S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1067–1077 (2016) УДК 512.579
DOI 10.17377/semi.2016.13.085 MSC 30A10, 30C10, 30C15

СИЛЬНО ТОЧНЫЕ ПОЛИГОНЫ НАД КОММУТАТИВНЫМИ МОНОИДАМИ И ГРУППАМИ С МОДУЛЯРНЫМИ РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ

А.А. СТЕПАНОВА, Н.В. ТРИКАШНАЯ

Abstract. In this article we describe the strongly faithful S-acts over commutative monoids and groups with distributive, modular and linear congruence lattices.

Keywords: lattice, modular lattice, distributive lattice, linear lattice, congruence lattice of algebra, S-act, strongly faithful S-act.

1. Введение

Структура решетки конгруэнций алгебры частично определяет строение самой алгебры, поэтому естественной является задача описания алгебр с заданными условиями на их решетки конгруэнций.

В [1] Д.П. Егоровой и Л.А. Скорняковым описаны унары, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, модулярными решетками с дополнениями и булевыми алгебрами. В [2] Д.П. Егоровой описаны унары, решетки конгруэнций которых являются модулярными, дистрибутивными и линейными решетками. Полигон является унарной алгеброй, т.е. алгеброй, в сигнатуру которой входят только унарные операции. В [3] Д.О. Птаховым и А.А. Степановой получены критерии модулярности и дистрибутивности решетки конгруэнций несвязных полигонов. В [4] А.Р. Халиуллиной получены условия модулярности и дистрибутивности решёток конгруэнций полигонов над полугруппами правых или левых нулей, а также условия, при которых решётка конгруэнций является цепью.

Stepanova, A.A, Trikashnaya, N.V., The strongly faithful S-acts over commutative monoids and groups with modular congruence lattices.

Поступила 19 августа 2016 г., опубликована 1 декабря 2016 г.

В данной работе рассмотрены сильно точные полигоны над моноидами (см. [5]), т. е. полигоны, для которых равенство $sa = ta$ влечет $s = t$ для любых элементов s, t моноида и элемента a полигона. Найдены условия, при которых сильно точные полигоны над коммутативными моноидами и группами имеют дистрибутивные, модулярные и линейные решетки конгруэнций (теоремы 9–13).

2. Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия унарной алгебры и теории полигонов, которые можно найти в [5, 6].

Пусть S – моноид. Левым *S-полигоном* (или просто *полигоном*) ${}_SA$ называется непустое множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Полигон ${}_SA$ называется *сильно точным*, если для любых $a \in A, s, t \in S$

$$sa = ta \Longrightarrow s = t.$$

Полигон ${}_SA$ называется *линейно упорядоченным*, если $Sa \subseteq Sb$ или $Sb \subseteq Sa$ для любых $a, b \in A$.

Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega, c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. Максимальный по включению связный подполигон полигона ${}_SA$ называется *компонентой связности* полигона ${}_SA$. *Копроизведением* $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение. Ясно, что любой полигон представим в виде копроизведения своих компонент связности.

Конгруэнцией на алгебре $\mathcal{A} = \langle A; L\rangle$ языка L называется всякая подалгебра θ прямого квадрата $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, обладающая следующими свойствами:

1) рефлексивность: $(a, a) \in \theta$ для всех $a \in A$;

2) симметричность: если $(a, b) \in \theta$, то $(b, a) \in \theta$ для всех $a, b \in A$;

3) транзитивность: если $(a, b) \in \theta$ и $(b, c) \in \theta$, то $(a, c) \in \theta$ для всех $a, b \in A$.

Вместо записи $\langle a, b\rangle \in \theta$ иногда будем использовать запись $a\theta b$. Классом конгруэнции θ с представителем $a \in A$ назовем множество $a/\theta = \{b \in A \mid a\theta b\}$. Через $Con(\mathcal{A})$ обозначим множество всех конгруэнций алгебры $\mathcal{A}$ относительно операций $\wedge, \vee$, которые определены следующим образом:

$$\theta \wedge \eta = \theta \cap \eta,$$

$$\theta \vee \eta - \text{наименьшая конгруэнция алгебры } \mathcal{A}, \text{содержащая } \theta \text{ и } \eta,$$

где θ, η – конгруэнции алгебры $\mathcal{A}$. Заметим, что $Con(\mathcal{A})$ является решеткой относительно операций $\wedge, \vee$. Эту решетку будем называть решеткой конгруэнций алгебры $\mathcal{A}$. Наименьшим элементом этой решетки является *нулевая конгруэнция*

$$0_{\mathcal{A}} = \{\langle \mathrm{a}, \mathrm{a}\rangle \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A}\},$$

