, поэтому $a^j ba^p b = 0$.

Следовательно, выполняется соотношение $babc'_i = 0$ и, тем более, соотношение $ba^m bc'_i = 0,\ m > 1$.

В случае $ba = 0$ соотношения (8), (9), как легко видеть, также выполняются.

Очевидно, что при $t \leq 1$ с учетом (3) выполняются соотношения (10), (11):

$$bc'_i x = 0,\ \ c'_i xyz = xc'_i yz = xyc'_i z = 0.$$

Поэтому далее считаем, что $t > 1$.

Пусть $a^{k+1}b = \sum\limits_{p=k+1}^{k+t-1} \nu_p a^{p+1}$. Используя (7), при $t > 2$ имеем равенство $a^{k+2}b = \sum\limits_{p=k+1}^{k+t-2} \nu_p a^{p+2} = 0$, откуда $\nu_p = 0$, $p = k+1, \dots, k+t-2$, то есть справедливо равенство

$$a^{k+1}b = \nu_{k+t-1} a^{k+t}. \tag{16}$$

При $t = 2$ это равенство очевидно.

Из (3) следует, что $c'_i x = \sum\limits_{p=k+1}^{k+t} \alpha_p^{(x)} a^p + \beta_k^{(x)} a^k b$.

Из соотношения (2) с учетом (16) имеем, что

$$0 = ac'_i x = \sum_{p=k+1}^{k+t-1} \alpha_p^{(x)} a^{p+1} + \beta_k^{(x)} a^{k+1} b = \sum_{p=k+1}^{k+t-1} \alpha_p^{(x)} a^{p+1} + \beta_k^{(x)} \nu_{k+t-1} a^{k+t}.$$

Откуда при $t > 2$ получим $\alpha_p^{(x)} = 0$, $p = k+1, \dots, k+t-2$, то есть $c'_i x = \sum\limits_{p=k+t-1}^{k+t} \alpha_p^{(x)} a^p + \beta_k^{(x)} a^k b$. При $t = 2$ последнее равенство очевидно.

Далее рассмотрим равенство $b(c'_i x) = \sum\limits_{p=k+t-1}^{k+t} \alpha_p^{(x)} ba^p + \beta_k^{(x)} ba^k b$.

В случае, если $ba = 0$, получим $b(c'_i x) = 0$.

Обратимся теперь к случаю, когда $ba \neq 0$ (и, следовательно, $k > 1$), $\beta_l \neq 0$, $l \in \{2, \dots, k\}$. С учетом (14) имеем

$$b(c'_i x) = \sum_{p=k+t-1}^{k+t} \alpha_p^{(x)} ba^p + \beta_k^{(x)} ba^k b = \alpha_{k+t-1}^{(x)} \beta_l a^{l(k+t-1)} b + \dots + \beta_k^{(x)} \beta_l a^{lk} bb + \dots = 0,$$

поскольку $lk \geq (k+2)$ при $k > 1$, $l > 1$, и поэтому степень элемента a^{lk} принадлежит R^{k+2}, значит, с учетом (7): $a^{lk}b = 0$, $a^{l(k+t-1)}b = 0$, так как $t > 1$.

Следовательно, выполняется соотношение (10): $bc'_i x = 0$.

Имеет место также для некоторого $y \in R$ следующее равенство:

$$yc'_j(c'_i x) = \sum_{p=k+t-1}^{k+t} \alpha_p^{(x)} yc'_j a^p + \beta_k^{(x)} yc'_j a^k b = 0,$$

поскольку степень элемента $yc'_j a^{k+t-1}$ принадлежит $R^{k+t+1} = 0$, степень элемента $yc'_j a^k$ принадлежит R^{k+2}, поэтому с учетом (7): $yc'_j a^k b = 0$.

Так как для любых $x, y \in R$ и $i, j \in \{1, \dots, s\}$ имеют место равенства $ya(c'_i x) = yb(c'_i x) = yc'_j(c'_i x) = 0$, то принимая во внимание (12), для любых $x, y, z \in R$ выполняются соотношения (11): $c'_i xyz = xc'_i yz = xyc'_i z = 0$.

Предложение доказано. $\square$

Далее в тексте мы для удобства будем использовать запись c_i вместо c'_i.

Предложение 2. *В алгебре R с базис-таблицей $(**)$ выполняются следующие определяющие соотношения:*

$$[ba^n ba^j, a^i] = [b^2 a^{n+j}, a^i] + \alpha \sum_{p=1}^{n} [a^{l+p} ba^{n-p+j}, a^i], \tag{17}$$

где $n, i \geq 1$, $j \geq 0$, $\alpha \in \{0, 1\}$ (из леммы), $l = 1, \dots, k+t-1$;

$$P(i_1, i_2, i_3;\ m) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\sigma} a^{\sigma(i_1)} (ba^m) a^{\sigma(i_2)} ba^{\sigma(i_3)} = 0, \tag{18}$$

где i_1, i_2, i_3, *такие что* $0 \le i_1 < i_2 < i_3,\ \ m \ge 0$.

Доказательство. Рассмотрим некоторый элемент $bx = \sum\limits_{i \ge n} \mu_i^{(x)} a^{i+1} + \sum\limits_{i \ge n} \nu_i^{(x)} a^i b$, где $x \in R^n,\ n \ge 1,\ \mu_i^{(x)}, \nu_i^{(x)} \in F$.

Тогда

$$\begin{aligned} bxa &= \sum_{i \ge n} \mu_i^{(x)} a^{i+2} + \sum_{i \ge n} \nu_i^{(x)} a^i ba \\ &= \sum_{i \ge n} \mu_i^{(x)} a^{i+2} + \sum_{i \ge n} \nu_i^{(x)} a^i \Big(\alpha a^{l+1} + \sum_{p \ge 1} \beta_p a^p b \Big) \\ &= \sum_{i \ge n} \mu_i^{(x)} a^{i+2} + \alpha \sum_{i \ge n} \nu_i^{(x)} a^{i+l+1} + \sum_{i \ge n} \sum_{p \ge 1} \nu_i^{(x)} \beta_p a^{i+p} b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bax &= \Big(\alpha a^{l+1} + \sum_{p \ge 1} \beta_p a^p b \Big) x = \alpha a^{l+1} x + \sum_{p \ge 1} \beta_p a^p (bx) \\ &= \alpha a^{l+1} x + \sum_{p \ge 1} \beta_p a^p \Big(\sum_{i \ge n} \mu_i^{(x)} a^{i+1} + \sum_{i \ge n} \nu_i^{(x)} a^i b \Big) \\ &= \alpha a^{l+1} x + \sum_{i \ge n} \sum_{p \ge 1} \mu_i^{(x)} \beta_p a^{i+p+1} + \sum_{i \ge n} \sum_{p \ge 1} \nu_i^{(x)} \beta_p a^{i+p} b. \end{aligned}$$

Откуда легко видеть, что для любого $i \ge 1$ выполняется равенство

$$[bax - bxa - \alpha a^{l+1} x, a^i] = 0.$$

Положим $x = a^{n-1} b$. Тогда для любого $i \ge 1$ выполняется соотношение

$$[ba^n b - ba^{n-1} ba - \alpha a^{l+n} b, a^i] = 0 \text{ или } [ba^n b, a^i] = [ba^{n-1} ba, a^i] + \alpha [a^{l+n} b, a^i].$$

Далее имеем, что

$$\begin{aligned} [ba^n b, a^i] &= [ba^{n-1} ba, a^i] + \alpha [a^{l+n} b, a^i] = [ba^{n-1} b, a^i] a + \alpha [a^{l+n} b, a^i] \\ &= \Big([ba^{n-2} ba, a^i] + \alpha [a^{l+n-1} b, a^i] \Big) a + \alpha [a^{l+n} b, a^i] \\ &= [ba^{n-2} b, a^i] a^2 + \alpha \Big([a^{l+n-1} b, a^i] a + [a^{l+n} b, a^i] \Big) \\ &= \Big([ba^{n-3} ba, a^i] + \alpha [a^{l+n-2} b, a^i] \Big) a^2 + \alpha \Big([a^{l+n-1} b, a^i] a + [a^{l+n} b, a^i] \Big) \\ &= [ba^{n-3} b, a^i] a^3 + \alpha \Big([a^{l+n-2} b, a^i] a^2 + [a^{l+n-1} b, a^i] a + [a^{l+n} b, a^i] \Big) = \ldots \\ \cdots &= [ba^{n-n} b, a^i] a^n + \alpha \Big([a^{l+n-(n-1)} b, a^i] a^{n-1} + \cdots + [a^{l+n} b, a^i] \Big). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$[ba^n b, a^i] = [b^2 a^n, a^i] + \alpha \sum_{p=1}^{n} [a^{l+p} ba^{n-p}, a^i].$$