наибольшим – *единичная конгруэнция*

$$1_{\mathcal{A}} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}.$$

Теорема 1 (14, гл.1, §3, теорема 9). *Пусть ${}_SA$ – полигон, $a, b \in A$, $\theta_1, \theta_2 \in Con({}_SA)$. Тогда $a\,(\theta_1 \vee \theta_2)\,b$ в том и только в том случае, когда существует* *цепочка* $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ *элементов из* A *такая, что* $a = x_0$, $x_{2n} = b$, $x_{2k}\,\theta_1\,x_{2k+1}$ *и* $x_{2k+1}\,\theta_2\,x_{2k+2}$ *для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Говорят, что конгруэнция θ алгебры $\mathcal{A}$ порождается множеством $C \subseteq A$, если θ является наименьшей конгруэнцией алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $c\theta d$ для любых $c, d \in C$.

Теорема 2 ([3]). *Пусть конгруэнция* θ *полигона* ${}_SA$ *порождается множеством* $C \subseteq A$, $a, b \in A$. *Тогда* $a\theta b$ *в том и только том случае, когда существуют* $n \in w$, $t_0, ..., t_n \in S$, $c_0, ..., c_{2n} \in C$ *такие, что*

$$t_0c_0 = a \wedge t_nc_{2n} = b \wedge t_ic_{2i+1} = t_{i+1}c_{2i+2}$$

для любых $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Пусть ${}_SB$ — подполигон полигона ${}_SA$ и θ — конгруэнция полигона ${}_SA$. Через $\theta \restriction B$ обозначим конгруэнцию $\theta \cap (B \times B)$ полигона ${}_SB$, через $\rho(B)$ — конгруэнцию Риса на полигоне ${}_SA$, т.е.

$$\langle a, b\rangle \in \rho(B) \Longleftrightarrow a, b \in B \text{ или } a = b.$$

Пусть θ и η – бинарные отношения на множестве A. Определим отношение $\theta \circ \eta$ на A следующим образом:

$$a(\theta \circ \eta)b \Longleftrightarrow \exists c \in A(a\theta c\eta b).$$

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется *модулярной*, если для любых $a, b, c \in L$, где $a \leqslant c$, справедлив модулярный закон

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется *дистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in L$ справедлив дистрибутивный закон

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Ясно, что модулярная решетка является дистрибутивной. Решетка $(L; \wedge, \vee)$ называется *линейной*, если $(L; \leq)$ является линейно упорядоченным множеством, где

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a \text{ для любых } a, b \in L.$$

Теорема 3 (6, гл.3, §2, предложение 2). *Следующие свойства решетки* L *эквивалентны:*

1) L *модулярна;*

2) если $a, b \in L, a \leqslant b$ *и для некоторого* $c \in L$ *справедливо* $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, *то* $a = b$.

Теорема 4 (6, гл.3, §3, предложение 1). *Следующие свойства решетки* L *эквивалентны:*

1) L *дистрибутивна;*

2) если $a, b \in L$ *и для некоторого* $c \in L$ *справедливо* $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, *то* $a = b$.

Если G — группа, то через $L(G)$ обозначим решетку подгрупп группы G. Группа называется *локально циклической*, если каждое конечное множество ее элементов порождает циклическую подгруппу.

Теорема 5 ([7], гл.1, раздел 1, теорема 2)**.** *Решетка подгрупп $L(G)$ группы G дистрибутивна тогда и только тогда, когда G — локально циклическая группа.*

Теорема 6 ([7], гл.1, раздел 2, теорема 5)**.** *Решетка подгрупп $L(G)$ абелевой группы G модулярна.*

Полугруппа S называется полугруппой с правым (левым) сокращением, если из равенства $ac = bc$ ($ca = cb$) следует $a = b$ для любых $a, b, c \in S$. Полугруппа S называется полугруппой с сокращением, если S – полугруппа с правым и левым сокращением. Если S – полугруппа, то решетку конгруэнций полугруппы S обозначим $C(S)$.

Теорема 7 ([8])**.** *Пусть S — коммутативная полугруппа с сокращениями. Решетка конгруэнций $C(S)$ полугруппы S модулярна (дистрибутивна) тогда и только тогда, когда S — абелева группа (локально циклическая группа).*

Натуральные числа рассматриваем как ординалы, и через ω обозначаем наименьший бесконечный ординал. Таким образом, запись $n \in \omega$ будет означать, что n – натуральное число.