Рассмотрим для некоторого $j \ge 1$ очевидное равенство

$$[ba^n b, a^i] a^j = [b^2 a^n, a^i] a^j + \alpha \sum_{p=1}^{n} [a^{l+p} ba^{n-p}, a^i] a^j.$$

Откуда непосредственно следует соотношение (17):

$$[ba^n ba^j, a^i] = [b^2 a^{n+j}, a^i] + \alpha \sum_{p=1}^{n} [a^{l+p} ba^{n-p+j}, a^i], \text{ где } j \geq 0.$$

Приступим теперь к доказательству соотношения (18).
Для некоторых i_1, i_2, i_3, таких что $0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, $m \geq 0$, рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{gathered} P(i_1, i_2, i_3;\ m) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)} (ba^m) a^{\sigma(i_2)} ba^{\sigma(i_3)} \\ = (a^{i_1} ba^{m+i_2} ba^{i_3} - a^{i_3} ba^{m+i_2} ba^{i_1}) \\ +(a^{i_2} ba^{m+i_3} ba^{i_1} - a^{i_1} ba^{m+i_3} ba^{i_2}) + (a^{i_3} ba^{m+i_1} ba^{i_2} - a^{i_2} ba^{m+i_1} ba^{i_3}) \\ = a^{i_1}[ba^{m+i_2} ba^{i_1}, a^{i_3-i_1}] - a^{i_1}[ba^{m+i_3} ba^{i_1}, a^{i_2-i_1}] - a^{i_2}[ba^{m+i_1} ba^{i_2}, a^{i_3-i_2}]. \end{gathered}$$

Используя соотношение (17), получим

$$\begin{gathered} P(i_1, i_2, i_3;\ m) = a^{i_1}\Big([b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_1}] + \alpha \sum_{p=1}^{m+i_2} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_2-p}, a^{i_3-i_1}]\Big) \\ -a^{i_1}\Big([b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2-i_1}] + \alpha \sum_{p=1}^{m+i_3} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_3-p}, a^{i_2-i_1}]\Big) \\ -a^{i_2}\Big([b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_2}] + \alpha \sum_{p=1}^{m+i_1} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_2-p}, a^{i_3-i_2}]\Big). \end{gathered}$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$a^{i_1}[b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_1}] - a^{i_1}[b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2-i_1}] - a^{i_2}[b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_2}].$$

Преобразовав его, получим

$$\begin{gathered} [b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3}] - [b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_1}] a^{i_3-i_1} \\ -[b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] + [b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_1}] a^{i_2-i_1} \\ -[b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3}] + [b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_2}] a^{i_3-i_2} \\ = -[b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_1}] a^{i_3-i_1} - [b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] \\ +[b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_1}] a^{i_2-i_1} + [b^2 a^{m+i_1+i_2}, a^{i_2}] a^{i_3-i_2} \\ = -[b^2 a^{m+i_2+i_3}, a^{i_1}] - [b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] \\ +[b^2 a^{m+i_2+i_3}, a^{i_1}] + [b^2 a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] = 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим далее выражения при коэффициенте α и проведем необходимые преобразования