3. Предварительные результаты

Лемма 1. *Если S – коммутативный моноид, то решетка $Con({}_SS)$ конгруэнций полигона ${}_SS$ совпадает с решеткой конгруэнций $C(S)$ моноида S.*

Доказательство. Пусть $\theta \in Con({}_SS)$. Покажем, что $\theta \in C(S)$. Пусть $a\theta b$, $c\theta d$. Тогда $ac\theta ad = da\theta db = bd$. Следовательно,

$$\theta \in C(S) \Longleftrightarrow \theta \in Con({}_SS).$$

□

Лемма 2. *Пусть ${}_SA$ — сильно точный полигон, $a \in A$. Тогда отображение*

$$\varphi : Sa \longrightarrow S$$

такое, что $\varphi(ta) = t$, где $t \in S$, является изоморфизмом полигонов ${}_SSa$ и ${}_SS$.

Лемма 3. *Пусть S – группа. Решетка $Con({}_SS)$ конгруэнций полигона ${}_SS$ изоморфна решетке $L(S)$ подгрупп группы S.*

Доказательство. Любая конгруэнция $\theta \in Con({}_SS)$ определяет разложение группы S на левые классы смежности по подгруппе $1/\theta$. Определим отображение

$$\varphi : Con({}_SS) \longrightarrow L(S)$$

следующим образом: $\varphi(\theta) = 1/\theta$ для любого $\theta \in Con({}_SS)$. Заметим, что φ – биекция, причем $\varphi(\theta_1 \wedge \theta_2) = 1/\theta_1 \cap 1/\theta_2$ и $\varphi(\theta_1 \vee \theta_2)$ – подгруппа группы S, порожденная множеством $1/\theta_1 \cup 1/\theta_2$. Следовательно, φ – изоморфизм решеток.

□

Из леммы 3 и теоремы 6 следует

Лемма 4. *Пусть S — абелева группа. Тогда решетка конгруэнций $Con({}_SS)$ полигона ${}_SS$ модулярна.*

Лемма 5. *Пусть S – коммутативный моноид, ${}_SA$ – полигон, решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ дистрибутивна, $a, b \in A$, $\theta \in Con_S(Sa \cup Sb)$, $\theta \neq 1_{Sa\cup Sb}$ и $a\theta b$. Тогда $a/\theta \cap Sa \cap Sb \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Если $Sa \subseteq Sb$ или $Sb \subseteq Sa$, то $a/\theta \cap Sa \cap Sb \neq \emptyset$. Предположим, что $a \notin Sb$, $b \notin Sa$ и $a/\theta \cap Sa \cap Sb = \emptyset$.

Конгруэнции ξ_1, ξ_2, ξ полигона ${}_S(Sa \cup Sb)$ определим следующим образом:

$$\xi_1 = \rho(Sa) \vee (\theta \restriction Sb), \xi_2 = \rho(Sb) \vee (\theta \restriction Sa),\ \xi = \theta \vee \rho(Sa \cap Sb).$$

Ясно, что $\xi_1 \neq \xi_2$ и

$$\xi \wedge \xi_1 = \xi \wedge \xi_2,$$
$$\xi \vee \xi_1 = \xi \vee \xi_2 = 1_{Sa\cup Sb}.$$

Тогда по теореме 4 решетка конгруэнций $Con_S(Sa \cup Sb)$ полигона ${}_S(Sa \cup Sb)$ не дистрибутивна. Следовательно, решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ не дистрибутивна. Противоречие.

□

Лемма 6. *Пусть S — неодноэлементный моноид, ${}_SA$ — сильно точный полигон и решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ дистрибутивна. Тогда ${}_SA$ — линейно упорядоченный полигон.*

Доказательство. Предположим, что существуют ${}_SB$ и ${}_SC$ — подполигоны ${}_SA$, такие, что $b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$ для некоторых $b, c \in A$. Через θ обозначим конгруэнцию полигона ${}_S(Sb \cup Sc)$, порожденную множеством $\{b, c\}$. Покажем, что $b/\theta \cap Sb \cap Sc = \emptyset$. Пусть $a \in b/\theta \cap Sb \cap Sc$. Тогда $\langle a, b\rangle \in \theta$ и по теореме 2 существуют $n \in \omega$, $t_0, ..., t_n \in S$, $c_0, ..., c_{2n} \in \{b, c\}$ такие, что

$$t_0c_0 = b \wedge t_nc_{2n} = a \wedge t_ic_{2i+1} = t_{i+1}c_{2i+2}$$

для любых $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Естественно считать, что $c_i \neq c_{i+1}$ для всех $i \in \{0, 1, ..., 2n\}$. Так как $c_0 \neq c$, то $c_0 = b$ и, в силу сильной точности полигона ${}_SA$, $t_0 = 1$. Следовательно, $c_1 = c$, $c_2 = b$, $c = t_1b$, что противоречит условию $c \notin B$. Поскольку S – неодноэлементный моноид, то $\theta \neq 1_{Sb\cup Sc}$ и по лемме 5 решетка $Con({}_SA)$ не дистрибутивна. □