$$\begin{gathered} a^{i_1} \sum_{p=1}^{m+i_2} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_2-p}, a^{i_3-i_1}] \\ -a^{i_1} \sum_{p=1}^{m+i_3} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_3-p}, a^{i_2-i_1}] \\ -a^{i_2} \sum_{p=1}^{m+i_1} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_2-p}, a^{i_3-i_2}] \\ = \sum_{p=1}^{m+i_2} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_2-p}, a^{i_3}] - \sum_{p=1}^{m+i_2} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_2-p}, a^{i_1}] a^{i_3-i_1} \\ - \sum_{p=1}^{m+i_3} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_3-p}, a^{i_2}] + \sum_{p=1}^{m+i_3} [a^{l+p} ba^{m+i_1+i_3-p}, a^{i_1}] a^{i_2-i_1} \end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{p=1}^{m+i_1}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2-p},a^{i_3}]+\sum_{p=1}^{m+i_1}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2-p},a^{i_2}]a^{i_3-i_2}\\
&\quad=\sum_{p=1}^{m+i_2}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2-p},a^{i_3}]-\sum_{p=1}^{m+i_2}[a^{l+p}ba^{m+i_2+i_3-p},a^{i_1}]\\
&\quad-\sum_{p=1}^{m+i_3}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_3-p},a^{i_2}]+\sum_{p=1}^{m+i_3}[a^{l+p}ba^{m+i_2+i_3-p},a^{i_1}]\\
&\quad-\sum_{p=1}^{m+i_1}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2-p},a^{i_3}]+\sum_{p=1}^{m+i_1}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_3-p},a^{i_2}]\\
&=\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_2}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2-p},a^{i_3}]+\sum_{p=m+i_2+1}^{m+i_3}[a^{l+p}ba^{m+i_2+i_3-p},a^{i_1}]\\
&\qquad\qquad-\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_3}[a^{l+p}ba^{m+i_1+i_3-p},a^{i_2}]\\
&\quad=\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_2}(a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2+i_3-p}-a^{l+i_3+p}ba^{m+i_1+i_2-p})\\
&\quad+\sum_{p=m+i_2+1}^{m+i_3}(a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2+i_3-p}-a^{l+i_1+p}ba^{m+i_2+i_3-p})\\
&\quad-\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_3}(a^{l+p}ba^{m+i_1+i_2+i_3-p}-a^{l+i_2+p}ba^{m+i_1+i_3-p})\\
&=\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_3}a^{l+i_2+p}ba^{m+i_1+i_3-p}-\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_2}a^{l+i_3+p}ba^{m+i_1+i_2-p}\\
&\qquad\qquad-\sum_{p=m+i_2+1}^{m+i_3}a^{l+i_1+p}ba^{m+i_2+i_3-p}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $i_1<i_2<i_3$, то, полагая $i_2=i_1+r_1,\ i_3=i_1+r_2$ для некоторых r_1,r_2, таких что $0<r_1<r_2$, имеем, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_1+r_2}a^{l+i_1+r_1+p}ba^{m+2i_1+r_2-p}-\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_1+r_1}a^{l+i_1+r_2+p}ba^{m+2i_1+r_1-p}\\
&\qquad\qquad-\sum_{p=m+i_1+r_1+1}^{m+i_1+r_2}a^{l+i_1+p}ba^{m+2i_1+r_1+r_2-p}.
\end{aligned}
$$

Разбив первую сумму на две части, получим, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_1+r_2-r_1}a^{l+i_1+r_1+p}ba^{m+2i_1+r_2-p}+\sum_{p=m+i_1+r_2-r_1+1}^{m+i_1+r_2}a^{l+i_1+r_1+p}ba^{m+2i_1+r_2-p}\\
&-\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_1+r_1}a^{l+i_1+r_2+p}ba^{m+2i_1+r_1-p}-\sum_{p=m+i_1+r_1+1}^{m+i_1+r_2}a^{l+i_1+p}ba^{m+2i_1+r_1+r_2-p}.
\end{aligned}
$$

Изменив индексы суммирования и полагая во второй сумме $p=p_1+r_2-r_1$, в четвертой сумме $p=p_2+r_1$, получим, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_1+r_2-r_1}a^{l+i_1+r_1+p}ba^{m+2i_1+r_2-p}-\sum_{p_2=m+i_1+1}^{m+i_1+r_2-r_1}a^{l+i_1+r_1+p_2}ba^{m+2i_1+r_2-p_2}\\
&+\sum_{p_1=m+i_1+1}^{m+i_1+r_1}a^{l+i_1+r_2+p_1}ba^{m+2i_1+r_1-p_1}-\sum_{p=m+i_1+1}^{m+i_1+r_1}a^{l+i_1+r_2+p}ba^{m+2i_1+r_1-p}=0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, соотношение $P(i_1,i_2,i_3;\ m)=0$ выполняется в алгебре R. Предложение доказано. □

4. Стандартное тождество степени 4 в алгебре R

Теорема. *Произвольная нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dimR^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству*

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma\in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0.$$

Доказательство. Из определения стандартного полинома видно, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R.

Рассмотрим в алгебре R элемент $S = S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 – фиксированные различные базисные элементы алгебры R.

Предположим сначала, что среди $x_l \in R$, $l = 1, \dots, 4$, найдутся по крайней мере два порождающих c_i, $i = 1, \dots, s$. Тогда, принимая во внимание соотношения (6) и (11), получаем $S = S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Рассмотрим случай, когда в записи элемента S среди $x_l \in R$, $l = 1, \dots, 4$, встречается только один порождающий c_i , $i = 1, \dots, s$.

Тогда, в случае $\beta_1 \neq 0$ из соотношения (6) получим $S = S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

В случае $\beta_1 = 0$ из соотношения (11) следует, что возможным ненулевым слагаемым в S может быть только слагаемое, оканчивающееся на c_i, $i = 1, \dots, s$. Поэтому $S = S_4(x_1, x_2, x_3, c_i) = S_3(x_1, x_2, x_3)c_i$.

Возможны следующие варианты:

1) $S_3(a^{i_1}, a^{i_2}, a^{i_3}b)c_i = \Big([a^{i_1}, a^{i_2}]a^{i_3}b + [a^{i_3}b, a^{i_1}]a^{i_2} + [a^{i_2}, a^{i_3}b]a^{i_1}\Big)c_i =$
$= [a^{i_3}b, a^{i_1}]a^{i_2}c_i = 0$ в силу соотношения (2);

2) $S_3(a^{i_1}, a^{i_2}b, a^{i_3}b)c_i = \Big([a^{i_1}, a^{i_2}b]a^{i_3}b + [a^{i_3}b, a^{i_1}]a^{i_2}b + [a^{i_2}b, a^{i_3}b]a^{i_1}\Big)c_i = 0$ в силу соотношений (2), (8) и (9);

3) $S_3(a^{i_1}b, a^{i_2}b, a^{i_3}b)c_i = \Big([a^{i_1}b, a^{i_2}b]a^{i_3}b + [a^{i_3}b, a^{i_1}b]a^{i_2}b + [a^{i_2}b, a^{i_3}b]a^{i_1}b\Big)c_i = 0$ в силу соотношений (8) и (9).

Таким образом, во всех вариантах $S = S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Предположим теперь, что среди $x_l \in R$, $l = 1, \dots, 4$, в записи элемента S не встречается ни одного из порождающих c_i, $i = 1, \dots, s$.

Рассмотрим различные варианты с учетом соотношения (18).

1) $S = S_4(a^{i_1}, a^{i_2}, a^{i_3}, a^{i_4}b) = [a^{i_1}, a^{i_2}] \circ [a^{i_3}, a^{i_4}b] + [a^{i_2}, a^{i_3}] \circ [a^{i_1}, a^{i_4}b]+$
$+[a^{i_1}, a^{i_3}] \circ [a^{i_4}b, a^{i_2}] = 0$, где $x \circ y = xy + yx$.

2) $S = S_4(a^{i_1}, a^{i_2}b, a^{i_3}, a^{i_4}b)$, где $1 \le i_1 < i_3$, $0 \le i_2 < i_4$.

В этом случае

$$\begin{aligned}
S = S_4(a^{i_1}, a^{i_2}b, a^{i_3}, a^{i_4}b) &= [a^{i_1}, a^{i_2}b] \circ [a^{i_3}, a^{i_4}b] + [a^{i_2}b, a^{i_3}] \circ [a^{i_1}, a^{i_4}b]+ \\
&+[a^{i_1}, a^{i_3}] \circ [a^{i_4}b, a^{i_2}b] = [a^{i_1}, a^{i_2}b] \circ [a^{i_3}, a^{i_4}b] + [a^{i_2}b, a^{i_3}] \circ [a^{i_1}, a^{i_4}b] \\
&= a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}b - a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3} - a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}a^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3} \\
&+a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b - a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} - a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_1}a^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1} \\
&+a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_1}a^{i_4}b - a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1} - a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b + a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} \\
&+a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}b - a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3} + a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}a^{i_2}b.
\end{aligned}$$