Лемма 7. *Пусть ${}_SA$ – полигон, решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна, ${}_SB$ – подполигон полигона ${}_SA$, θ, $\eta \in Con({}_SA)$, $b, c, d \in A$, причем $B = b/\theta$, $c, d \notin B$, $c(\eta\circ\theta)b$, $d(\eta\circ\theta)b, c\theta d$. Тогда $c/\eta = d/\eta$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены и

$$C = \{u \in A \mid u(\eta \circ \theta)b\}.$$

Ясно, что $B \subseteq C$. Заметим, что ${}_SC$ – подполигон полигона ${}_SA$. Действительно, если $c \in C$, то существует $x \in A$ такой, что $c\eta x\theta b$, тогда $(tc)\eta(tx)\theta(tb)\theta b$, т.е. $tc \in C$ для любого $t \in S$.

Предположим, что $c/\eta \neq d/\eta$. Тогда $\mid B \mid > 1$. Построим конгруэнции θ_1, η_1 и θ_2 полигона ${}_SC$ следующим образом:

$$\theta_1 = (\theta \restriction C), \eta_1 = (\eta \restriction C), \theta_2 = \rho(B) \vee (\theta_1 \wedge \eta_1).$$

Очевидно, что $\langle c, d\rangle \in \theta_1 \setminus \theta_2$. Так как $c, d \in C \setminus B$ и $c/\eta \neq d/\eta$, то $\theta_2 \subset \theta_1$. Ясно, что

$$\theta_2 \wedge \eta_1 = \theta_1 \wedge \eta_1, \theta_2 \vee \eta_1 = \theta_1 \vee \eta_1 = 1_C.$$

Тогда по теореме 3 решетка конгруэнций $Con({}_SC)$ полигона ${}_SC$ не модулярна. Следовательно, решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ не модулярна. Противоречие. $\square$

Лемма 8. *Пусть S – коммутативный моноид, $\theta, \eta \in Con({}_SA)$ и $u, v, w \in A$ такие, что $Su \subseteq Sv$, $Sw \subseteq Sv$ и $u\,\theta\, v\,\eta\, w$. Тогда $u\,\eta\, v'\,\theta\, w$ для некоторого $v' \in Su \cap Sw$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Так как $Su \subseteq Sv$ и $Sw \subseteq Sv$, то $u = tv$ и $w = rv$ для некоторых $t, r \in S$. Тогда $u = tv\,\eta\, tw = trv = rtv = ru\,\theta\, rv = w$, т.е.

$$u\,\eta\; tw = ru\;\theta\; w.$$

Таким образом, лемма доказана. $\square$

Пусть ${}_SA$ – линейно упорядоченный полигон. Выберем в линейно упорядоченном множестве подполигонов полигона ${}_SA$ конфинальное вполне упорядоченное подмножество. Тогда существует ординал α такой, что ${}_SA = \bigcup_{\beta<\alpha} {}_SSa_\beta$, причем $Sa_\beta \subseteq Sa_\gamma$ $(\beta \le \gamma < \alpha)$, $\theta \in Con({}_SA)$. Через θ^β обозначим конгруэнцию $\theta \restriction Sa_\beta$ полигона ${}_SSa_\beta$.

Лемма 9. *Пусть S – коммутативный моноид, ${}_SA$ – линейно упорядоченный полигон, ${}_SA = \bigcup_{\beta<\alpha} {}_SSa_\beta$, $Sa_\beta \subseteq Sa_\gamma$ $(\beta \le \gamma < \alpha)$, θ, η – различные конгруэнции полигона ${}_SA$. Тогда существует $\beta < \alpha$ такое, что θ^β и η^β – различные конгруэнции полигона ${}_SSa_\beta$ и*

$$\theta^\beta \wedge \eta^\beta = (\theta \wedge \eta)^\beta, \;\; \theta^\beta \vee \eta^\beta = (\theta \vee \eta)^\beta.$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Так как $\theta \ne \eta$, то существует $\beta < \alpha$ такое, что $\theta^\beta \ne \eta^\beta$. Ясно, что $\theta^\beta \wedge \eta^\beta = (\theta \wedge \eta)^\beta$.

Докажем, что $\theta^\beta \vee \eta^\beta = (\theta \vee \eta)^\beta$. Включение $\theta^\beta \vee \eta^\beta \subseteq (\theta \vee \eta)^\beta$ очевидно. Покажем включение $(\theta \vee \eta)^\beta \subseteq \theta^\beta \vee \eta^\beta$.