После очевидных сокращений

$$\begin{gathered}
S = a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}b - a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b \\
-a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1} - a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1} - a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b \\
+a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} + a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}b - a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3} \\
= a^{i_2}\Big(a^{i_1}ba^{i_3}a^{i_4}b - a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3} + ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3} - ba^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1} - a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}b + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}\Big) \\
+a^{i_4}\Big(a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} + ba^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_1}ba^{i_3}a^{i_2}b - ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}\Big) \\
= a^{i_2}\Big(a^{i_1}(ba^{i_4})a^{i_3}ba^0 - a^{i_1}(ba^{i_4})a^0ba^{i_3} + a^0(ba^{i_4})a^{i_1}ba^{i_3} \\
-a^0(ba^{i_4})a^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_3}(ba^{i_4})a^{i_1}ba^0 + a^{i_3}(ba^{i_4})a^0ba^{i_1}\Big) \\
-a^{i_4}\Big(a^{i_3}(ba^{i_2})a^{i_1}ba^0 - a^{i_3}(ba^{i_2})a^0ba^{i_1} + a^0(ba^{i_2})a^{i_3}ba^{i_1} \\
+a^{i_1}(ba^{i_2})a^0ba^{i_3} - a^{i_1}(ba^{i_2})a^{i_3}ba^0 - a^0(ba^{i_2})a^{i_1}ba^{i_3}\Big) \\
= a^{i_2}P(0, i_1, i_3;\ i_4) - a^{i_4}P(0, i_1, i_3;\ i_2) = 0.
\end{gathered}$$

3) $S = S_4(a^{i_1}, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$, где $i_1 \geq 1,\ 0 \leq i_2 < i_3 < i_4$.
В этом случае

$$\begin{gathered}
S = a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b \\
-a^{i_1}a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}b + a^{i_1}a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b \\
+a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}b \\
-a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b \\
+a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} - a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} \\
-a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} \\
+a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}ba^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}ba^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}b \\
-a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}b + a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}b - a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}b \\
= a^{i_1}\Big(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} \\
-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\Big)b \\
+\Big(a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b \\
-a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}\Big)a^{i_1}b \\
-\Big(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} \\
-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\Big)ba^{i_1} \\
-\Big(a^{i_2}(ba^{i_1})a^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}(ba^{i_1})a^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_3}(ba^{i_1})a^{i_4}ba^{i_2} \\
-a^{i_2}(ba^{i_1})a^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_4}(ba^{i_1})a^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_3}(ba^{i_1})a^{i_2}ba^{i_4}\Big)b \\
= a^{i_1}P(i_2, i_3, i_4;\ 0)b + P(i_2, i_3, i_4;\ 0)a^{i_1}b - P(i_2, i_3, i_4;\ 0)ba^{i_1} - P(i_2, i_3, i_4;\ i_1)b = 0.
\end{gathered}$$

4) $S = S_4(a^{i_1}b, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$, где $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4$.
В этом случае

$$\begin{gathered}
S = a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4}b + a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4}b \\
-a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}b - a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}b \\
+a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3}b - a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}b \\
-a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}b + a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}b \\
+a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}b + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}b \\
-a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}b - a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}b
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}b - a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}b + a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}b \\
-a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}b + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}b - a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}b \\
= \Big(a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2} \\
-a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3} + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}\Big)ba^{i_4}b \\
-\Big(a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2} \\
-a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} - a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}\Big)ba^{i_3}b \\
+\Big(a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1} \\
-a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3} - a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}\Big)ba^{i_2}b \\
-\Big(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} \\
-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\Big)ba^{i_1}b \\
= P(i_1,i_2,i_3;\ 0)ba^{i_4}b - P(i_1,i_2,i_4;\ 0)ba^{i_3}b + P(i_1,i_3,i_4;\ 0)ba^{i_2}b \\
-P(i_2,i_3,i_4;\ 0)ba^{i_1}b = 0.
\end{gathered}
$$

Теорема доказана. □

Предложение 3. *Нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dim R^2/R^3 = 2$ может не удовлетворять никакому полилинейному тождеству степени три.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру R_1 над произвольным полем F (с более, чем двумя элементами) со следующей базис-таблицей:

a	a^2	a^3	a^4
b	ab	a^2b	a^3b

,

и определяющими соотношениями: $b^2 = 0$, $ba = \beta_1 ab$, где $\beta_1 \neq 0; 1$.

Предположим, что алгебра R_1 удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству степени три

$$
\begin{gathered}
f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma\in S_3} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} = \alpha_{123}x_1x_2x_3 + \alpha_{213}x_2x_1x_3 + \alpha_{132}x_1x_3x_2 \\
+\alpha_{231}x_2x_3x_1 + \alpha_{312}x_3x_1x_2 + \alpha_{321}x_3x_2x_1 = 0,
\end{gathered}
$$

где $\alpha_\sigma = \alpha_{ijk} \in F$, не все из которых равны нулю.