Пусть $x, y \in Sa_\beta$ и $x\,(\theta \vee \eta)\,y$. Тогда по теореме 1 существуют $n \in \omega$, $z_0, \dots, z_{2n} \in A$ такие, что $x = z_0, y = z_{2n}, z_{2k}\,\theta\, z_{2k+1}$ и $z_{2k+1}\,\eta\, z_{2k+2}$ для любых $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $n = 1$. Если $z_1 \in Sa_\beta$, то $x(\theta^\beta \vee \eta^\beta)y$. Если $z_1 \notin Sa_\beta$, то в силу линейной упорядоченности полигона ${}_SA$ имеем $Sa_\beta \subseteq Sz_1$, т.е. $Sx \subseteq Sz_1$ и $Sy \subseteq Sz_1$, и по лемме 8 $x(\theta^\beta \vee \eta^\beta)y$.

Пусть $n > 1$. Покажем, что существуют $u_i \in Sz_0 \bigcup Sz_{2n}$ $(0 \le i \le 2n)$ такие, что $u_0 = z_0, u_{2n} = z_{2n}$,

$$u_{2k}\,\theta\, u_{2k+1}\,\eta\, u_{2k+2}$$

для любых $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Выберем k такое, что $Sz_i \subseteq Sz_k$ для всех i, $0 \le i \le 2n$. Если $k \in \{0, 2n\}$, то утверждение верно.

Если $k = 1$, то по лемме 8 существует $v \in Sz_0$ такой, что $z_0\,\eta\, v\,\theta z_2$, т.е. $z_0\,\theta\, z_0\,\eta\, v\,\theta z_3$. Цепочка $v\theta z_3\,\eta\, z_4\theta \dots \eta z_{2n}$ более короткая, чем исходная, поэтому по предположению индукции элементы $z_3, z_4, \dots, z_{2n-1}$ могут быть заменены на элементы $u_i \in Sv \cup Sz_{2n} \subseteq Sz_0 \cup Sz_{2n}$. Аналогичное получаем при $k = 2n-1$.

В случае $k \notin \{0, 1, 2n-1, 2n\}$ поступаем так: звено $z_{k-1}\,\eta\, z_k\,\theta z_{k+1}$ по лемме 8 дает $z_{k-1}\,\theta\, v\,\eta z_{k+1}$, откуда получается $z_{k-2}\,\theta\, z_{k-1}\,\theta\, v\,\eta z_{k+1}\,\eta\, z_{k+2}$, т.е. $z_{k-2}\,\theta\, v\,\eta\, z_{k+2}$, вследствие чего исходную цепочку можно укоротить, а значит, по предположению индукции элементы $z_1, \ldots, z_{k-2}, v, z_{k+2}, \ldots, z_{2n-1}$ можно заменить элементами $u_1, \ldots, u_{k-2}, u_k, u_{k+2}, \ldots, u_{2n-1} \in Sz_0 \cup Sz_{2n}$. Окончательно получим:

$$z_0 \theta u_1 \, \eta \, \ldots u_{k-2} \theta u_k \eta u_k \theta u_k \eta u_{k+2} \theta \ldots u_{2n-1} \eta z_{2n}.$$

Так как все $u_i \in Sz_0 \cup Sz_{2n} = Sx \cup Sy \subseteq Sa_\beta$, то $\langle x, y \rangle \in \theta^\beta \vee \eta^\beta$. □

4. Сильно точные полигоны над коммутативным моноидом с дистрибутивными решетками конгруэнций

Лемма 10. *Пусть S – коммутативный моноид, ${}_SA$ – сильно точный линейно упорядоченный полигон, решетка конгруэнций $Con({}_SS)$ полигона ${}_SS$ дистрибутивна. Тогда решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ дистрибутивна.*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены. В силу линейной упорядоченности полигона ${}_SA$ найдется ординал α такой, что $A = \bigcup_{\beta<\alpha} Sa_\beta$, причем $Sa_\beta \subseteq Sa_\gamma$ $(\beta \leq \gamma < \alpha)$. По лемме 2 для любых $\beta < \alpha$

$$Con({}_SSa_\beta) \cong Con({}_SS),$$

т.е. решетка конгруэнций $Con({}_SSa_\beta)$ дистрибутивна.

Предположим, что решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ не дистрибутивна. Тогда по теореме 4 существуют различные конгруэнции $\theta_2, \theta_3 \in Con({}_SA)$ такие, что для некоторого $\theta_1 \in Con({}_SA)$ выполняются равенства

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_3, \;\; \theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3.$$

По лемме 9 существует $\beta < \alpha$ такой, что $\theta_2^\beta \neq \theta_3^\beta$, и

$$\theta_1^\beta \wedge \theta_2^\beta = \theta_1^\beta \wedge \theta_3^\beta, \;\; \theta_1^\beta \vee \theta_2^\beta = \theta_1^\beta \vee \theta_3^\beta,$$

что противоречит дистрибутивности решетки $Con({}_SSa_\beta)$. Таким образом, решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ дистрибутивна. □

Теорема 8. *Пусть S — коммутативный неодноэлементный моноид, ${}_SA$ — сильно точный полигон. Решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда ${}_SA$ — линейно упорядоченный полигон и S — локально циклическая группа.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Поскольку ${}_SA$ — сильно точный полигон, то по лемме 2 S — моноид с сокращением. Следовательно, по теореме 7 и лемме 1 дистрибутивность решетки $Con({}_SS)$ конгруэнций полигона ${}_SS$ эквивалентна тому, что S — локально циклическая группа.

Необходимость. Пусть решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ дистрибутивна. Тогда по лемме 6 ${}_SA$ – линейно упорядоченный полигон. По лемме 2 решетка $Con({}_SS)$ конгруэнций полигона ${}_SS$ дистрибутивна, т.е. S – локально циклическая группа.

Достаточность следует из леммы 10. □

Теорема 9. *Пусть S неединичная группа, ${}_SA$ – сильно точный полигон. Решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда решетка $L(S)$ подгрупп группы S дистрибутивна и ${}_SA$ – связный полигон.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены.

Необходимость. Предположим, что решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ дистрибутивна. По лемме 6 ${}_SA$ – связный полигон. Поскольку S – группа, то ${}_SA ={}_S Sa$ для некоторого $a \in A$ и ${}_SSa \cong_S S$. Следовательно, решетка конгруэнций $Con({}_SS)$ дистрибутивна. По лемме 3 $Con({}_SS) \cong L(S)$, т.е. $L(S)$ — дистрибутивная решетка.

Достаточность. Так как ${}_SA$ — связный полигон и S – группа, то ${}_SA ={}_S Sa$ для любого $a \in A$. По лемме 3 $Con({}_SS) \cong L(S)$, т.е. $Con({}_SA)$ – дистрибутивная решетка конгруэнций полигона ${}_SA$. □

Следующее предложение очевидно.

Предложение 1. *Если S – одноэлементный моноид, то решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда $\mid A \mid\leq 2$.*

5. Сильно точные полигоны над коммутативным моноидом с модулярными решетками конгруэнций

Пусть S – моноид. Введем обозначения:

$$T = \{s \in S \mid Ss = S\}.$$

Лемма 11. *Пусть S – моноид. Тогда*

1) если $S \setminus T = \emptyset$, то S – группа,

2) если $S \setminus T \neq \emptyset$, ${}_SA$ – сильно точный полигон и $a \in A$, то ${}_S(Sa\backslash Ta)$ – подполигон полигона ${}_SSa$.

Доказательство. 1) очевидно. Докажем 2). Пусть $a \in A$. По лемме 2 $Sa\backslash Ta \neq \emptyset$. Пусть $r \in S$ и $b \in Sa\backslash Ta$. Тогда $b = ka$, где $k \notin T$. Предположим, что $rb \in Ta$. Тогда $rb = ta$ для некоторого $t \in T$. Существует $t' \in S$ такой, что $t't = 1$. Следовательно, $t'rb = a$. Тогда $t'rka = a$. Поскольку ${}_SA$ – сильно точный полигон, то $(t'r)k = 1$, т.е. $k \in T$. Противоречие. □

Лемма 12. *Пусть S – коммутативный моноид, не являющийся группой, ${}_SA$ – сильно точный полигон, $a_1, a_2, a_3 \in A$ такие, что $a_1 \notin Sa_2 \cup Sa_3$, $a_2 \notin Sa_1 \cup Sa_3$ и $a_3 \notin Sa_1 \cup Sa_2$. Тогда решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ не модулярна.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены, ${}_SD = \cup_{i=1}^3 {}_SSa_i$ и $R = \cup_{i=1}^3(Sa_i\backslash Ta_i)$. Поскольку S не является группой, то по леммам 2 и 11 $S\backslash T \neq \emptyset$ и $Sa_i \setminus Ta_i \neq \emptyset$, т.е. $R \neq \emptyset$. По лемме 11 ${}_SR$ – подполигон полигона ${}_SA$. Так как $st = ts \notin T$ для любого $t \in T$ и $s \notin T$, то разбиение $(Ta_2 \cup Ta_3) \cup (R \cup Sa_1)$ множества D определяет конгруэнцию полигона ${}_SD$, которую обозначим через θ. Аналогично, конгруэнция η полигона ${}_SD$ определяется разбиением $(Ta_1 \cup Ta_2) \cup (R \cup Sa_3)$ множества D. Тогда по лемме 7 для $B = Sa_1 \cup R$, $b = a_1$, $c = a_2$, $d = a_3$ решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ не модулярна. □