Тогда

$$f(a,a^2,b) = \alpha_{123}a^3b + \alpha_{213}a^3b + \alpha_{132}aba^2 + \alpha_{231}a^2ba + \alpha_{312}ba^3 + \alpha_{321}ba^3 = 0,$$

$$f(a^2,a,b) = \alpha_{123}a^3b + \alpha_{213}a^3b + \alpha_{132}a^2ba + \alpha_{231}aba^2 + \alpha_{312}ba^3 + \alpha_{321}ba^3 = 0.$$

Откуда получим, что

$$
\begin{gathered}
f(a,a^2,b) - f(a^2,a,b) = \\
= \Big((\alpha_{123}+\alpha_{213}) + \beta_1^2\alpha_{132} + \beta_1\alpha_{231} + \beta_1^3(\alpha_{312}+\alpha_{321})\Big)a^3b \\
-\Big((\alpha_{123}+\alpha_{213}) + \beta_1\alpha_{132} + \beta_1^2\alpha_{231} + \beta_1^3(\alpha_{312}+\alpha_{321})\Big)a^3b \\
= \beta_1(\beta_1-1)(\alpha_{132}-\alpha_{231})a^3b = 0,
\end{gathered}
$$

и, следовательно, $\alpha_{132} = \alpha_{231}$.

Рассмотрим также равенства

$$f(a,b,a^2) = \alpha_{123}aba^2 + \alpha_{213}ba^3 + \alpha_{132}a^3b + \alpha_{231}ba^3 + \alpha_{312}a^3b + \alpha_{321}a^2ba = 0,$$

$$f(a^2,b,a) = \alpha_{123}a^2ba + \alpha_{213}ba^3 + \alpha_{132}a^3b + \alpha_{231}ba^3 + \alpha_{312}a^3b + \alpha_{321}aba^2 = 0.$$

Откуда получим, что

$$\begin{gathered} f(a,b,a^2) - f(a^2,b,a) \\ = \Big(\beta_1^2\alpha_{123} + \beta_1^3(\alpha_{213}) + \alpha_{231}) + (\alpha_{132} + \alpha_{312}) + \beta_1\alpha_{321}\Big)a^3b \\ -\Big(\beta_1\alpha_{123} + \beta_1^3(\alpha_{213}) + \alpha_{231}) + (\alpha_{132} + \alpha_{312}) + \beta_1^2\alpha_{321}\Big)a^3b \\ = \beta_1(\beta_1 - 1)(\alpha_{123} - \alpha_{321})a^3b = 0, \end{gathered}$$

и, следовательно, $\alpha_{123} = \alpha_{321}$.

Далее рассмотрим равенства

$$f(b,a,a^2) = \alpha_{123}ba^3 + \alpha_{213}aba^2 + \alpha_{132}ba^3 + \alpha_{231}a^3b + \alpha_{312}a^2ba + \alpha_{321}a^3b = 0,$$

$$f(b,a^2,a) = \alpha_{123}ba^3 + \alpha_{213}a^2ba + \alpha_{132}ba^3 + \alpha_{231}a^3b + \alpha_{312}aba^2 + \alpha_{321}a^3b = 0.$$

Откуда получим, что

$$\begin{gathered} f(b,a,a^2) - f(b,a^2,a) \\ = \Big(\beta_1^3(\alpha_{123} + \alpha_{132}) + \beta_1^2\alpha_{213} + (\alpha_{231} + \alpha_{321}) + \beta_1\alpha_{312}\Big)a^3b \\ -\Big(\beta_1^3(\alpha_{123} + \alpha_{132}) + \beta_1\alpha_{213} + (\alpha_{231} + \alpha_{321}) + \beta_1^2\alpha_{312}\Big)a^3b \\ = \beta_1(\beta_1 - 1)(\alpha_{213} - \alpha_{312})a^3b = 0, \end{gathered}$$

и, следовательно, $\alpha_{213} = \alpha_{312}$.

Обратимся теперь к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} f(a,a,b) &= \alpha_{123}a^2b + \alpha_{213}a^2b + \alpha_{132}aba + \alpha_{231}aba + \alpha_{312}ba^2 + \alpha_{321}ba^2 \\ &= \Big((\alpha_{123} + \alpha_{213}) + \beta_1(\alpha_{132} + \alpha_{231}) + \beta_1^2(\alpha_{312} + \alpha_{321})\Big)a^2b = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a,b,a) &= \alpha_{123}aba + \alpha_{213}ba^2 + \alpha_{132}a^2b + \alpha_{231}ba^2 + \alpha_{312}a^2b + \alpha_{321}aba \\ &= \Big(\beta_1(\alpha_{123} + \alpha_{321}) + \beta_1^2(\alpha_{213} + \alpha_{231}) + (\alpha_{132} + \alpha_{312})\Big)a^2b = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(b,a,a) &= \alpha_{123}ba^2 + \alpha_{213}aba + \alpha_{132}ba^2 + \alpha_{231}a^2b + \alpha_{312}aba + \alpha_{321}a^2b \\ &= \Big(\beta_1^2(\alpha_{123} + \alpha_{132}) + \beta_1(\alpha_{213} + \alpha_{312}) + (\alpha_{231} + \alpha_{321})\Big)a^2b = 0, \end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha_{132} = \alpha_{231}$, $\alpha_{123} = \alpha_{321}$, $\alpha_{213} = \alpha_{312}$, получим следующую систему уравнений:

$$(\alpha_{123} + \alpha_{213}) + 2\beta_1\alpha_{132} + \beta_1^2(\alpha_{213} + \alpha_{123}) = 0,$$

$$2\beta_1\alpha_{123} + \beta_1^2(\alpha_{213} + \alpha_{132}) + (\alpha_{132} + \alpha_{213}) = 0,$$

$$\beta_1^2(\alpha_{123} + \alpha_{132}) + 2\beta_1\alpha_{213} + (\alpha_{132} + \alpha_{123}) = 0.$$

После преобразований система уравнений примет вид:

$$\begin{gathered} (\beta_1^2 + 1)\alpha_{123} + 2\beta_1\alpha_{132} + (\beta_1^2 + 1)\alpha_{213} = 0, \\ 2\beta_1\alpha_{123} + (\beta_1^2 + 1)\alpha_{132} + (\beta_1^2 + 1)\alpha_{213} = 0, \\ (\beta_1^2 + 1)\alpha_{123} + (\beta_1^2 + 1)\alpha_{132} + 2\beta_1\alpha_{213} = 0. \end{gathered}$$

В случае, если характеристика поля F равна 2, то легко видеть, что $\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{231} = \alpha_{321} = \alpha_{213} = \alpha_{312}$.

В случае, если характеристика поля F не равна 2, рассмотрим следующее равенство:

$$f(a,a,a) = (\alpha_{123}+\alpha_{213}+\alpha_{132}+\alpha_{231}+\alpha_{312}+\alpha_{321})a^3 = 2(\alpha_{123}+\alpha_{132}+\alpha_{213})a^3 = 0,$$

откуда следует, что $\alpha_{123} = -\alpha_{132} - \alpha_{213}$, и с учетом этого факта система уравнений принимает окончательный вид

$$(\beta_1 - 1)^2\alpha_{132} = 0,$$
$$(\beta_1 - 1)^2\alpha_{213} = 0.$$

Таким образом, получаем, что $\alpha_{123} = \alpha_{213} = \alpha_{132} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} = 0$.

Следовательно, алгебра R_1 не удовлетворяет тождеству $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Предложение доказано. □

Таким образом, приведенное выше утверждение доказывает точность полученной оценки 4 для степени минимального тождества.

Автор выражает глубокую признательность рецензенту за очень ценные замечания и предложения, благодаря которым данная работа включила в себя более квалифицированные выкладки, приобрела более компактный и приемлемый для читателя вид, а также автор благодарен участникам научного семинара "Теория колец"под руководством профессора Мальцева Юрия Николаевича за плодотворное обсуждение полученных автором результатов.

References

[1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)*, V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., Novosibirsk, 1982.

[2] S.A. Pikhtil'kov, *On varieties generated by n-dimensional algebras*, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, No. 1213-80 Dep.

[3] Yu.N. Mal'tsev, *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72.

[4] I.L. Guseva, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, p. 43.

[5] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, **30**:5 (1991), 540–556. Zbl 0806.16025

Evgeniy Petrovich Petrov
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: pep@email.asu.ru