Лемма 13. *Пусть S неодноэлементный моноид, ${}_SA$ — сильно точный полигон, решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна. Тогда ${}_SA$ — связный полигон.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Заметим, что для полигона над коммутативным моноидом связность равносильна выполнению соотношений $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ для любых элементов a, b полигона. Предположим, что $a, b \in A$, $Sa \cap Sb = \emptyset$, ${}_SB ={}_S Sa \cup_S Sb$. Пусть $\phi :_S Sa \to_S Sb$ – изоморфизм полигонов такой, что $\phi(a) = b$. Конгруэнции $\eta_1, \eta_2, \theta \in Con({}_SB)$ определяются следующим образом: $\eta_1 = \rho_{Sa}$, $\eta_2 = \rho_{Sa} \cup \rho_{Sb}$,

$$x\theta y \Longleftrightarrow (y \in Sb, x \in Sa, y = \phi(x)), \quad \text{или} \quad (y \in Sa, x \in Sb, x = \phi(y)), \quad \text{или} \quad x = y.$$

Поскольку $|S| > 1$, то по лемме 2 $|Sa| = |Sb| > 1$ и $0_B \subset \eta_1 \subset \eta_2$. Ясно, что

$$\eta_1 \vee \theta = \eta_2 \vee \theta = 1_B,$$

$$\eta_1 \wedge \theta = \eta_2 \wedge \theta = 0_B.$$

Следовательно, по теореме 3 решетка конгруэнций $Con({}_SB)$ не модулярна. Таким образом, решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ не модулярна. Противоречие. □

Теорема 10. *Пусть S — коммутативный неодноэлементный моноид, ${}_SA$ — сильно точный полигон. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна тогда и только тогда, когда ${}_SA$ — связный полигон и S — группа.*

Доказательство. *Необходимость* следует из лемм 13, 1 и теоремы 7.

Достаточность. Пусть ${}_SA$ — связный полигон и S — группа. Тогда ${}_SA = {}_SSa$ для некоторого $a \in A$. Следовательно, по теореме 7 и лемме 1 решетка $Con({}_SA)$ модулярна. □

Теорема 11. *Пусть S — неединичная группа, ${}_SA$ — сильно точный полигон. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна тогда и только тогда, когда ${}_SA$ — связный полигон и решетка подгрупп $L(S)$ группы S модулярна.*

Доказательство. *Необходимость* следует из лемм 13, 1 и 3.

Достаточность. Так как S — группа, то ${}_SA ={}_S Sa$ для некоторого $a \in A$. Поскольку $Con({}_SS) \cong Con({}_SSa)$, то по лемме 3 решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна. □

Следствие 1. *Пусть S неединичная абелева группа, ${}_SA$ — сильно точный полигон. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна тогда и только тогда, когда ${}_SA$ — связный полигон.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 11 и теоремы 6. □

Следующее предложение очевидно.

Предложение 2. *Если S — одноэлементный моноид, то решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ модулярна тогда и только тогда, когда $| A | \leq 3$.*

6. Сильно точные полигоны над коммутативным моноидом с линейными решетками конгруэнций

Теорема 12. *Пусть S – коммутативный неодноэлементный моноид и ${}_SA$ – сильно точный полигон. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ является линейной тогда и только тогда, когда ${}_SA$ линейно упорядоченный полигон и решетка $C(S)$ конгруэнций моноида S линейна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ линейная. Тогда $Con({}_SA)$ дистрибутивна. Следовательно, по теореме 8 ${}_SA$ – линейно упорядоченный полигон. Пусть $a \in A$. Решетка $Con({}_SSa)$ конгруэнций полигона ${}_SSa$ как подрешетка линейной решетки $Con({}_SA)$ является линейной. Поскольку по лемме 2 ${}_SSa \cong_S S$, то $Con({}_SSa) \cong Con({}_SS)$ и решетка конгруэнций $Con({}_SS)$ полигона ${}_SS$ линейна. По лемме 1 $Con({}_SS) \cong C(S)$. Следовательно, $C(S)$ линейна.

Достаточность. Пусть ${}_SA$ – линейно упорядоченный полигон и решетка конгруэнций $C(S)$ моноида S линейна. Тогда ${}_SA = \bigcup_{\beta<\alpha} {}_SSa_\beta$, причем $Sa_\beta \subseteq Sa_\gamma$, если $\beta \le \gamma < \alpha$. Пусть $\theta, \eta \in Con({}_SA)$ и $\theta \neq \eta$. По лемме 9 существует β такое, что $\theta^\beta \neq \eta^\beta$, т.е. $\theta^\beta, \eta^\beta \in Con(Sa_\beta)$. По лемме 2 ${}_SSa_\beta \cong_S S$. Тогда $Con({}_SSa_\beta)$ линейная. Можно считать, что $\theta^\beta \subset \eta^\beta$.

Покажем, что $\theta \subset \eta$. Предположим, что существуют $x, y \in A$ такие, что $x\theta y$ и не верно $x\eta y$. Тогда существует $\beta < \gamma < \alpha$ такое, что $x, y \in Sa_\gamma$. Следовательно, $x\theta^\gamma y$ и неверно $x\eta^\gamma y$. Поскольку решетка конгруэнций $Con(Sa_\gamma)$ линейная, то $\eta^\gamma \subseteq \theta^\gamma$ или $\theta^\gamma \subseteq \eta^\gamma$. Так как $\eta^\beta = \eta^\gamma \restriction Sa_\beta$ и $\theta^\beta = \theta^\gamma \restriction Sa_\beta$, то $\theta^\gamma \subset \eta^\gamma$, что противоречит соотношению $\langle x, y\rangle \in \theta^\gamma \setminus \eta^\gamma$. Таким образом, решетка $Con({}_SA)$ линейна. □

Теорема 13. *Пусть S нееденичная группа, ${}_SA$ – сильно точный полигон. Решетка $Con({}_SA)$ линейна тогда и только тогда, когда ${}_SA$ – связный полигон и S – циклическая p-группа или квазициклическая группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть условия теоремы выполнены. Предположим, что $Con({}_SA)$ линейна. Тогда по лемме 1 решетка $L(S)$ подгрупп группы S линейна. Ясно, что S – p-группа (иначе существуют подгруппы группы S различных простых порядков, не сравнимые в решетке $L(S)$). Тогда в силу линейности решетки $L(S)$ группа S – конечная циклическая или квазициклическая.

Достаточность очевидна. □

Следующее предложение очевидно.

Предложение 3. *Если S — одноэлементный моноид, то решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций полигона ${}_SA$ линейна тогда и только тогда, когда $\mid A \mid \le 2$.*

References

[1] D.P. Egorova, L.A. Skornyakov, *About the structure of the congruence of the unary algebra*, Uporyadochennie mnojestva i reshetki: Mejvuzovskii nauchnii sbornik, (1977), 28–40. Zbl 0392.08005

[2] D.P. Egorova, *The structure of the congruence of the unary algebra*, Uporyadochennie mnojestva i reshetki : Mejvuzovskii nauchnii sbornik, **5** (1978), 11–44. Zbl 0402.08004

[3] D.O. Ptakhov, A.A. Stepanova, *Congruence's lattice of the polygon*, Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal, **13**:1 (2013), 107–116. Zbl 1301.08010

[4] A. R. Khaliullina, *Terms of modularity of the lattice congruence polygon over the semigroup of left and right zeroes*, Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal, **15**:1 (2015), 102–120. Zbl 1342.20060

[5] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Monoids, Acts, and Categories*, Berlin : Walter de Gruyter, 2000. Zbl 0945.20036

[6] L.A. Skornyakov, *Elements of general algebra*, Moskva: Nauka, 1983. Zbl 0528.00001

[7] M. Suzuki, *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Erg. Math. **10**, Berlin: Springer, 1956. Zbl 0070.25406

[8] B. Pondelicek, *Modularity and distributivity of tolerance lattices of commutative separative semigroups*, Czechoslovak Mathematical Journal, **35**:2 (1985), 333–337. Zbl 0573.20062

[9] H. Mitsch, *Semigroups and their lattice of Coungruence II* , Semigroup forum, **54** (1997), 1–42. Zbl 0872.20052

[10] L.A. Skornyakov, *Elements of the theory of structures*, Moskva: Nauka, 1982. Zbl 0498.06001

[11] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Math. Surveys, no. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.,1961. Zbl 0111.03403

[12] A.G. Kurosh, *The theory of groups*, Moskva: Nauka, 1967. Zbl 0189.30801

[13] M. Hall, Jr., *The theory of groups*, New York, MacMillan Co.,1959. Zbl 0084.02202

[14] G. Gretzer, *General theory of structures*, Moskva: Mir, 1981.

Alena Andreevna Stepanova
Far Eastern Federal University,
Suhanova St., 8,
690950, Vladivostok , Russia
Institute of Applied Mathematics,
Radio St., 7,
690041, Vladivostok , Russia
E-mail address: stepltd@mail.ru

Nataliya Vyacheslavovna Trikashnaya
Far Eastern Federal University,
Suhanova St., 8,
690950, Vladivostok , Russia
E-mail address: trik1974@yandex.ru